

УДК 621.391.15

Г. А. АГРАНОВ, А. М. ЗАЙЦЕВА,
Л. И. КОРЕННАЯ, В. С. СОБОЛЕВИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ
СОКРАЩЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УОЛША — АДАМАРА

Поискам путей сжатия информации в последние годы уделяется все большее внимание. Это связано в первую очередь с ограниченной пропускной способностью каналов связи [1].

При передаче изображения методы сжатия основаны на сокращении избыточности, которая возникает из-за корреляции интенсивности между ближайшими точками изображения. Для сравнения различных методов сжатия необходимо выработать критерии качества, предъявляемые к восстановленному изображению. Достаточно сложный вопрос формулировки критерия качества в наиболее общем виде рассмотрен в работе [2]. Функция искажений, являющаяся количественной мерой качества, учитывает многообразные факторы, которые влияют на точность воспроизведения. Однако на пути практического использования такого подхода возникают непреодолимые пока трудности: даже приближенный вид этой функции не имеет аналитического представления.

В настоящей работе рассмотрены методы сжатия информации при кодировании изображения с помощью преобразований Уолша — Адамара* [3]. Будем считать исходное изображение заданным в виде набора сигналов F_{kl} , соответствующих яркостям каждого из дискретных элементов поля изображения:

$$F_{kl} = \int_{x_0+k\Delta}^{x_0+(k+1)\Delta} dx \int_{y_0+l\Delta}^{y_0+(l+1)\Delta} F(x, y) dy, \quad (1)$$

здесь $F(x, y)$ — функция, описывающая непрерывное изображение; $\Delta = \frac{L}{N}$ — шаг пространственной дискретизации; L — линейный размер поля изображения; N — количество элементов вдоль одной из пространственных осей; $k, l = 0, 1, 2, \dots, N-1$; x_0, y_0 — координаты начала отсчета.

Пространственно-частотные искажения, появляющиеся в результате усреднения (1), принимать во внимание не будем, считая шаг дискретизации Δ достаточно малым, а частотный спектр функции $F(x, y)$ ограниченным.

Пусть φ_{ij} — коэффициенты разложения дискретной функции F_{kl} в ряд Уолша — Адамара:

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} H_{ik} F_{kl} H_{lj}, \quad (2)$$

$$F_{kl} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} H_{ki} \varphi_{ij} H_{jl}$$

В дальнейшем при проведении расчетов будем использовать функции

* Интерес к использованию глобальных преобразований для кодирования изображения появился в связи с высокой помехоустойчивостью таких сигналов по отношению к шумам канала связи.

Уолша — Адамара H_{ik} , представленные в частотно-упорядоченном виде [4]:

$$H_{ik} = (-1)^{P(i,k)},$$

где

$$P(i, k) = \sum_{v=0}^{n-1} (i_{n-v} + i_{n-v-1})k_v + i_{n-1}k_0 \quad (3)$$

i, k_v — компоненты двоичного разложения чисел i, k : $i = \sum_{v=0}^{n-1} i_v \cdot 2^v$; $N = 2^n$.

Количественной мерой качества изображения будем считать величину средней относительной неточности восстановленного изображения:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(F_{kl} - F'_{kl})^2}{F_{kl}^2}}{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F_{kl}^2}, \quad (4)$$

здесь F'_{kl} — яркость k, l -ого элемента, восстановленная после частичного сокращения избыточности*. Относительная неточность δ^2 связана с коэффициентами ряда (2) следующим соотношением:

$$\delta^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\varphi_{ij} - \varphi'_{ij})^2}{\varphi_{ij}^2}. \quad (5)$$

Используемая нами мера качества, безусловно, очень грубая форма оценки точности восстановленного изображения. Его применение может быть оправдано тем, что целью данной работы является не построение оптимальной системы приема — передачи изображения, а лишь исследование фактора усечения, который влияет на качество полученной картины и позволяет значительно сократить объем передаваемой информации.

