Получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Общее решение $\Phi(z)$ задачи (1) в классе $B^{m_1,m_2}(D)$ имеет вид $\Phi(z)=(\tilde{x}_1(z)\psi_1(z), \tilde{x}_2(z)\psi_2(z)$, где вектор $(\tilde{x}_1(z), \tilde{x}_2(z))$ определяется формулой (9), а $(\psi_1(z), \psi_2(z))$—общее решение задачи (10) в классе $B(D)$, которое строится по формулам (3), (2) и (6).

З а м е ч а н и е. Случай, когда дуга L простирается в бесконечность, конформным отображением сводится к рассмотренному выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1963.
2. Ч е р е п а н о в Г. П.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Ч е р е п а н о в Г. П.— Докл. АН СССР, 1962, № 3, с. 147.
4. Г о в о р о в Н. В., К у з н е ц о в Н. К. Теория функций, функциональный анализ и их приложения.— Харьков, 1974.
5. К у з н е ц о в Н. К.— Изв. вузов СССР. Матем., 1977, № 11.

Поступила в редакцию 22.03.79.

Кафедра теории функций

УДК 517.966

А. А. ЛЕВАКОВ

ЗАВИСИМОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

Задача А. Найти $M=\inf\limits_{x(\cdot)\in B_{x_1}}\int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))\,dt$, где B_{x_1} — множество решений задачи

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)), \tag{1}$$

$$u(t)\in U, \tag{2}$$

удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0)=x_0$; $x(t_1)=x_1$, x_0, $x_1\in R^n$. В задаче А моменты времени t_0, t_1 фиксированы, t_0, $t_1\in R$; U — компакт в R^m; $f_0: T=[t_0, t_1]\times R^n\times U\to R$, $f: T\times R^n\times U\to R^n$ — непрерывные функции, кроме того, функция f имеет непрерывное частное производное отображение $\frac{\partial f}{\partial x}$, x_0 — фиксированная точка. Под решением задачи (1), (2) понимаем абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot): T\to R^n$, удовлетворяющую почти при всех $t\in T$ вместе с измеримой функцией $u(\cdot): T\to U$ соотношениям (1), (2). Оптимальное значение критерия качества M в задаче А зависит от x_1, т. е. $M=M(x_1)$. Целью данной заметки является исследование зависимости функции M от граничного условия x_1.

Впервые подобные исследования для некоторых задач оптимального управления были проведены в [1]. Последние результаты в этом направлении имеются в работах [2, 3]. В задачах оптимального управления, рассматриваемых в [2], момент времени t_1 не фиксирован, $f_0>0$, а в задачах работы [3] $u\in R^m$, $f_0=\|u\|$. В задаче А данной заметки f_0 — произвольная непрерывная функция, моменты времени t_0, t_1 фиксированы; U — компакт. Указанные особенности задачи А не позволяют использовать известные методы для исследования зависимости функции M от граничных условий.

Предположим, что множество B_{x_1} непусто. Пусть $x_0(\cdot)$ — абсолютная минималь в задаче A, а $u^0(\cdot)$ — соответствующее управление. Будем говорить, что $x^0(\cdot)$ удовлетворяет условию 1), если для любой абсолютно непрерывной функции $\psi(\cdot):T\to R^n$, $\psi(t)\not\equiv 0$, удовлетворяющей почти при всех $t\in T$ соотношению

$$\dot\psi(t)=-\left(\frac{\partial f(t,\ x^0(t),\ u^0(t))}{\partial x}\right)^T\psi(t),$$

существует множество ненулевой меры $E\subset T$ такое, что

$$\psi^T(t)f(t,\ x^0(t),\ u^0(t))\neq\max_{u\in U}\psi^T(t)f(t,\ x^0(t),\ u)$$

при всех $t\in E$ (T — знак транспонирования).

Теорема 1. Если существует абсолютная минималь $x^0(\cdot)$ в задаче А, удовлетворяющая условию 1), то функция M полунепрерывна сверху в точке x_1.

Доказательство. Используя игольчатые вариации $u^*(\cdot)$ [4, с. 97] управления $u^0(\cdot)$, аналогично тому, как это сделано в [4, с. 105], можно построить конус достижимости K_{t_1}, который должен совпадать со всем пространством X_{t_1} [4, с. 94]. В противном случае минималь $x^0(\cdot)$ не удовлетворяла бы условию 1) (см. [5, с. 232]). Последнее условие, как нетрудно проверить, обеспечивает существование окрестности точки X_1, в каждую точку которой можно попасть из точки x_0 за время t_1-t_0 вдоль решения задачи (1), (2) с помощью некоторого варьированного управления $u^*(\cdot)$. Отсюда и из непрерывности функции f_0 следует полунепрерывность сверху функции M в точке x_1.

