$$\alpha_{l-1} = x_{l1}w + x_{l2}w^{\sigma} + \ldots + x_{ll}w^{\sigma^{l-1}}.$$

Выпишем приведенное представление элемента x в явном виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \ldots \alpha_{l-1} \\ a\alpha^{\sigma}_{l-1} & \alpha^{\sigma}_0 \ldots \alpha^{\sigma}_{l-2} \\ \cdots & \cdots \\ a\alpha_1^{\sigma^{l-1}} \; a\alpha_2^{\sigma^{l-1}} & \ldots \alpha_0^{\sigma^{l-1}} \end{pmatrix}$$

Отсюда вытекает, что $\mathrm{Trd}\, x = \alpha_0 + \alpha_0^{\sigma} + \ldots + \alpha_0^{\sigma^{l-1}} = \mathrm{tr}\, \alpha_0$. Теперь можно приступить к вычислению формы $\beta(x, x)$. Воспользуемся тем, что скаляры поля F переставляются с элементом δ с помощью автоморфизма σ. Тогда $\beta(x, x) = \mathrm{Trd}(x^2) = \mathrm{Trd}(\alpha_0^2 + \alpha_1\alpha^{\sigma}_{n-1}a + \alpha_2\alpha^{\sigma^2}_{n-2} + \ldots) = \mathrm{tr}(\alpha_0^2) + a\,\mathrm{tr}(\alpha_1\alpha^{\sigma}_{n-1}) + a\,\mathrm{tr}(\alpha_2\alpha^{\sigma}_{n-2}) + \ldots$

Заметим, что в последнем выражении сумма квадратичных форм является прямой, причем первое слагаемое — следовая форма расширения F/K. Более того, слагаемые вида $\mathrm{tr}(\alpha_i\alpha_j)$, а значит, и $a\,\mathrm{tr}(\alpha_i\alpha_j)$ при $i \neq j$ гиперболические, потому что уравнение $\alpha_i = 0$ задает изотропное подпространство максимальной размерности l. При нечетном l все слагаемые, кроме первого, будут слагаемыми указанного типа. В случае четного $l = 2s$ имеется, помимо первого слагаемого, еще одно априори не гиперболическое слагаемое вида $a\,\mathrm{tr}(\alpha_s\alpha_s^{\sigma^s})$. Автоморфизм $\sigma^s = \tau$ является инволюцией, поэтому это слагаемое соответствует квадратичному пространству $V_a^{\tau}(F)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра, модули, кольца, формы.— М., 1968.
2. Fröhlich A.— Math. Zeitschr., 1960, B. 74, S. 18.
3. Lam T. The Algebraic Theory of Quadratic Forms-Massachusets, 1973.
4. Maurer D.— Linear and Multilinear Algebra, 1978, v. 6, p. 33.
5. Матвеев Г. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 60.

Поступила в редакцию 02.04.81.

Кафедра высшей математики

УДК 517.532, 517.535.4

Н. В. ГОВОРОВ, И. Е. САНДРИГАЙЛО, С. В. РОГОЗИН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ С КОНТУРОМ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ЛУЧЕ

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства интеграла

$$\psi(z) = \frac{z}{2\pi i} \int_a^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau(\tau - z)}, \quad a > 0, \tag{1}$$

при $z(\in[a, +\infty)) \to \infty$, а также при $z(=t\in[a, +\infty)) \to +\infty$ в предположении, что $\varphi(t)$ в окрестности $t = +\infty$ ведет себя как степенная функция [1].

Введем в рассмотрение следующий класс функций.