Начнем с исследования методов сжатия видеосигналов в предположении, что исходное изображение закодировано с помощью преобразования Уолша — Адамара (2). Простота реализации алгоритмов сжатия в этом случае связана с тем, что для частично коррелированного изображения в области преобразованного пространства происходит резкая концентрация энергии в ограниченной части плоскости координат i, j . С ростом номера элемента (i, j) происходит уменьшение энергии и, если H_{ik} представлена в частотно-упорядоченной форме, процедура сокращения избыточности сводится к исключению высокочастотных малоинформативных коэффициентов**. Чем выше степень корреляции исходного изображения, тем резче концентрируется энергия в поле трансформанты. Распределение энергии в плоскости трансформанты рассмотрено в [5, 6].

Используемый параметр качества δ^2 описывает величину, равную отношению потерянной (за счет усечения трансформанты) энергии к полной энергии, сосредоточенной в поле изображения:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=i_0+1}^{N-1} \sum_{j=g(i)+1}^{N-1} \overline{\varphi_{ij}^2}}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{ij}^2}, \quad (6)$$

где i_0 — максимальный номер элемента вдоль оси i , предназначенный для

* Искажения, связанные с шумами датчика, канала связи, с шумами квантования, принимать во внимание не будем.

** При использовании естественной формы записи матрицы H_{ik} эффект концентрации энергии также имеет место, однако закон распределения φ_{ij}^2 по плоскости i, j менее упорядочен.

передачи; $j=g(i)$ описывает линию раздела между областью отброшенных и сохраненных для передачи элементов трансформанты.

И, если исходить из критерия (6), оптимальный алгоритм усечения коэффициентов φ_{ij} должен соответствовать исключению элементов, которые лежат вдоль линий с приближенно равными амплитудами, так как в этом случае при фиксированном числе отброшенных членов потеря энергии будет минимальной. Заметим, что такой подход к сравнению различных алгоритмов сжатия довольно груб, так как предполагает, что для передачи каждого из коэффициентов трансформанты используется одинаковое количество битов.

Функция $j=g(i)$ определяется из решения уравнения

$$\overline{\varphi_{ij}^2} = \text{const}, \quad (7)$$

которое в общем случае имеет сложный вид, и его решение $j=g(i)$ очень громоздко. Для отыскания технически осуществимых алгоритмов сжатия необходимо рассмотреть приближенные решения (7) и выбрать среди них наиболее целесообразные для реализации.

В [6] получены аналитические выражения для энергии коэффициентов Уолша—Адамара $\overline{\varphi_{ij}^2}$ в предположении, что функция корреляции исходного изображения $R(k-k'; l-l') = \overline{F_{kl} F'_{kl}} - \overline{F_{kl}} \cdot \overline{F'_{kl}}$ описывается экспоненциально убывающей функцией [5]

$$R(k-k'; l-l') = R_0 e^{-\gamma(|k-k'|+|l-l'|)}. \quad (8)$$

Воспользовавшись этими результатами, рассмотрим приближенные решения уравнения (7). Энергия i, j -ого элемента:

$$\overline{\varphi_{ij}^2} = \overline{F^2} N^4 \delta_{i0} \delta_{j0} + R_0 \rho_i(\gamma) \rho_j(\gamma), \quad (9)$$

где $\rho_i(\gamma)|_{i=\gamma-v} = A_v(\gamma) + B_v(\gamma) C_v(\gamma)$; $v = 2^m$, $1 \leq m \leq n$, $1 \leq v \leq 2^{m-1}$;

$$A_v(\gamma) = N \frac{1+e^{-\gamma}}{1-e^{-\gamma}} - 4v \frac{1-e^{-\gamma \frac{N}{v}}}{(1+e^{\gamma})(1-e^{-\gamma})(1+e^{\gamma \frac{N}{v}})};$$

$$B_v(\gamma) = 2 \frac{(1-e^{-\gamma \frac{N}{v}})(1-e^{-\gamma \frac{N}{v}})}{(1-e^{\gamma})(1-e^{-\gamma})(1+e^{\gamma \frac{N}{v}})(1+e^{-\gamma \frac{N}{v}})};$$

$$C_v(\gamma) = (1-e^{-\gamma \frac{N}{v}}) v_1; \quad v = v_1 - v_2; \quad v_1 = 2^k, \quad k < m.$$

