$$+ b_{ij}^{(2)} (\xi_{ij}(\omega,\ \omega_0) - c_{ij}(\omega)). \qquad (11)$$

Из (11) следуют требуемые утверждения. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М., 1967.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.—М., 1967.
3. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц.— Киев, 1972.
4. Феденя М. М. О чувствительности квазихарактеристических чисел и действительных компонент характеристических чисел, № 2466-78. Деп. от 20.07.78.
5. Crossley T., Porter B.— Int. J. Contr., 1969, № 2, p. 10.

Поступила в редакцию 06.04.79.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.925.12

Н. В. ПЫЖКОВА

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗОХРОННОСТИ ЦЕНТРА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3.$$

Замена переменных [1] $y = (1 - Ax - Kx^2) Y [1 + (B + Lx) Y]^{-1}$ преобразует (1) к системе (y не меняем на Y)

$$\frac{dx}{dt} = (1 - Ax - Kx^2)\, y\, [1 + (B + Lx)\, y]^{-1}, \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = [-x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\, y^2 + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4)\, y^3]\, [1 + (B + Lx)\, y]^{-1},$$

где $a_0 = A + C$, $a_1 = 3B^2 - AC + 2K + M$,
$a_2 = 6BL - CK - AM$, $a_3 = 3L^2 - KM$,
$b_0 = AB + BC + L + N$, $b_1 = 2B^3 - ABC + 2BK + CL + BM - 2AN$, (3)
$b_2 = 6B^2L - ACL - ABM - BCK + KL + LM + A^2N - 2KN$,
$b_3 = 6BL^2 - CKL - BKM - ALM + 2AKN$, $b_4 = 2L^3 - KLM + K^2N$.

Будем считать в (2) $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ любыми действительными числами. Одним из достаточных условий центра для такой системы является $b_i = 0$, $(i = \overline{0, 4})$.

Пусть эти условия выполнены. Тогда система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - Ax - Kx^2)\, y\, [1 + (B + Lx)\, y]^{-1}, \\ \frac{dy}{dt} &= [-x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\, y^2]\, [1 + (B + Lx)\, y]^{-1} \end{aligned} \qquad (4)$$

имеет в $O(0,\ 0)$ центр.

Так как система (4) эквихронна системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - Ax - Kx^2)\, y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\, y^2, \end{aligned} \qquad (5)$$

то условия изохронности для (4) и (5) будут совпадать.

Непосредственные вычисления (например, по методу работы [2]) дают следующие три первые необходимые условия изохронности для (5), а следовательно, и для (4), в предположении, что a_i — любые действительные числа:

$$(A+a_0)(A+4a_0)+3(K+a_1)=0,$$
$$a_0(A+a_0)(A+4a_0)(A+7a_0)-3a_2(A+10a_0)-3a_0a_1(A+a_0)-9a_3=0,$$
$$(A+a_0)(A+4a_0)(A^4+85A^3a_0+1374A^2a_0^2+1795Aa_0^3-31895a_0^4)+ \qquad (6)$$
$$+9a_1(2A^4+52A^3a_0+453A^2a_0^2+3818Aa_0^3+3417a_0^4)+81a_1^2(A+a_0)^2-$$
$$-18a_2(8A^3+45A^2a_0-168Aa_0^2-6955a_0^3)-486Aa_1a_2-10206a_0a_1a_2-$$
$$-1701a_2^2=0.$$

Дальше будем рассматривать проблему изохронности для системы (1). Используя (6) и (3), два первых необходимых условия изохронности для (1) при условии, что в (3) $b_i=0$, $(i=\overline{0,4})$, получаем в виде

$$2(5A^2+5AC+2C^2)+9B^2+9K+3M=0,$$
$$54(11ABL+10CBL)-9(7A^2M+2ACM-5MC^2)- \qquad (7)$$
$$-2(385A^3C+402A^2C^2+181AC^3+140A^4+26C^4)+$$
$$+9(14AB^2C+11B^2C^2+2A^2B^2)+81L^2+27B^2M+9M^2=0.$$

Как показано в работе [1], решениями системы $b_i=0$, $(i=\overline{0,4})$, где b_i определяются по формулам (3), являются:

$$1.\ A=-\frac{2(BC+N)}{B}-\frac{(BC+N)^3}{2B^5},\ K=-\frac{(BC+N)^2}{B^2}-\frac{(BC+N)^4}{2B^6},$$
$$L=BC+N+\frac{(BC+N)^3}{2B^4},\ M=-2B^2-\frac{N(BC+N)}{B^2}-\frac{(BC+N)^2}{B^2},\ B\neq 0; \qquad (8)$$

$$2.\ B^2=-\frac{4A^3+3A^2C\mp 2A(A+C)\sqrt{-A(A+C)}}{10A+8C},\ K=-\frac{A^2(A+C)}{5A+4C},$$
$$L=-\frac{A(3A+2C)(A+C)\mp A(A+C)\sqrt{-A(A+C)}}{(5A+4C)(2A+C)}B, \qquad (9)$$
$$M=-\frac{A(A+C)(A+2C)\pm 3A(A+C)\sqrt{-A(A+C)}}{5A+4C},$$
$$N=-\frac{(A+C)^2(7A+4C)\pm A(A+C)\sqrt{-A(A+C)}}{(5A+4C)(2A+C)}B,$$
$$(5A+4C)(2A+C)\neq 0;$$

$$3.\ B=0,\ M=0,\ C=-2A,\ K=-\frac{1}{3}A^2,\ L=\mp\frac{1}{3\sqrt{2}}A^2,$$
$$N=\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}A^2; \qquad (10)$$

4. $B=0,\ L=0,\ N=0.$ (11)

Кроме того, очевидно, что решениями системы являются

$$A=C=L=N=M=0,\ K=-B^2; \qquad (12)$$
$$A=C=L=N=K=0,\ M=-2B^2. \qquad (13)$$

Отметим, что условия (12), (13) — частные случаи (18) из [1].