Определение 1. Непрерывная на $[a, +\infty)$ функция $f(t)$ принадлежит классу $H_\rho[a, +\infty]$, если

$f(t)$ локально гельдеровская, т. е. $\forall\, t_0 \in (a, +\infty)$

$$\exists\, \delta_0 > 0,\ A_0 > 0,\ 0 < \mu_0 \leq 1 : \forall\, t_1, t_2 \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$$

$$|f(t_1) - f(t_2)| < A \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^{\mu_0}; \tag{2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lambda \neq \infty; \tag{3}$$

при некотором ρ

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\rho}{t^{\rho}} \int_a^t \frac{f(\tau)\tau^{\rho}}{\tau}\, d\tau = \lambda.$$

Если $f(t) \in \widetilde{H}_\rho[a, +\infty]$, то, вообще говоря, $f \notin H[a, +\infty]$ и $\overline{\exists} \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

Из [2, с. 194] вытекает, что, если $f \in \widetilde{H}_\rho[a, +\infty]$, то существует $\lim\limits_{t\to+\infty}^* f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty,\, t\notin E} f(t) = \lambda$, где E — множество нулевой относительной меры, т. е. $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{E \cap (0, r)}{r} = 0$.

Теорема 1. Пусть $f(t) \in \widetilde{H}_\rho[a, +\infty]$, $0 < \rho < 1$. Тогда для особого интеграла $\psi(t) = t \int\limits_a^{+\infty} \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau$ существует $\lim\limits_{t\to+\infty}^* \frac{\psi(t)}{t^\rho} = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{\psi(t)}{t^\rho} = -\pi\lambda \operatorname{ctg}\rho\pi$.

Доказательство. Рассмотрим сначала

$$I(r) = \int\limits_a^r \frac{\psi(t)}{t} dt = \int\limits_a^r dt \int\limits_a^\infty \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau. \tag{5}$$

Переставляя порядок интегрирования и интегрируя затем по частям, получим

$$I(r) = -\int\limits_a^\infty \frac{d\tau}{\tau-a} \int\limits_a^\tau \frac{f(x)x^\rho}{x} dx + \int\limits_a^\infty \frac{d\tau}{\tau-r} \int\limits_a^\tau \frac{f(x)x^\rho}{x} dx. \tag{6}$$

Заметим, что при этом интегралы в (5) и (6) существуют в смысле главного значения. По свойствам особого интеграла [3, с. 73] из (6) получим

$$\lim_{r\to\infty} \frac{I(r)}{r^\rho} = \lim_{r\to\infty} \frac{\rho}{r^\rho} \int\limits_a^r \frac{\psi(t)}{t} dt = -\pi\lambda \operatorname{ctg}\rho\pi. \tag{7}$$

Не ограничивая общности, будем считать далее, что $\lambda = 0$. Обозначим в этом случае $\psi(t)$ через $\psi_0(t)$. Запишем $\psi_0(t)$ в виде $\psi_0(t) = t \int\limits_a^{t/2} \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau + t \int\limits_{t/2}^{3t/2} \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau + t \int\limits_{3t/2}^{\infty} \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau = \sum\limits_{k=1}^{3} \psi_{0k}(t)$. Выберем $\varepsilon > 0$. Найдем $T = T(\varepsilon) > 0$:

$$f(x) < \varepsilon \text{ при } x > T, \tag{8}$$

$$\left| \rho \int\limits_a^x \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau} d\tau \right| < \varepsilon x^\rho \text{ при } x > T. \tag{9}$$

Зафиксируем теперь произвольное $t > 2T$

$$\psi_{02}(t) = -\int\limits_{t/2}^{3t/2} \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau} d\tau + \int\limits_{t/2}^{3t/2} \frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t} \tau^\rho d\tau + f(t) \int\limits_{t/2}^{3t/2} \frac{\tau^\rho - t^\rho}{\tau-t} d\tau + f(t) t^\rho \int\limits_{t/2}^{3t/2} \frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Из (9), (2) и неравенства $|\tau^\rho - t^\rho| < t^{\rho-1}|\tau-t|$ вытекает, что

$$\psi_{02}(t) < A_2 \varepsilon \cdot t^\rho. \tag{10}$$

$$\psi_{01}(t) = -2 \int\limits_a^{t/2} \frac{f(x)x}{x} dx + t \int\limits_a^T \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} \int\limits_a^\tau \frac{f(x)x^\rho}{x} dx + t \int\limits_T^{t/2} \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} \int\limits_a^\tau \frac{f(x)x^\rho}{x} dx.$$