Как следует из (9), $\rho_i(\gamma)$ имеет характер спадающей ступенчато-сглаженной функции. Подставляя (9) в (6), находим:

$$\delta^2 = \frac{R_0}{R_0 + \overline{F^2}} \cdot \alpha, \quad (10)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{N^4} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=g(i)+1}^{N-1} \rho_i(\gamma) \rho_j(\gamma), \quad \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \rho_i(\gamma) \rho_j(\gamma) = 1 \right).$$

В нулевом приближении, пренебрегая элементами сглаживания внутри зоны, $\rho_i(\gamma)$ можно представить в виде

$$\rho_i(\gamma)|_{i=\gamma-v} = A_v(\gamma) + B_v(\gamma). \quad (11)$$

На рис. 1 для поля размером 31×31 представлена зависимость энергии $\overline{\varphi_{ij}^2}$ от координат i, j в приближении (11). С точки зрения энергетического критерия (6) элементы трансформанты, принадлежащие площадкам с равными амплитудами, эквивалентны и исключение коэффи-

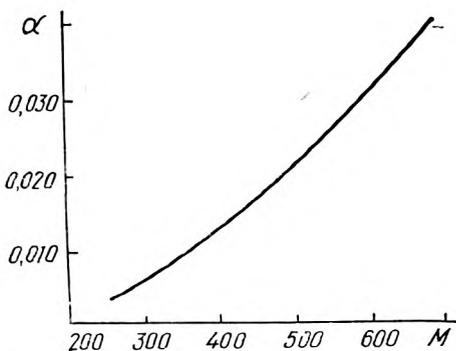
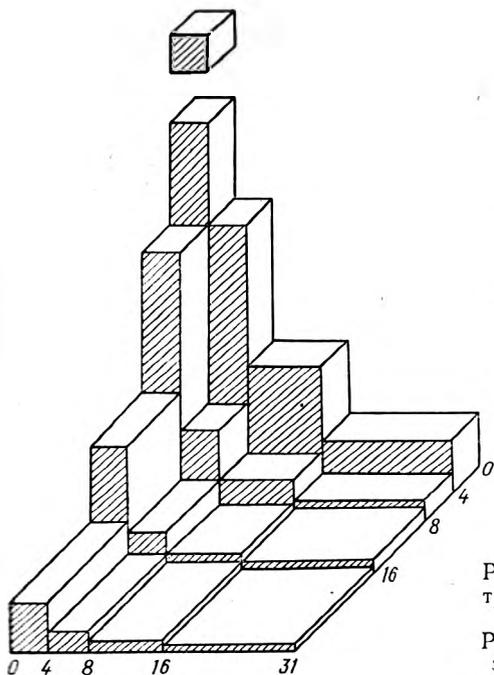


Рис. 1. Распределение энергии в плоскости трансформанты для поля размером 31×31

Рис. 2. Зависимость доли потерянной энергии от числа отброшенных членов

членов в пределах одной площадки можно производить в любой последовательности. Другими словами, при усечении трансформанты в пределах одной энергетической площадки относительная доля потерянной энергии определяется только числом отброшенных элементов и не зависит от формы зоны, исключенной из рассмотрения.

На рис. 2 показана зависимость доли потерянной энергии α от числа отброшенных членов M при оптимальном исключении коэффициентов.

Первое приближение для $\bar{\varphi}_{ij}^2$ учитывает ослабление энергии в пределах энергетических зон:

$$2^m < i < 2^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12)$$

от $v = 2^{m+1} - i$.

Как следует из (9):

$$C_v(\gamma) = (1 - e^{-\gamma \frac{N}{v_1}}) v_1, \quad (13)$$

где $v = 2^k - v_1$, $v_1 = 2^k < v$ (v_1 — остаток, который мы отбрасываем в первом приближении).

