с нормой $\|x(\cdot)\| = \max_{t \in T} \|x(t)\|$. Если D, D_1 — подмножества $C[t_0, t_1]$, то $\rho(x(\cdot), D) = \inf_{y(\cdot)\in D} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|$, $\beta(D, D_1) = \sup_{x(\cdot)\in D} \rho(x(\cdot), D_1)$. Имеют место следующие два предложения.

1. Если все решения $x(\cdot) \in B_{x_1}$ ограничены и функция M полунепрерывна снизу в точке x_1, то $\rho(x_n^0(\cdot), C) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, где C — множество абсолютных минималей в задаче Б.

2. Пусть все решения $x(\cdot) \in B_{x_1}$ ограничены для всех x_1' из некоторой окрестности точки x_1 и функция M непрерывна в точке x_1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\beta(C_{x_1'}, C_{x_1}) \leqslant \varepsilon$ для всех x_1', $\|x_1' - x_1\| \leqslant \delta$; здесь $C_{x_1'}$, C_{x_1} — множество абсолютных минималей в задаче Б с граничными условиями x_1', x_1 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Ф. М.— Изв. вузов СССР. Матем., 1958, № 4.
2. Петров Н. Н.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11.
3. Гичев Т., Розов Н. Х.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 14, № 2.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М., 1969.
5. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления.— М., 1969.
6. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.— Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 6.
7. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.— М., 1972.
8. Мордухович Б. Ш. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.— М., 1976, т. 6, с. 207.

Поступила в редакцию 06.04.79.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.926

М. М. ФЕДЕНЯ

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ КВАЗИХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ И КВАЗИМУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

1. Об экстремальном возмущении квазихарактеристического числа. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1}$$

где A — постоянная $n\times n$-матрица; x — n-вектор.

Квазихарактеристическим числом $\mu(A)$ для системы (1) назовем корень квазихарактеристического уравнения $\det[A - \mu I] = 0$, где I — $n\times n$-матрица, составленная из единиц (см., например, [3]). Предположим, что $\mu(A)$ — конечное число.

Замечание. Ненулевое характеристическое число системы $A\frac{dx}{dt} = Ix$, $\det A \neq 0$ равно $\frac{1}{\mu}$, где μ — квазихарактеристическое число матрицы A.

Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему $\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon E_{ij})x$. Здесь E_{ij} — (0,1)-матрица порядка n, единственный ненулевой элемент которой стоит на пересечении i-ой строки и j-ого столбца.

Возмущенное квазихарактеристическое число $\mu(A + \varepsilon E_{ij})$ является корнем уравнения $\det[A + \varepsilon E_{ij} - \mu I] = 0$.

Определение 1. Коэффициентом чувствительности ω_{ij} квазихарактеристического числа $\mu(A)$ называется

$$\omega_{ij} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(A+\varepsilon E_{ij}) - \mu(A)}{\varepsilon}.$$

Матрица $\Omega=[\omega_{ij}]$ порядка n называется матрицей чувствительности.

Пусть наряду с системой (1) задана система

$$\frac{dx}{dt}(A+\varepsilon B)\,x, \tag{2}$$

где $B=[b_{ij}]$ — постоянная $n\times n$-матрица, для которой

$$\|B\| = \max_{i,j}|b_{ij}| \leqslant 1.$$

Теорема 1. Если $B=[\operatorname{sgn}\omega_{ij}]$, то квазихарактеристическое число $\mu(A)$ получит в системе (2) максимальное возмущение $\|\Omega\|_1 = \sum\limits_{i,j=1}^{n}|\omega_{ij}|$.

Доказательство теоремы следует из разложения, указанного в [4]:

$$\mu(A+\varepsilon B) = \mu\left(A+\varepsilon\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}E_{ij}\right) = \mu(A) + \left(\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}b_{ij}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2) =$$
$$= \mu(A) + <\Omega,\ B> \varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{3}$$

где $<\ ,\ >$ — скалярное произведение матриц.

2. О чувствительности и экстремальном возмущении квазимультипликатора.