Замечания. 1. Пусть G — множество точек, в которые можно попасть за время t_1-t_0 из точки x_0 вдоль решений задачи (1), (2). Будем считать, что $M=+\infty$, если множество B_{x_1} пусто. Ясно, что для полунепрерывности сверху функции M в точке x_1 необходимо, чтобы точка x_1 была внутренней точкой множества G. Однако, как показывает следующий пример, это условие не является достаточным:

$$\begin{cases}\dot x_1=-u^2(t)f(x_2(t)), & x_1(0)=0, \quad x_1(1)=1, \quad |u(t)|\leqslant 1,\\ \dot x_2=v(t), & x_2(0)=0, \quad x_2(0)=0, \quad |v(t)|\leqslant 10,\end{cases}$$

$$f(x_2)=\begin{cases}1, & \text{если } x_2>-1,\\ (x_2+1)^2+1, & \text{если } x_2\leqslant -1,\end{cases}\qquad M=\inf_{x(\cdot)\in B_{x_1}}\int_0^1|x_2(t)|\,dt.$$

В этой задаче $M(1,\ 0)=0$, $M(1+\delta,\ 0)\geqslant 1$ при всех $\delta>0$.

2. Пусть $T_*(x_1)$ — наименьшее, $T^*(x_1)$ — наибольшее время, за которое можно из точки $x_0=x(t_0)$ перейти в точку x_1 вдоль решений задачи (1), (2) (предполагается, что в задаче А $t\in[t_0,\ +\infty[$). Для выполнения условия 1) необходимо, чтобы

$$T_*(x_1)<t_1-t_0<T^*(x_1). \tag{3}$$

Если выполнено условие (3) и $f(t,\ x,\ u)=Ax+Bu$, для выполнения условия 1) необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}(B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B)=n$.

Положим при каждых $(t,\ x)\in T\times R^n$

$$f_1(t,\ x,\ y)=\inf_{\substack{u\in U\\ y=f(t,\ x,\ u)}}f_0(t,\ x,\ u),\quad V(t,\ x)=\{v\,|\,v=f(t,\ x,\ u),\ u\in U\},$$

$$\varphi(t,\ x,\ y)=\overline{\mathrm{co}}f_1(t,\ x,\ y),\ Q(t,\ x)=\mathrm{co}\,V(t,\ x),$$

при каждых $(t,\ x)$, $\mathrm{co}\,V(t,\ x)$ — выпуклая оболочка множества $V(t,\ x)$, $\overline{\mathrm{co}}f_1(t,\ x,\ y)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $f_1(t,\ x,\ y)$.

Наряду с задачей А рассмотрим задачу Б.

Задача Б. Найти $m=\inf\limits_{x(\cdot)\in\Omega_{x_1}}\int\limits_{t_0}^{t_1}\varphi(t,\ x(t),\ \dot x(t))\,dt$, где Ω_{x_1} — множество решений дифференциального включения

$$\dot x(t)\in Q(t,x(t)), \tag{4}$$

удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$. Под решением дифференциального включения (4) понимаем абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot):T\to R^n$, удовлетворяющую почти при всех $t\in T$ соотношению (4).

Теорема 2. Пусть все решения $x(\cdot)\in B_{x_1}$ ограничены, т. е. $\|x(t)\|\leqslant N$, $t\in T$, N — const, для всех $x(\cdot)\in B_{x_1}$. Тогда функция M полунепрерывна снизу в точке x_1 в том и только в том случае, когда задача А корректна по расширению, т. е. $m(x_1)=M(x_1)$.

Доказательство. Предположим, что существует последовательность $(x_{1k})\to x_1$ и число $\varkappa>0$ такое, что

$$M(x_{1k})+\varkappa\leqslant M(x_1) \tag{5}$$

для всех k.

Пусть $(x^0_{n,x_{1k}}(\cdot))$ — минимизирующая последовательность в задаче А, соответствующая граничному условию x_{1k}. Рассуждая так же, как в [7, с. 266], покажем, что из последовательности $(x_{k,x_{1k}}(\cdot))$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на T к некоторому решению $\tilde{x}(\cdot)$ из множества Ω_{x_1}. Из неравенства (5) получаем (см. [6, с. 90])

$$\int_{t_2}^{t_1}\varphi(t,\ \tilde{x},\ (t),\ \dot{\tilde{x}}(t))\,dt\leqslant M(x_1)-\varkappa. \tag{6}$$

Неравенство (6) противоречит условию $M(x_1)=m(x_1)$. Полученное противоречие показывает, что функция M полунепрерывна снизу в точке x_1.

Докажем обратное. Очевидно, $M(x_1)\geqslant m(x_1)$. Предположим, что

$$M(x_1)\geqslant m(x_1)+\gamma,\ \gamma>0. \tag{7}$$

Из полунепрерывности снизу функции M в точке x_1 и неравенства (7) следует существование постоянной $\delta>0$ такой, что

$$M(x_1')\geqslant m(x_1)+\frac{\gamma}{2} \tag{8}$$

для всех x_1', $\|x_1'-x_1\|\leqslant\delta$.