Рассматривая случай центра (10) с использованием (7) легко убеждаемся в том, что $O(0,\ 0)$ — изохронный центр для (1) лишь при $A=0$.

Пусть теперь выполняется случай центра (9). Тогда условия изохронности (7) принимают вид:

$$(5A+4C)(8A^2+17AC+8C^2)=0,$$
$$214300A^9+1445880A^8C+4253427A^7C^2+7152555A^6C^3+$$
$$+7564584A^5C^4+5206041A^4C^5+2324052A^3C^6+646032A^2C^7+$$
$$+100800AC^8+6656C^9=\mp\sqrt{-A(A+C)}(45000A^8+ \qquad (14)$$
$$+79020A^7C+98928A^6C^2+129213A^5C^3+99297A^4C^4+$$
$$+44928A^3C^5+11088A^2C^6+1152AC^7),$$
$$(5A+4C)(2A+C)\neq 0.$$

Проведя исследование системы (14) убеждаемся в том, что она несовместна, а значит, $O(0,\ 0)$ при выполнении (9) неизохронный центр для (1).

Рассматривая случай центра (8) и полагая при этом $\lambda = BC + N$, первое условие изохронности из (7) получаем в виде

$$8B^2N^2 + (18\lambda B^8 + 10\lambda^3 B^4)N + (21\lambda^4 B^4 + 5\lambda^6 + 24\lambda^2 B^8 + 6B^{12}) = 0. \qquad (15)$$

Так как относительно N квадратное уравнение (15) не имеет действительных корней, в случае (8) центр неизохронен; заметим, что (8) рассматривался также в [3].

Рассмотрим теперь случай центра (12). Соответствующая система (5) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y + B^2 x^2 y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + B^2 xy^2. \qquad (16)$$

Воспользовавшись [4], замечаем, что $O(0,\ 0)$ системы (16) является изохронным центром, а значит, и $O(0,\ 0)$ системы (1) в (12) также представляет изохронный центр.

Изохронность центра в (12) рассматривалась в [3], однако заключение о его изохронности в этой работе является неверным. Впервые проблема изохронности центра в случае (12) разрешена в [5].

Из (7) заключаем, что в (13) начало координат является изохронным центром, лишь тогда, когда система (1) вырождается в линейную.

Переходим теперь к случаю (11). Первые три необходимые условия изохронности имеют вид

$$2(5A^2 + 5AC + 2C^2) + 9K + 3M = 0. \qquad (17)$$

$$9(7A^2M + 2ACM - 5MC^2) + 2(385A^3C + 402A^2C^2 + \\ + 181AC^3 + 140A^4 + 26C^4) - 9M^2 = 0. \qquad (18)$$

$$439640A^6 + 2138018A^5C + 4316828A^4C^2 + 4608522A^3C^3 + \\ + 2716232A^2C^4 + 821432AC^5 + 95516C^6 + 128274A^4M + \\ + 310716A^3CM + 184005A^2C^2M - 53046AC^3M - 52941C^4M - \\ - 1899A^2M^2 - 3384ACM^2 + 1314C^2M^2 = 0. \qquad (19)$$

Составляя для (18), (19) результант относительно M [6, 7] и приравнивая его к нулю, необходимое условие изохронности получаем в виде

$$19908799500A^{12} + 306700120153A^{11}C + 1804438619266A^{10}C^2 + \\ + 5898552746273A^9C^3 + 12378207349076A^8C^4 + 17903572673618A^7C^5 + \\ + 18527752449860A^6C^6 + 13958312903450A^5C^7 + 7665482666492A^4C^8 + \qquad (20) \\ + 3017039903909A^3C^9 + 813014972986A^2C^{10} + 135050630485AC^{11} + \\ + 10424609508C^{12} = 0.$$

Рассматривая условие (20), как уравнение относительно A/C, где $C \neq 0$, с использованием [6, 8], убеждаемся в том, что условию (20) будут удовлетворять не менее четырех и не более десяти значений A/C, расположенных на $]-9,0[$, причем четыре из этих значений будут удовлетворять неравенствам:

$$-\frac{1}{2} < A/C < -\frac{1}{3}, \ -1 < \frac{A}{C} < -\frac{1}{2}, \ -2 < A/C < -1, \ -8 < A/C < -7.$$

Если $A/C \geqslant 0$ или $A/C \leqslant -9$, то $O(0,\ 0)$ в случае (11) не может быть изохронным центром для (1).

Вопрос об изохронности центра в случае (11) изучался также в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский А. П.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 9.
2. Руденок А. Е.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5.
3. Кононова О. А.— Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, № 6.
4. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев, 1976.
5. Плешкан И. И. V Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений.— Кишинев, 1979.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М., 1965.
7. Ван-дер-Варден. Современная алгебра, т. 2.— М., 1947.
8. Turowicz A. Geometria zer wielomianów.— Warszawa, 1967.

Поступила в редакцию 09.04.79.

Кафедра высшей математики и математической физики