Применяя (8), ограниченность $f(x)$ и теорему о среднем, получим, что

$$|\psi_{01}(t)| < A_1 \varepsilon t^\rho. \tag{11}$$

Наконец, для $\psi_{03}(t)$ имеем $\psi_{03}(t) \leqslant \varepsilon t \int\limits_{3t/2}^\infty \frac{\tau^\rho d\tau}{\tau(\tau-t)}$. Вычисляя последний интеграл, приходим к соответствующей оценке для $\psi_{03}(t)$:

$$\psi_{03}(t) < A_3 \varepsilon \cdot t^\rho. \tag{12}$$

Объединяя (10), (12), получаем

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\psi_0(t)}{t^\rho} \leqslant 0. \tag{13}$$

Если предположить, что в (13) имеет место знак «<», то получим противоречие соотношению (7). Следовательно, $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{\psi_0^*(t)}{t^\rho} = 0$ или $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{\psi(t)}{t^\rho} = -\pi\lambda \operatorname{ctg} \rho\pi$. Окончательный результат вытекает из [2, с. 194].

Рассмотрим теперь функцию

$$X(z) = \exp\left\{z \int_a^\infty \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-z)} d\tau\right\}, \ z \notin [a, +\infty), \ 0 < \rho < 1, \tag{14}$$

где $f(t)$ удовлетворяет условиям (3), (4). Функция $X(z)$ является аналогом канонической функции однородной задачи Римана [3, с. 109], играющей большую роль в краевых задачах для аналитических функций. Имеет место

Теорема 2. Если $f(t)$ удовлетворяет условиям (3), (4), то функция $X(z)$, определенная формулой (14), является аналитической и порядка ρ [2, с. 11] в плоскости с разрезом по вещественному положительному лучу и существует предел

$$h_X(\theta) \equiv \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|X(re^{i\theta})|}{r^\rho} = -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi} \cos\rho(\theta-\pi), \ 0 < \theta < 2\pi,$$

причем стремление к пределу равномерно по $\theta \in [\eta; 2\pi-\eta] \ \forall \eta \in (0; \pi)$.

Доказательство. Существование интеграла в (14) вытекает из (4). Преобразуем тогда $\ln X(z)$ к виду $\ln X(z) = z \int\limits_a^\infty \frac{d\tau}{(\tau-z)^2} \int\limits_a^\tau \frac{f(x)x^\rho}{x} dx$.

Положим $p(\tau) = \int\limits_a^\tau f(x) x^{\rho-1} dx$, тогда $p(\tau) = \frac{\lambda}{\rho}\tau^\rho + p_0(\tau)\tau^\rho$, где $\lim\limits_{\tau\to\infty} p_0(\tau) = 0$. $\ln X(z) = z \int\limits_a^\infty \frac{\lambda\tau^\rho d\tau}{\rho(\tau-z)^2} + z \int\limits_a^\infty \frac{p_0(\tau)\tau^\rho d\tau}{(\tau-z)^2}$. Первый интеграл здесь имеет асимптотику

$$z \int_a^\infty \frac{\lambda\tau^\rho d\tau}{\rho(\tau-z)^2} = -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi} e^{-i\rho\pi} z^\rho + O(1), \ |z| \to \infty, \tag{15}$$

(см., например, [3, с. 71]), а для второго, используя (15), получим

$$\left| z \int_a^\infty \frac{p_0(\tau)\tau^\rho d\tau}{(\tau-z)^2} \right| < L \cdot \varepsilon \cdot |z|^\rho. \tag{16}$$

Из (15), (16) следует утверждение теоремы.

Функция $F(z)$, аналитическая внутри угла $(\Theta_1; \Theta_2)$ и порядка ρ в нем называется функцией вполне регулярного роста (в. р. р.) на луче $\arg z = \Theta \in (\Theta_1; \Theta_2)$ [2, с. 182], если существует

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \tag{17}$$

где E — множество нулевой относительной меры. Функция $F(z)$ — в. р. р. в угле $[\Theta_1; \Theta_2]$, если $\forall \Theta \in [\Theta_1; \Theta_2]$ существует предел (17), причем E — множество, общее для всех лучей.

