

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим дискретный стационарный случайный процесс $x(t)$, $t \in Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $Mx(t) = 0$. Пусть $x(0), \dots, x(T-1)$ — выборка T наблюдений за процессом $x(t)$. Возникает задача построения оценок спектральных плотностей вторых и высших порядков процесса $x(t)$ по наблюдаемой выборке и исследования свойств этих оценок. Цель настоящей работы — привести некоторые результаты исследований по данному вопросу.

Аналогично работе [1] введем в рассмотрение смешанные моменты n -го порядка: $m_n(t_1, \dots, t_n)$ и смешанные семинварианты n -го порядка: $c_n(t_1, \dots, t_n)$, где $t_1, \dots, t_n \in Z$ и n — конечное число. Так как $x(t)$ — стационарный процесс, то для любого n , любых $t_1, \dots, t_n \in Z$ и любого $t \in Z$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} c_n(t_1+t, \dots, t_n+t) &= c_n(t_1, \dots, t_n), \\ m_n(t_1+t, \dots, t_n+t) &= m_n(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Заметим, что $m_2(\tau) = c_2(\tau) = R(\tau)$, где $R(\tau)$ — ковариационная функция процесса $x(t)$.

Далее предположим, что смешанные семинварианты имеют представление Фурье, т. е.

$$c_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \delta^* \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) f_n(x_1, \dots, x_n) e^{i \sum_{j=1}^n x_j t_j} dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

где $\delta^*(x) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi t)$, а $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Функцию $f_n(x_1, \dots, x_n)$, сосредоточенную на многообразиях вида $\sum_{j=1}^n x_j = 0 \pmod{2\pi}$ назовем спектральной плотностью n -го порядка. Она периодична с периодом 2π по каждому из аргументов. Из работы [2] следует, что класс случайных стационарных процессов, для которых возможно представление (1), существует. В случае $n = 2$ из равенства (1) нетрудно получить, что $c_2(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ixt} dx$, где $f(x) = f_2(x, -x)$ — обыч-

ная спектральная плотность стационарного случайного процесса $x(t)$.

В дальнейшем будем предполагать, что на спектральную плотность наложены ограничения:

$$f(x+\lambda) = f(\lambda) + R(x, \lambda), \quad (2)$$

где

$$|R(x, \lambda)| \leq C|x|. \quad (3)$$

Выборочной спектральной плотностью, или периодограммой, называется статистика

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} x(t_1) x(t_2) e^{i\lambda(t_1-t_2)}, \quad (4)$$

где $-\pi \leq \lambda \leq \pi$. Из [3] известно, что, если принять статистику (4) за оценку спектральной плотности, она будет асимптотически несмещенной, но не состоятельной оценкой. Как оценку спектральной плотности $f(\lambda)$ в точке λ_s , где

$$\lambda_s = \frac{2\pi s}{T}, \quad -\left[\frac{T}{2}\right] \leq s \leq \left[\frac{T}{2}\right], \quad (5)$$

рассмотрим выражение

$$\hat{f}_T(\lambda_s) = \sum_k \varphi_T(k) I_T(\lambda_{s+k}). \quad (6)$$

В равенстве (6) $\varphi_T(k)$ — некоторая функция, называемая спектральным окном и удовлетворяющая свойствам: $\varphi_T(k) \geq 0$, $\sum_k \varphi_T(k) = 1$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_k \varphi_T(k) |k| < \infty, \quad -\left[\frac{T}{2}\right] \leq k \leq \left[\frac{T}{2}\right].$$

Сформулируем несколько теорем, которые дают представление о свойствах оценки (6).

Теорема 1. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $x(t)$ удовлетворяет соотношениям (2) и (3), то для оценки $\hat{f}_T(\lambda_s)$, задаваемой (6), справедливо неравенство

$$|M \hat{f}_T(\lambda_s) - f(\lambda_s)| \leq \frac{2\pi C}{T} \left(\sum_k \varphi_T(k) |k| + \frac{3}{2} \ln T \right). \quad (7)$$

Из теоремы 1 следует, что оценка спектральной плотности $\hat{f}_T(\lambda_s)$, задаваемая (6), является асимптотически несмещенной.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 T} \frac{\sin \frac{T z_1}{2}}{\sin \frac{z_1}{2}} \frac{\sin \frac{T z_2}{2}}{\sin \frac{z_2}{2}} \frac{\sin \frac{T z_3}{2}}{\sin \frac{z_3}{2}} \frac{\sin \frac{T(z_1 + z_2 + z_3)}{2}}{\sin \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}}.$$

