

Л. Д. ЕРОВЕНКО

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ УЛУЧШЕНИЯ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + Bu(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t) = \Phi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad (2)$$

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — n -вектор; $u = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ — r -вектор; $\tau > 0$ — число, характеризующее запаздывание; A, A_1, B — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Задан функционал качества

$$I(u) = \varphi(x(T)) \quad (3)$$

на траекториях $x(t)$, $t \in [t_0, T]$, порожденных начальным условием (2) и допустимыми управлениями из класса r -векторных кусочно-непрерывных функций со значениями из U . На траекторию $x(t)$ наложено ограничение

$$g(x(T)) \leq 0. \quad (4)$$

Будем предполагать, что функции $\varphi(x)$, $g(x)$ и $\Phi(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 6.5 из [1].

Требуется среди допустимых управлений выбрать такое, которое минимизирует функционал (3). Необходимые и достаточные условия оптимальности для решения этой задачи имеются в работах [2, 3].

Метод улучшения управляющей функции [1]. Пусть $u(t)$ — допустимое кусочно-гладкое управление; $x(t)$ — соответствующая ей траектория уравнения (1) — (2). Найдем решение уравнения

$$\frac{d\psi'(t)}{dt} = -\psi'(t) \cdot A - \psi'(t + \tau) \cdot A_1, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию $\psi(T) = -\partial\varphi(x(T))/\partial x$.

Построим функции

$$H(t) = H(x(t), y(t), \psi(t), u(t), t), \quad (6)$$

$$H_1(t) = H(x(t), y(t), \psi(t), \tilde{u}(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), y(t), \psi(t), u, t), \quad (6')$$

где $H(x, y, \psi, u, t) = \psi' f(x, y, u, t)$. Выберем β и положим $\sigma_1 = [\Theta_1 - \frac{\delta_1}{2}, \Theta_1 + \frac{\delta_1}{2}]$, где Θ_1 — точка максимума функции $\Delta \tilde{H}(t) = H_1(t) - H(t)$, $t \in [t_0, T]$, а $\delta_1 = \delta_1(\beta)$ таково, что

$$\Delta \tilde{H}(t) \geq \beta \cdot \|\tilde{u}(t) - u(t)\|, \quad t \in \sigma_1. \quad (7)$$

Всюду в дальнейшем будем обозначать $y(t) = x(t - \tau)$.

Найдем решение $\bar{\psi}(t)$ уравнения (5), удовлетворяющее условию $\bar{\psi}(T) = -\partial g(x(T))/\partial x$. По формулам (6), (7) и найденной функции $\bar{\psi}(t)$ вычислим функции $\bar{H}(t)$, $\bar{H}_1(t)$, отрезок σ_2 , точки Θ_2 , δ_2 .

Предположим сначала, что отрезки σ_1 и σ_2 не пересекаются. По найденным функциям $\tilde{u}(t)$ и $\bar{u}(t)$ строим управление

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \in \sigma_1 \cup \sigma_2, \\ \tilde{u}(t), & t \in \sigma_1, \\ \bar{u}(t), & t \in \sigma_2. \end{cases} \quad (8)$$

Если $I(u_1) < I(u)$, то в качестве начального управления берем улучшенное управление $u_1(t)$. Если на каком-то шаге $I(u_1) > I(u)$, то возвращаемся к предыдущему управлению $u(t)$, уменьшая параметр β вдвое и повторяем процесс улучшения сначала.

В случае, когда отрезки σ_1 и σ_2 пересекаются, строим управление следующим образом:

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \in \sigma_1 \cup \sigma_2, \\ \tilde{u}(t), & t \in \sigma_1, \\ \bar{u}(t), & t \in \sigma_2 \setminus \sigma_1 \cap \sigma_2. \end{cases} \quad (9)$$

Если условие $g(x_1(T)) \leq \varepsilon_1$ не выполняется, строим управление

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \in \sigma_1 \cup \sigma_2, \\ \tilde{u}(t), & t \in \sigma_1 \setminus \sigma_1 \cap \sigma_2, \\ \bar{u}(t), & t \in \sigma_2 \end{cases} \quad (10)$$

Процесс итераций заканчиваем, когда выполняются условия

$$g(x_1(T)) \leq \varepsilon_1, \quad |I(u_1) - I(u)| < \varepsilon_2, \quad (11)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — заданные точности, либо параметр β достаточно мал, и дальнейшее его уменьшение не приводит к уменьшению функционала I .

Алгоритм численного решения.

Выберем на отрезке $[t_0, T]$ систему интервалов (t_{i+1}, t_i) следующим образом: $h = \tau/L$, где τ — запаздывание; L — заданное целое число; $t_{i+1} = t_i + h$, $i = 1, 2, \dots, n_s - 1$, $t_{n_s} = T$. Процесс решения состоит из отдельных итераций последовательного улучшения значений управления, k -ая итерация заключается в следующем ($k = 1, 2, \dots$).