Согласно теореме 2.5 [6] существуют решение $\bar{x}(\cdot)\in B_{\bar{x}_1}$, $\|\bar{x}_1-x_1\|\leqslant\delta$, и соответствующее управление $\bar{u}(\cdot)$ такие, что

$$M(\bar{x}_1)\leqslant\int_{t_0}^{t_1}f_0(t,\ \bar{x}(t),\ \bar{u}(t))\,dt\leqslant m(x_1)+\frac{\gamma}{4}. \tag{9}$$

Неравенство (9) противоречит неравенству (8). Теорема доказана.

3. Условие $M(x_1)=m(x_1)$, хотя и является достаточным для полунепрерывности снизу функции M, однако не обеспечивает непрерывности (см. пример, приведенный в замечании 1). Следующий пример показывает, что и условия теоремы 1 не влекут непрерывности функции:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=u(t), & x_1(0)=0, \quad x_1(10)=0,\\ \dot{x}_2(t)=x_1^2(t)-x_1^4(t), & x_2(0)=0 \quad x_2(10)=0, \quad 1\leqslant|u(t)|\leqslant 2,\end{cases}$$

$$M=\inf_{x(\cdot)\in B_{x_1}}\int_0^{10}f_0(x_1(t))\,dt,\quad f_0(x_1)=\begin{cases}|x_1|, & \text{если } |x_1|\leqslant\frac{1}{2},\\ 1-|x_1|, & \text{если } \frac{1}{2}<|x_1|\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } |x_1|>1.\end{cases}$$

Легко поверить, что $M(0,\ 0)\geqslant\frac{1}{4}$, $m(0,0)=0$. Согласно теореме 2, функция M не является полунепрерывной снизу в точке (0, 0).

4. Эффективные достаточные условия корректности по расширению задачи А приведены, например, в обзоре [8].

Пусть $(x_n^0(\cdot))$ — минимизирующая последовательность в задаче А и $C[t_0,\ t_1]$ — банахово пространство непрерывных функций $x(\cdot):[t_0,\ t_1]\to R^n$

с нормой $\| x(\cdot) \| = \max_{t \in T} \| x(t) \|$. Если D, D_1 — подмножества $C[t_0, t_1]$, то $\rho(x(\cdot), D) = \inf_{y(\cdot) \in D} \| x(\cdot) - y(\cdot) \|$, $\beta(D, D_1) = \sup_{x(\cdot) \in D} \rho(x(\cdot), D_1)$. Имеют место следующие два предложения.

1. Если все решения $x(\cdot) \in B_{x_1}$ ограничены и функция M полунепрерывна снизу в точке x_1, то $\rho(x_n^0(\cdot), C) \underset{n \to \infty}{\to} 0$, где C — множество абсолютных минималей в задаче Б.

2. Пусть все решения $x(\cdot) \in B_{x_1}$ ограничены для всех x_1' из некоторой окрестности точки x_1 и функция M непрерывна в точке x_1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\beta(C_{x_1'}, C_{x_1}) \leqslant \varepsilon$ для всех x_1', $\| x_1' - x_1 \| \leqslant \delta$; здесь $C_{x_1'}$, C_{x_1} — множество абсолютных минималей в задаче Б с граничными условиями x_1', x_1 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Ф. М.— Изв. вузов СССР. Матем., 1958, № 4.
2. Петров Н. Н.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11.
3. Гичев Т., Розов Н. Х.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 14, № 2.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М., 1969.
5. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления.— М., 1969.
6. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.— Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 6.
7. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.— М., 1972.
8. Мордухович Б. Ш. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.— М., 1976, т. 6, с. 207.

Поступила в редакцию 06.04.79.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.926

М. М. ФЕДЕНЯ

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ КВАЗИХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ И КВАЗИМУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

1. Об экстремальном возмущении квазихарактеристического числа. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица; x — n-вектор.

Квазихарактеристическим числом $\mu(A)$ для системы (1) назовем корень квазихарактеристического уравнения $\det\,[A - \mu I] = 0$, где I — $n \times n$-матрица, составленная из единиц (см., например, [3]). Предположим, что $\mu(A)$ — конечное число.

Замечание. Ненулевое характеристическое число системы $A \frac{dx}{dt} = Ix$, $\det A \neq 0$ равно $\frac{1}{\mu}$, где μ — квазихарактеристическое число матрицы A.

Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему $\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon E_{ij})x$. Здесь E_{ij} — (0,1)-матрица порядка n, единственный ненулевой элемент которой стоит на пересечении i-ой строки и j-ого столбца.

Возмущенное квазихарактеристическое число $\mu(A + \varepsilon E_{ij})$ является корнем уравнения $\det\,[A + \varepsilon E_{ij} - \mu I] = 0$.

Определение 1. Коэффициентом чувствительности ω_{ij} квазихарактеристического числа $\mu(A)$ называется