Из работы [3] известно, что

$$\sup_T \frac{1}{(2\pi)^3 T} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(z_1, z_2, z_3)| dz_1 dz_2 dz_3 \leq C_3.$$

Теорема 2. Пусть процесс $x(t)$ имеет первые четыре момента и спектральные плотности вторых порядков удовлетворяют (2) и (3). Тогда, если

$$\sup_{\lambda} |f(\lambda)| \leq C_1, \quad \sup_{\lambda, i=1, 2, 3} |f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)| \leq C_2,$$

то

$$\begin{aligned} & |D \hat{f}_T(\lambda_s) - \sum_k \varphi_T^2(k) f^2(\lambda_s) - \sum_m \varphi_T(s+m) \varphi_T(s-m) f^2(\lambda_m)| \leq \\ & \leq \frac{2\pi C_2 \cdot C_3}{T} + \frac{4\pi^2 C^2}{T^2} \left(\sum_k \varphi_T^2(k) k^2 + 32 \ln^2 T \right) + \frac{4\pi C \cdot C_1}{T} \left(\sum_k \varphi_T^2(k) |k| + 2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим среднеквадратичное отклонение для оценки (9), т. е.

$$M |\hat{f}_T(\lambda_s) - f(\lambda_s)|^2 = |M \hat{f}_T(\lambda_s) - f(\lambda_s)|^2 + D \hat{f}_T(\lambda_s). \quad (9)$$

Подставляя в правую часть (9) значение $\hat{f}_T(\lambda_s)$ и находя математическое ожидание и дисперсию оценки (6), получаем

$$M \hat{f}_T(\lambda_s) - f(\lambda_s) = \sum_k \varphi_T(k) \int_{-\pi}^{\pi} [f(z + \lambda_{s+k}) - f(\lambda_s)] \Phi_T(z) dz, \quad (10)$$

где функция $\Phi_T(z) = \frac{1}{2\pi T} \frac{\sin^2 \frac{Tz}{2}}{\sin^2 \frac{z}{2}}$ есть ядро Фейера.

$$\begin{aligned}
\hat{Df}_T(\lambda_s) = & \frac{2\pi}{T} \sum_{k_1, k_2} \varphi_T(k_1) \varphi_T(k_2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_4(z_1 - \lambda_{s+k_1}, z_2 - \lambda_{s+k_1}, z_3 - \lambda_{s+k_2}) \times \\
& \times \Phi(z_1, z_2, z_3) dz_1 dz_2 dz_3 + \sum_{k_1, k_2} \varphi_T(k_1) \varphi_T(k_2) \times \\
& \times \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi(x - \lambda_{s+k_1}, x - \lambda_{s+k_2}) dx \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi(x - \lambda_{s+k_1}, x - \lambda_{s+k_2}) dx \right)^2 \right]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Из равенств (10) и (11) легко видеть, что они взаимосвязаны. Если мы будем уменьшать смещение, то дисперсия будет увеличиваться, а если будем уменьшать дисперсию, то смещение будет увеличиваться. Из теоремы 1 и 2 видно, что при $T \rightarrow \infty$ среднее квадратичное отклонение стремится к нулю.

З а м е ч а н и е 1. Если $x(t)$ — непрерывный случайный процесс, тогда по наблюдению $x(t)$, $t \in [0, T]$ можно построить оценку спектральной плотности, аналогичную оценке (6), только вместо сумм будут интегралы. В этом случае будут справедливы теоремы, подобные теоремам 1 и 2.

З а м е ч а н и е 2. Изложенное можно распространить и на однородные случайные поля.

Далее рассмотрим некоторые аспекты оценки спектральных плотностей высших порядков. Так как спектральная плотность n -го порядка

$$f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \text{ сосредоточена на многообразиях вида } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0 \pmod{2\pi},$$

то спектральная плотность n -го порядка будет функцией $n-1$ переменных. Действительно,

$$\begin{aligned}
f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) / \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0 \pmod{2\pi} &= f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, -\lambda_1 - \dots - \lambda_{n-1}) = \\
&= f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).
\end{aligned}$$

Заметим, что при исследовании оценок спектральных плотностей второго порядка появляются спектральные плотности 4-го порядка, о которых мы предполагаем, что они ограничены. Но важно построить удовлетворительную оценку этой плотности. Оценки спектральных плотностей высших порядков так же необходимы при проверке процессов на гауссовость (известно, что все спектральные плотности при $n > 2$ равны нулю для гауссовского случайного процесса). Кроме того, оценки старших спектральных плотностей используются во многих приложениях [4].