Следствие 1. Функция $X(z)$, определенная формулой (14) в условиях (2)—(4), является функцией в. р. р. в угле $[0; 2\pi]$. При этом ее индикатор $h_X(\theta)$ [2, с. 72] задается в $[0; 2\pi]$ формулой $h_X(\theta) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln|X(re^{i\theta})|}{r^\rho} =$

$$= -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi} \cos\rho(\theta-\pi),$$

где верхний предел при $\theta \neq 0$; 2π можно заменить точным. Перейдем теперь к расширению предположений на $f(t)$.

Замечание 1. Условие (2) можно заменить условием ([3, с. 56])

$$\int_a^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < +\infty, \ a > 0, \tag{18}$$

где $\omega(\tau)$ — модуль непрерывности функции $f(\tau)$.

Замечание 2. В теореме 1 неявно предполагалось, что $\operatorname{Im} f(t) \equiv \equiv 0$. Это не ограничивает общности.

Замечание 3. Условие (4) можно заменить условием: для некоторого $n \geqslant 2$ существует

$$\lim_{t_n \to \infty} \frac{\rho^{n-1}}{t_n^\rho} \int_a^{t_n} \frac{d t_{n-1}}{t_{n-1}} \int_a^{t_{n-1}} \ldots \int_a^{t_3} \frac{dt_2}{t_2} \int_a^{t_2} \frac{f(t_1) t_1^\rho}{t_1} dt_1 = \lambda. \tag{19}$$

Полученные результаты переносятся также на случай $\rho \geqslant 1$.

Теорема 3. Если $f(t) \in \tilde{H}_{\rho-[\rho]}[a, +\infty]$, $\rho > 1$ — нецелое, (или удовлетворяет условиям (3), (18), (19)), то функция $X(z) = \exp\left\{ z^{[\rho]+1} \int_a^\infty \frac{f(\tau)\tau^\rho \, d\tau}{\tau^{[\rho]+1}(\tau - z)} \right\}$, $a > 0$, является функцией в. р. р. при порядке ρ в угле $[0; 2\pi]$, причем $h_X(0) = h_X(2\pi) = \lim\limits_{r\to\infty}{}^* \frac{\ln|X^\pm(r)|}{r^\rho} = -\pi\lambda \operatorname{ctg} \rho\pi$, $h_X(\Theta) = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln|X(re^{i\theta})|}{r^\rho} = -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi} \cos\rho(\theta - \pi)$, $0 < \theta < 2\pi$ и стремление к последнему пределу равномерно по $\theta \in [\eta, 2\pi - \eta]$, $\eta \in (0; \pi)$.

Теорема 4. Если $f(t)$ удовлетворяет условиям (2), (3) при $\rho \in N$, а также существует $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln t} \int_a^t \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau^{\rho+1}} d\tau = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln t} \int_a^t \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau} = \lambda$, то функция $X(z) = \exp\left\{ z^{\rho+1} \int_a^\infty \frac{f(\tau)\tau^\rho \, d\tau}{\tau^{\rho+1}(\tau - z)} \right\}$, $a > 0$, $\rho \in N$, является функцией в. р. р. при порядке ρ в угле $[0; 2\pi]$, причем $h_X(0) = h_X(2\pi) = \lim\limits_{r\to+\infty}{}^* \times \frac{\ln|X^\pm(r)|}{r^\rho \ln r} = \lambda$, $h_X(\theta) = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln|X(re^{i\theta})|}{r^\rho \ln r} = \lambda \cos\rho\theta$, $0 < \theta < 2\pi$, а стремление к последнему пределу равномерно по $\theta \in [\eta; 2\pi - \eta[$, $\eta \in (0; \pi)$.

Замечание 4. Результаты, аналогичные выводам теорем 1—4, можно получить для следующих двух классов плотностей $\varphi(t)$ в (1):

А. $\varphi(t) = f(t)t^\rho$, $\rho > 0$, $t \in [a, +\infty)$; $f(t)$ монотонно убывает на $[a; +\infty)$; $f(t) \geqslant C > -\infty$, $C = \text{const}$.

Б. $\varphi(t)$ монотонно убывает на $[a; +\infty)$; $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{\varphi(t)}{t^\rho} = \lambda \neq \infty$, $\rho > 0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\rho}{t^\rho} \int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = \lambda$.

