

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М., Вельбицкий И. В.—Управляющие системы и машины, 1976, № 6, с. 75.
2. Wirth N.—Computing Surveys, 1974, v. 6, № 4, p. 248.
3. Dijkstra E. W.—Communs. ACM, 1968, v. 11, № 3, p. 147.
4. Baker F. T., Mills H. D.—Datamation, 1973, v. 19, № 3, p. 58.
5. Knuth D. E.—Computing Surveys, 1974, v. 6, № 4, p. 263.
6. Дейкстра Е. В.—В кн.: Структурное программирование.—М., 1975, с. 7.
7. Иодан Э. Структурное проектирование и конструирование программ.—М., 1979.

Поступила в редакцию
20.02.79.

Кафедра общего программирования

УДК 517.544

Л. П. ПРИМАЧУК

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ НА РАЗОМКНУТОЙ ДУГЕ ДЛЯ ДВУХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи. Пусть $L=ab$ — ограниченная простая гладкая разомкнутая дуга с концами a и b . Введем следующие обозначения: $D=\bar{C}\setminus L$; $H(L)$ — класс функций, удовлетворяющих на L условию Гельдера; $B^{m_1, m_2}(D)$ — класс аналитических в D векторов $\Phi(z)=(\varphi_1, \varphi_2)$, ограниченных во всякой замкнутой области, не содержащей точек a и b , причем $\varphi_i(z)$ имеет m_i нулей в D , а $\ln(\varphi_i(z))$ в окрестности точек a и b имеет слабую особенность; $B^{0,0}(D)=B(D)$; $B^{m_1, m_2}(D)\subset B^{m_1, m_2}(D)$ — подкласс вектора из $B^{m_1, m_2}(D)$, ограниченных в D .

Требуется найти аналитический вектор $\Phi(z)=(\varphi_1(z), \varphi_2(z))\in B^{m_1, m_2}(D)$ по следующему нелинейному краевому условию на L :

$$\varphi_1^+(t)\varphi_2^-(t)=f_1(t), \quad \varphi_2^+(t)\varphi_1^-(t)=f_2(t), \quad (1)$$

где $f_i\in H(L)$ и $f_i(t)\neq 0, \forall t\in L$.

Задача (1) для одной неизвестной функции изучалась в работах [2—5].

Решение задачи (1) в классе $B(D)$. Лемма 1. Вектор

$$\begin{aligned} \Psi(z)=(\Psi_1, \Psi_2)=\exp\frac{V(\bar{z}-a)(z-b)}{4\pi i}\int_L\frac{\ln(f_1(\tau)f_2(\tau))}{V(\bar{\tau}-a)(\tau-b)}\frac{d\tau}{\tau-z}\times \\ \times\left(\exp\frac{1}{4\pi i}\int_L\ln\left(\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)}\right)\frac{d\tau}{\tau-z}, \exp\frac{-1}{4\pi i}\int_L\ln\left(\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)}\right)\frac{d\tau}{\tau-z}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

является решением задачи (1) в классе $B(D)$.

Доказательство следует из непосредственной подстановки (2) в краевое условие (1) и свойств интеграла типа Коши на разомкнутом контуре.

Лемма 2. Пусть $\Phi(z)=(\varphi_1, \varphi_2)\in B(D)$ — решение задачи (1). Тогда вектор $\left(\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_1(z)}, \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_2(z)}\right)$ удовлетворяет краевому условию (1) с $f_i(t)\equiv 1, i=1, 2$. Доказательство очевидно. Из леммы 1 и 2 следует

Лемма 3. Общее решение задачи (1) в классе $B(D)$ имеет вид

$$\Phi(z)=(\varphi_1(z)\psi_1(z), \varphi_2(z)\psi_2(z)), \quad (3)$$

где вектор $\Psi(z)=(\psi_1(z), \psi_2(z))$ определяется формулой (2), а вектор $\Phi(z)=(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ является общим решением задачи

$$\varphi_1^+(t)\varphi_2^-(t)=1, \quad \varphi_2^+(t)\varphi_1^-(t)=1. \quad (4)$$

Найдем общее решение задачи (4) в классе $B(D)$. Отметим, что векторы $(\pm 1, \pm 1)$ являются тривиальными решениями этой задачи.

Логарифмируя краевое условие (4), получаем краевую задачу Римана [1] для двух пар функций:

$$\begin{pmatrix} \ln \varphi_1^+(t) \\ \ln \varphi_2^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln \varphi_1^-(t) \\ \ln \varphi_2^-(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_1\pi i \\ 2k_2\pi i \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.

Решение задачи (5) нужно искать в классе векторов, имеющих интегрируемую особенность в точках a и b . Из решения (5) вытекает

Лемма 4. Общее решение $\tilde{\Phi}(z)$ задачи (4) в классе $B(D)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(z) = \exp \left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{c_2 z + c_3}{V(z-a)(z-b)} \right) & \left(\pm e^{c_1} \left(\frac{z-b}{z-a} \right)^{\frac{k_1 - k_2}{2}}, \right. \\ & \left. \pm e^{-c_1} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^{\frac{k_1 - k_2}{2}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$; $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, 3}$.

Теорема 1. Общее решение задачи (1) в классе $B(D)$ определяется формулой (3), где векторы $(\psi_1(z), \psi_2(z))$, $(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ можно получить соответственно по формулам (2) и (6).