Как оценку спектральной плотности $f_n(\lambda_{s_1}, \dots, \lambda_{s_{n-1}})$, рассмотрим статистику

$$\hat{f}_n(\lambda_{s_1}, \dots, \lambda_{s_{n-1}}) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \varphi_n^T(k_1, \dots, k_{n-1}) I_n(\lambda_{s_1+k_1}, \dots, \lambda_{s_{n-1}+k_{n-1}}), \quad (12)$$

где $\lambda_{s_j} = \frac{2\pi s_j}{T}$, $-\left[\frac{T}{2}\right] \leq s_j \leq \left[\frac{T}{2}\right]$, $j = \overline{1, n-1}$; функция $\varphi_n^T(k_1, \dots, k_{n-1}) \geq 0$ удовлетворяет свойствам:

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \varphi_n^T(k_1, \dots, k_{n-1}) &= 1, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \varphi_n^T(k_1, \dots, k_{n-1}) |k_1| < \infty, \\
-\left[\frac{T}{2}\right] &\leq k_i \leq \left[\frac{T}{2}\right], \quad i = \overline{1, n-1}.
\end{aligned}$$

Функция $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется периодограммой n -го порядка и задается выражением

$$I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} T} \sum_{t_1, \dots, t_{n-1}=0}^{T-1} x(t_1) \dots x(t_n) e^{-i \sum_{j=1}^n t_j \lambda_j},$$

где $\lambda_{sn} = - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{sj}$.

Для оценки спектральной плотности n -го порядка можно сформулировать теоремы, подобные теоремам для оценки спектральной плотности второго порядка [5], откуда будет следовать, что оценка (12) асимптотически несмещенная и состоятельная.

Различные вопросы исследования оценок спектральных плотностей второго и высших порядков стационарных случайных процессов и полей можно найти в монографиях [3, 6] и работах [1—5, 8—13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Журбенко И. Г.— Докл. АН СССР, 1974, т. 5, с. 214.
2. Леонов И. П., Ширяев А. Н.— Теория вероятностей и ее применение, 1959, т. 4, вып. 3, с. 324.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М., 1976.
4. Brillinger D. An introduction to polyspectra.— Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 1351.
5. Журбенко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, вып. 1, с. 65.
6. Хеннан Э. Многомерные временные ряды.— М., 1974.
7. Журбенко И. Г.— Украинский матем. сб., 1978, № 2.
8. Ибрагимов И. А.— Теория вероятностей и ее применение, 1963, т. 14, вып. 4, с. 319.
9. Алексеев В. Г.— Теория вероятностей и ее применение, 1973, т. 18, вып. 2, с. 280.
10. Бенткус Р.— Литовский матем. сб., 1972, т. 12, вып. 1, с. 55.
11. Бенткус Р., Рудзкис Р., Сушинскас Ю.— Литовский матем. сб., 1974, т. 14, вып. 3.
12. Труш Н. Н. Исследование оценок спектральных плотностей однородных случайных полей. Деп. в ВИНТИ, № 1572-78 от 11.05.78.
13. Brillinger P. Asymptotic theory of estimates of k -th spectra.— Advanced Seminar on spectral analysis of time series (ed. B. Harris).— New-York, 1965, p. 153.

Поступила в редакцию
16.10.79.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 62—50

В. Л. МЕРЕЖА

К УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$z(t) = Hx(t), \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \quad -h \leq \tau < 0, \quad x(0) = x^0. \quad (3)$$

Здесь $x, x^0 \in R^n$; $z \in R^m$; $u \in R^r$; A, A_1, B, H — постоянные матрицы соответствующих размеров; h — постоянное запаздывание; $\varphi(\tau), \tau \in [-h, 0]$ — кусочно-непрерывная n -вектор-функция.

Определение. Система (1), (2) называется полностью управляемой, если для любого начального состояния (3) существуют момент $t_1, t_1 < +\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t), t > 0, u(t) \equiv 0, t \geq t_1$, такие, что для соответствующего решения системы (1) выполняется соотношение $z(t) \equiv 0, t \geq t_1$.

Обозначим $\Delta(\lambda) = [\lambda E_n - A - A_1 \exp(-\lambda h)]$. Будем рассматривать только случай, когда уравнение $\det \Delta(\lambda) = 0$ имеет конечное число нулей λ_i