1. Интегрируем уравнение (1) с начальным условием (2) от t_0 до T по модифицированной формуле Адамса [4] с заданным шагом h .

Формируем таблицу значений $x^{(k)}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_s$ и вычисляем $\partial \Phi(x^{(k)}(T))/\partial x$, $\partial g(x^{(k)}(T))/\partial x$.

2. Интегрируем «справа налево» сопряженную систему (5) с граничным условием $\psi(T) = -\partial \Phi(x^{(k)}(T))/\partial x$ по методу Эйлера и формируем таблицу значений $\psi(t_i)$.

3. По формулам (6) вычисляем функции $H(t_i)$ и $H_1(t_i)$. Определяем управление $\bar{u}^{(k)}(t_i)$.

4. Находим точку максимума t_{k_s} функции $\Delta \bar{H}(t_i) = H_1(t_i) - H(t_i)$ и выбираем величину δ_1 из условия $\Delta \bar{H}(t_i) \geq \beta \|B(\bar{u}^{(k)}(t_i) - u^{(k)}(t_i))\|$, $t_i \in \sigma_1 = [t_{k_s} - \frac{\delta_1}{2}, t_{k_s} + \frac{\delta_1}{2}]$, по заданному параметру β .

5. Возвращаемся к блоку 2 и решаем сопряженную систему (5) с граничным условием $\bar{\psi}(T) = -\partial g(x^{(k)}(T))/\partial x$. Вычисляем функции $\bar{\psi}(t_i)$, $\bar{H}(t_i)$, $\bar{H}_1(t_i)$, $\Delta \bar{H}(t_i)$, $\bar{u}^{(k)}(t_i)$ и находим t_{k_m} , δ_2 , σ_2 , затем после блока 4 переходим к блоку 6.

6. В зависимости от того, пересекаются отрезки σ_1 и σ_2 или нет, по найденным управлениям $\bar{u}^{(k)}(t_i)$, $\bar{u}^{(k)}(t_i)$ строим управление $u^{(k+1)}(t_i)$, используя одну из формул (8), (9), (10).

7. Интегрируем исходную систему (1) с управлением $u^{(k+1)}(t_i)$ и определяем траекторию $x^{(k+1)}(t_i)$. По формулам (11) проводим анализ на точность полученного решения. В случае необходимости повторяем процесс, начиная с блока 2. Если от итерации к итерации значение функционала I не убывает, параметр β уменьшается вдвое.

Изложенный алгоритм решения задачи (1)–(4) реализован в виде стандартной программы на языке Фортран для ЕС ЭВМ.

Пример. Рассмотрим вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы под действием внешней силы, меняющейся по гармоническому закону [5]. Уравнение вынужденных колебаний такой системы имеет вид

$$\ddot{z}(t) = -p^2 z(t) + \gamma p^2 z(t-\tau) + h_1 \sin \omega t,$$

где $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$; m — масса; c — жесткость; γ — коэффициент внутреннего трения; ω — частота колебаний. Введя обозначения $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = \dot{z}(t)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -p^2 x_1(t) + \gamma p^2 x_1(t-\tau) + h_1 \sin \omega t. \end{cases} \quad (12)$$

Задача решалась при значениях $m=0,2$, $c=1$, $h_1=2$, $\gamma=0,01$, $0 \leq t \leq 1$. Начальные условия имеют вид $x_1(t)=2$, $x_2(t)=0$, $t \in [-\tau, 0]$. Требуется определить управление $u(t)$ на отрезке $[0, 1]$, которое минимизирует функционал

$$I(u) = -x_1^2(T) \quad (13)$$

при ограничениях на траекторию

$$g(x(T)) = x_2(T) - 3 \leq 0.$$

В качестве начального управления возьмем управление $u^{(0)}(t) = \sin 2t$.

Тогда $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \sim 0,785$. Число интервалов $n_s = 14$, шаг интегрирования

$h = \frac{\tau}{10} = 0,0785$, $\epsilon_1 = 0,01$, $\epsilon_2 = 0,5$. Результаты вычислений приводятся в таблице, где i — номер итерации; I — значение функционала на $x^{(i)}(T)$, $u^{(i)}(t)$ — управление. Начальному приближению $u^{(0)}(t)$ отвечает значение $I = -0,5468$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. — М., 1971.
2. Габасов Р., Чуракова С. В. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 1, с. 29.
2. Габасов Р., Чуракова С. В. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 2, с. 29.
4. Зверкина Т. С. — Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 1962, с. 1.
5. Альтшуль Б. А. — Труды Московского ин-та инженеров железнодорожного транспорта, 1964, с. 193.

Поступила в редакцию
10.10.79.

Вычислительный центр