Замечание 5. Из элементарных свойств монотонных функций [4, с. 179, 375, 380] вытекает, что функции $\varphi(t)$ из классов А и Б интегрируемы по Риману на любом конечном отрезке и имеют на $[a, +\infty]$ не более, чем счетное число точек разрыва (эти точки-нули $X(t)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Говоров Н. В., Сандригайло И. Е.— В сб.: Проблемы развития прикладных математических исследований: Тез. докладов IV Республиканской конференции математиков Белоруссии. Минск, 1975, ч. 2, с. 96.

2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М., 1956.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ.— М., 1979, т. 1.

Поступила в редакцию
07.05.81.

Кафедра теории функций

УДК 517.925.52

Л. А. АЛЬСЕВИЧ

О НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}=P(t)x,\ x\in R^n,\ t\in R, \tag{1}$$

где $P(t)$ непрерывна и $P(t+2\pi)=P(t)$.

Известно (см. [1], с. 72), что для системы

$$\dot{x}=X(t,\ x),\ (t,\ x)\in R^{n+1}, \tag{2}$$

удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности, существует функция $F(t,\ x)$ со свойствами: 1) $F(t,\ x(t))\equiv x(-t)$ для любого решения $x(t)$ системы (2), определенного при $t=0$; 2) $F(t,\ x)$ является решением системы

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,\ x)+X(-t,\ F)=0 \tag{3}$$

с начальными условиями $F(0,\ x)=x$; 3) продолжимое на $[-\pi,\ \pi]$ решение $x(t)$ системы (2) с 2π-периодической по t правой частью будет $2\pi k$-периодическим ($k\in N$) тогда и только тогда, когда $x(\pi k)::=\lambda$ является решением системы

$$F(\pi k,\ \lambda)=\lambda. \tag{4}$$

Эта функция названа отражающей функцией системы (2).

Лемма 1. Отражающая функция системы (1) может быть представлена в виде $F(t,\ x)=e^{S(t)}x$, где $S(t)$ нечетная дифференцируемая матрица.

Доказательство. Используя первое свойство отражающей функции, нетрудно показать, что $F(t,\ x)$ можно представить в виде $F(t,\ x(t))=B(t)x(t)$, где $B(t)=X(-t)X^{-1}(t)$ и $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (1), для которой $X(0)=E$, а $X(-t)=Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y}=-P(-t)y$. Тогда (см. [2, с. 239]) матрицу $B(t)$ можно представить в виде $B(t)=e^{\mathrm{Ln}B(t)}$. И так как $\ln B^{-1}(t)=-\ln B(t)$, где $\ln B(t)$ та непрерывная ветвь, для которой $\mathrm{Ln}\,B^{-1}(t)=-\mathrm{Ln}\,B(t)$ (см. [3, с. 25]), и $B(-t)=B^{-1}(t)$, имеем $F(t,\ x)=e^{S(t)}x$, где $S(t)=\ln B(t)$ — нечетная дифференцируемая функция.

Задавая конкретные значения матрицы $S(t)$, можно указать различные достаточные условия для матрицы $P(t)$, при которых эффективно выписывается алгебраическая система для определения начальных данных периодических решений системы (1). Пусть к примеру $S(t)=At$, где A — постоянная матрица.

Лемма 2. Для существования у системы (1) отражающей функции вида $F(t,\ x)=e^{At}x$, необходимо и достаточно выполнения следующего условия

$$\begin{gathered}-2P(0)\exp(-2P(0)t)+\exp(-2P(0)t)P(t)+\\+P(-t)\exp(-2P(0)t)\equiv 0,\ \forall\, t\in R.\end{gathered} \tag{5}$$

Если у системы (1) отражающая функция указанного вида существует, то $A=-2P(0)$.

Доказательство леммы очевидным образом следует из свойства 2) отражающей функции.

Теорема. Пусть для непрерывной 2π-периодической матрицы $P(t)$ выполняется условие (5). Для того, чтобы решение $x(t)$ системы (1) было $2\pi k$-периодическим ($k\in N$), необходимо и достаточно, чтобы $x(\pi k)=\lambda$ являлось решением линейной алгебраической системы