Наряду с линейной системой

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{4}$$

будем рассматривать систему

$$\frac{dx}{dt} = (A(t)+\varepsilon E_{ij})\,x. \tag{5}$$

Здесь $A(t) = \begin{cases} A_1, & t\in\,]0,\ \omega_0[, \\ A_2, & t\in\,]\omega_0,\ \omega[, \end{cases}$

$A(t+\omega)=A(t)$; $\omega>0$; A_1, A_2 — постоянные $n\times n$-матрицы.

Пусть $X(\omega)$, $X_\varepsilon(\omega)$ — матрицы монодромии для систем (4) и (5) соответственно.

Определение 2. Квазимультипликатором $\hat\rho(X)$ для системы (4) назовем корень уравнения

$$\det[X(\omega) - \hat\rho I] = 0.$$

Возмущенный квазимультипликатор $\hat\rho(X_\varepsilon)$ для системы (5) является корнем уравнения

$$\det[X_\varepsilon(\omega) - \hat\rho I] = 0. \tag{6}$$

Определение 3. Коэффициентом чувствительности $\xi_{ij}(\omega,\ \omega_0)$ квазимультипликатора $\hat\rho(X)$ называется

$$\xi_{ij}(\omega,\ \omega_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\hat\rho(X_\varepsilon) - \hat\rho(X)}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Матрица $\Xi(\omega,\ \omega_0) = [\xi_{ij}(\omega,\ \omega_0)]$ порядка n называется матрицей чувствительности квазимультипликатора $\hat\rho(X)$.

Вычислим элементы матрицы $\Xi(\omega_1,\ \omega_0)$. Обозначим

$$D_{ij}(\omega,\ \omega_0) = \exp(A_2(\omega-\omega_0))\Big(\Big(\int_0^{\omega-\omega_0}\exp(-A_2\tau)\,E_{ij}\exp(A_2\tau)\,d\tau\Big)\times$$
$$\exp(A_1\omega_0) + \exp(A_1\omega_0)\int_0^{\omega_0}\exp(-A_1\tau)\,E_{ij}\exp(A_1\tau)\,d\tau\Big).$$

Переписав (6) в виде

$$\det [X(\omega) + \varepsilon D_{ij}(\omega, \omega_0) - (\rho - o(\varepsilon)) I] = 0,$$

учитывая (7) и (3), получим разложение для возмущенного квазимультипликатора:

$$\hat{\rho}(X_\varepsilon) = \hat{\rho}(X) + < \Omega_{[X(\omega)]}, D_{ij}(\omega, \omega_0) > \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Здесь $\Omega_{[X(\omega)]}$ — матрица чувствительности для квазихарактеристического числа матрицы монодромии $X(\omega)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Матрица чувствительности $\Xi(\omega, \omega_0)$ квазимультипликатора $\hat{\rho}(X)$ имеет вид:

$$\Xi(\omega, \omega_0) = [< \Omega_{[X(\omega)]}, D_{ij}(\omega, \omega_0)].$$

Пусть наряду с системой (4) заданы системы:

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + \varepsilon B) x, \tag{8}$$

где $\| B \| = \max\limits_{i,j} | b_{ij} | \leqslant 1$

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + \varepsilon B(t)) x, \tag{9}$$

где $B(t) = \begin{cases} B_1, & t \in]0, \omega_0[, \\ B_2, & t \in]\omega_0, \omega[, \end{cases}$

$B(t + \omega) = B(t)$; $\omega > 0$; B_1, B_2 — постоянные $n \times n$-матрицы, причем $\| B_1 \| = \max\limits_{i,j} | b_{ij}^{(1)} | \leqslant 1$, $\| B_2 \| = \max\limits_{i,j} | b_{ij}^{(2)} | \leqslant 1$.

Теорема 3. Если $B = [\operatorname{sgn} \xi_{ij}(\omega, \omega_0)]$, то квазимультипликатор $\hat{\rho}(X)$ получит в системе (8) максимальное возмущение, равное $\| \Xi(\omega, \omega_0) \|_1$.