Решение задачи (1) в классе $B^{m_1, m_2}(D)$. Пусть $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z)) \in B^{m_1, m_2}(D)$ — решение задачи (1), причем $\varphi_1(z_j) = 0$, где $z_j \neq \infty$, $j = \overline{1, p_1}$, а в точке $z = \infty$ $\varphi_1(z)$ имеет нуль кратности $l_1 = m_1 - p_1$ и $\varphi_2(z_k) = 0$, где $z_k \neq \infty$, $k = \overline{1, p_2}$, а в точке $z = \infty$ $\varphi_2(z)$ имеет нуль кратности $l_2 = m_2 - p_2$.

Рассмотрим вспомогательную задачу Римана

$$\begin{pmatrix} x_1^+(t) \\ x_2^-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp \left(2\pi i m_1 \frac{t-a}{b-a} \right) & 0 \\ 0 & \exp \left(2\pi i m_2 \frac{t-a}{b-a} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^-(t) \\ x_2^-(t) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Возьмем следующее решение задачи (7) [4];

$$\begin{aligned} X(z) = & \left(\frac{1}{(z-b)^{m_1}} \exp \left(\frac{m_1}{b-a} (z-a) \ln \frac{z-b}{z-a} \right), \right. \\ & \left. \frac{1}{(z-b)^{m_2}} \exp \left(\frac{m_2}{(z-b)^{m_2}} (z-a) \ln \frac{z-b}{z-a} \right) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты вектора $X(z)$ ограничены в D и не имеют нулей в конечной части плоскости, а при $z = \infty$ обращаются в нуль соответственно порядка m_1 и m_2 . Вектор

$$\tilde{X}(z) = \left(\prod_{j=1}^{p_1} (z - z_j) x_1(z), \prod_{k=1}^{p_2} (z - z_k) x_2(z) \right) \quad (9)$$

имеет те же нули и той же кратности, что и решение $\Phi(z)$ задачи (1).

Тогда вектор $\Psi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \varphi_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1(z) \\ \tilde{\varphi}_2(z) \end{pmatrix} \in B(D)$ и удовлетворяет краевому условию

$$\begin{aligned} \psi_1^+(t) \psi_2^-(t) &= \frac{f_1(t)}{\tilde{x}_1^+(t) \tilde{x}_2^-(t)}, \\ \psi_2^+(t) \psi_1^-(t) &= \frac{f_2(t)}{\tilde{x}_2^+(t) \tilde{x}_1^-(t)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Общее решение $\Phi(z)$ задачи (1) в классе $B^{m_1, m_2}(D)$ имеет вид $\Phi(z) = (\tilde{x}_1(z) \psi_1(z), \tilde{x}_2(z) \psi_2(z))$, где вектор $(\tilde{x}_1(z), \tilde{x}_2(z))$ определяется формулой (9), а $(\psi_1(z), \psi_2(z))$ — общее решение задачи (10) в классе $B(D)$, которое строится по формулам (3), (2) и (6).

З а м е ч а н и е. Случай, когда дуга L простирается в бесконечность, конформным отображением сводится к рассмотренному выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М., 1963.
2. Черепанов Г. П. — ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Черепанов Г. П. — Докл. АН СССР, 1962, № 3, с. 147.
4. Говоров Н. В., Кузнецов Н. К. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — Харьков, 1974.
5. Кузнецов Н. К. — Изв. вузов СССР. Матем., 1977, № 11.

Поступила в редакцию
22.03.79.

Кафедра теории функций

УДК 517.966

А. А. ЛЕВАНОВ

ЗАВИСИМОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

Задача А. Найти $M = \inf_{x(\cdot) \in B_{x_1}} \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t)) dt$, где B_{x_1} — множество решений задачи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad (2)$$

удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = x_0$; $x(t_1) = x_1$, $x_0, x_1 \in R^n$. В задаче А моменты времени t_0, t_1 фиксированы, $t_0, t_1 \in R$; U — компакт в R^m ; $f_0: T = [t_0, t_1] \times R^n \times U \rightarrow R$, $f: T \times R^n \times U \rightarrow R^n$ — непрерывные функции, кроме того, функция f имеет непрерывное частное производное отображение $\frac{\partial f}{\partial x}$, x_0 — фиксированная точка. Под решением задачи (1), (2) понимаем абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot): T \rightarrow R^n$, удовлетворяющую почти при всех $t \in T$ вместе с измеримой функцией $u(\cdot): T \rightarrow U$ соотношениям (1), (2). Оптимальное значение критерия качества M в задаче А зависит от x_1 , т. е. $M = M(x_1)$. Целью данной заметки является исследование зависимости функции M от граничного условия x_1 .

Впервые подобные исследования для некоторых задач оптимального управления были проведены в [1]. Последние результаты в этом направлении имеются в работах [2, 3]. В задачах оптимального управления, рассматриваемых в [2], момент времени t_1 не фиксирован, $f_0 > 0$, а в задачах работы [3] $u \in R^m$, $f_0 = \|u\|$. В задаче А данной заметки f_0 — произвольная непрерывная функция, моменты времени t_0, t_1 фиксированы; U — компакт. Указанные особенности задачи А не позволяют использовать известные методы для исследования зависимости функции M от граничных условий.

Предположим, что множество B_{x_1} непусто. Пусть $x_0(\cdot)$ — абсолютная минимальная в задаче А, а $u^0(\cdot)$ — соответствующее управление. Будем говорить, что $x^0(\cdot)$ удовлетворяет условию 1), если для любой абсолютно