Задачу отыскания оптимального пути усечения трансформанты можно свести к нахождению двух функций: $v_i = g_1(v_j)$, $v_i = g_2(v_j)$. Первую функцию, определяющую границы зон, которые будут исключены из рассмотрения, находим из решения уравнения

$$(A_{v_i} + B_{v_i})(A_{v_j} + B_{v_j}) = \text{const}. \quad (14)$$

Так как обычно отбрасываются зоны с низкой энергией, то v величина порядка N , и в случаях, представляющих практический интерес, $\gamma \frac{N}{v} < 1$.

Уравнение (13) при этом можно упростить:

$$\frac{N\gamma}{2} \left[1 + \left(\frac{N}{v_i} \right)^2 \right] + \left(\frac{N}{v_i} \right)^2 = \frac{\text{const}}{\frac{1}{2} N\gamma \left[1 + \left(\frac{N}{v_j} \right)^2 \right] - \left(\frac{N}{v_j} \right)^2}. \quad (15)$$

Задавая const, легко определить совокупность номеров зон (v_i , v_j), подлежащих исключению.

Для анализа хода кривой усечения внутри энергетической зоны рас-

смотрим подробнее уравнение (7). В приближении $\gamma \frac{N}{v} < 1$ для функции, описывающей кривую усечения, получим уравнение

$$C_{v_i} = \frac{\text{const}}{\left(\frac{N}{v_j}\right)^2 \left\{ \left(\frac{N}{v_j}\right)^2 \left[\frac{N\gamma}{2} + C_{v_j} \right] + \frac{N\gamma}{2} \right\}} - \frac{N\gamma}{2} \left[1 + \left(\frac{v_j}{N}\right)^2 \right], \quad (16)$$

где C_{v_j} определяется (13). Если параметр $\gamma \frac{N}{v}$ мал, то из (16) легко увидеть, что кривая усечения описывается гиперболой. Однако такой тип отсечения в общем случае не может быть оптимальным. В работе [5] из анализа экспериментальных данных показано, что в случае усечения по гиперболе (внутри зоны) потери энергии больше, чем при оптимальном отсечении. Действительно, условие $\gamma \frac{N}{v} < 1$ выполняется лишь для части элементов зоны, что и приводит к наблюдавшемуся в [6] отклонению кривой от гиперболической.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кортман С.— ТИИЭР, 1967, т. 55, №№ 3, 8.
2. Будрикис Л.— В сб.: Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин.— М., 1973, с. 48.
3. Хармут Х. Ф. Передача информации ортогональными функциями.— М., 1975.
4. Трахтман А. И., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.— М., 1975.
5. Понсен О.— Зарубежная радиоэлектроника, 1972, т. 30, № 3, с. 30.
6. Агранов Н. А., Зайцева А. М., Коренная Л. Н., Соболев В. С.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3, с. 3.

Поступила в редакцию
29.01.79.

Кафедра ядерной физики

УДК 681.32

Г. П. ЛИЧКО

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ БОЛЬШИХ МАССИВОВ

Необходимость осуществления двумерного БПФ больших массивов, под которыми понимаются массивы, превышающие емкость оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) ЭВМ, возникает в различных областях обработки двумерных сигналов таких, как обработка изображений, расчет характеристик антенных систем по измерениям в ближней зоне, цифровая голография. Значительное время осуществления двумерного БПФ больших массивов при отсутствии экспериментальных оценок их быстродействия является одним из факторов, ограничивающих величину обрабатываемых массивов при использовании ЭВМ с малым и средним быстродействием и емкостью ОЗУ.

Двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) вида

$$F(i, k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[-j 2\pi \left(\frac{i \cdot m}{M} + \frac{k \cdot n}{N} \right) \right], \quad (1)$$

где $k=0, 1, \dots, N-1$; $i=0, 1, \dots, M-1$, осуществляется с помощью двух последовательных одномерных ДПФ по одной из координат, поэтому одной из основных причин значительного увеличения времени осуществления двумерного БПФ больших массивов является выбор матрицы промежуточных результатов из внешнего запоминающего устройства (ВЗУ) по столбцам при ее построчной записи в ВЗУ. Известные программы двумерного БПФ не приспособлены для работы с использованием ВЗУ.