Обозначим $\quad c_{ij}(\omega) = < \Omega_{[X(\omega)]}, \quad X(\omega) F_{ij} >; \quad C(\omega) = [c_{ij}(\omega)];$

$$F_{ij} = \int_0^{\omega_0} \exp(-A_1 \tau) E_{ij} \exp(A_1 \tau) \, d\tau.$$

Теорема 4. Если $B_1 = [b_{ij}^{(1)}] = [\operatorname{sgn} c_{ij}(\omega)], B_2 = [b_{ij}^{(2)}] = [\operatorname{sgn}(\xi_{ij}(\omega, \omega_0) - c_{ij}(\omega))]$,

то квазимультипликатор $\hat{\rho}(X)$ получит в системе (9) максимальное возмущение, равное $\| C(\omega) \|_1 + \| \Xi(\omega, \omega_0) - C(\omega) \|_1$.

Доказательство. Для возмущенного квазимультипликатора имеем

$$\hat{\rho}(\hat{X}_\varepsilon) = \hat{\rho}(X) + < \Omega_{[X(\omega)]}, \quad \hat{D}(\omega, \omega_0) > \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где $\hat{X}_\varepsilon(\omega) = \exp((A_2 + \varepsilon B_2)(\omega - \omega_0)) \exp(A_1 + \varepsilon B_1) \omega_0)$.

Легко показать, что

$$\hat{D}(\omega, \omega_0) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(1)} X(\omega) F_{ij} + b_{ij}^{(2)} (D_{ij}(\omega, \omega_0) - X(\omega) F_{ij}). \tag{10}$$

Учитывая (10), получим:

$$< \Omega_{[X(\omega)]}, \hat{D}(\omega, \omega_0) > = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(1)} < \Omega_{[X(\omega)]}, X(\omega) F_{ij} > + b_{ij}^{(2)} (< \Omega_{[X(\omega)]},$$

$$D_{ij}(\omega, \omega_0) > - (< \Omega_{[X(\omega)]}, X(\omega) F_{ij} >)) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(1)} c_{ij}(\omega) +$$

$$+ b_{ij}^{(2)} (\xi_{ij}(\omega, \omega_0) - c_{ij}(\omega)). \quad (11)$$

Из (11) следуют требуемые утверждения. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М., 1967.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.—М., 1967.
3. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц.—Киев, 1972.
4. Феденя М. М. О чувствительности квазихарактеристических чисел и действительных компонент характеристических чисел, № 2466-78. Деп. от 20.07.78.
5. Crossley T., Porter B.—Int. J. Contr., 1969, № 2, p. 10.

Поступила в редакцию 06.04.79.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.925.12

Н. В. ПЫЖКОВА

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗОХРОННОСТИ ЦЕНТРА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3.$$

Замена переменных [1] $y = (1 - Ax - Kx^2) Y [1 + (B + Lx) Y]^{-1}$ преобразует (1) к системе (y не меняем на Y)

$$\frac{dx}{dt} = (1 - Ax - Kx^2) y [1 + (B + Lx) y]^{-1}, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = [-x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) y^2 + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4) y^3] [1 + (B + Lx) y]^{-1},$$

где $a_0 = A + C$, $a_1 = 3B^2 - AC + 2K + M$,
$a_2 = 6BL - CK - AM$, $a_3 = 3L^2 - KM$,
$b_0 = AB + BC + L + N$, $b_1 = 2B^3 - ABC + 2BK + CL + BM - 2AN$, (3)
$b_2 = 6B^2L - ACL - ABM - BCK + KL + LM + A^2N - 2KN$,
$b_3 = 6BL^2 - CKL - BKM - ALM + 2AKN$, $b_4 = 2L^3 - KLM + K^2N$.

Будем считать в (2) a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 любыми действительными числами. Одним из достаточных условий центра для такой системы является $b_i = 0$, $(i = \overline{0, 4})$.

Пусть эти условия выполнены. Тогда система

$$\frac{dx}{dt} = (1 - Ax - Kx^2) y [1 + (B + Lx) y]^{-1},$$
$$\frac{dy}{dt} = [-x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) y^2] [1 + (B + Lx) y]^{-1} \quad (4)$$

имеет в $O(0, 0)$ центр.

Так как система (4) эквихронна системе

$$\frac{dx}{dt} = (1 - Ax - Kx^2) y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) y^2, \quad (5)$$

то условия изохронности для (4) и (5) будут совпадать.

Непосредственные вычисления (например, по методу работы [2]) дают следующие три первые необходимые условия изохронности для (5),