(1) к системе вида (4), где все $\gamma_{2k,1}=0$, $(k=1, 2, \ldots)$, но исходная система при этом неизохронна. Последний факт приводит к тому, что соответствующие постоянные h_i-Ляпунова, фигурирующие в формуле Ляпунова для определения времени обхода изображающих точек по траекториям центра системы (1), не все равны нулю. Пусть, например, первой отличной от нуля постоянной h_i-Ляпунова будет постоянная h_m, т. е., как говорят, система (1) имеет в точке $O(0, 0)$ неизохронный центр порядка m. Учитывая теперь исходное предположение, можно всегда указать полиномиальное преобразование вида (5) со сколь угодно большим n, которое приведет исходную (1) к системе

$$\dot{u}=-v-f(u),$$

$$\dot{v}=u+[v+f(u)]f'(u)+\sum_{k=n}\gamma_{2k,1}u^{2k+1},$$

сколь угодно «близкой» к изохронной системе; последнее вступает в противоречие с тем, что исходная и преобразованная системы должны быть эквихронными. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие. Для того чтобы дифференциальная система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно существование определяемой соотношением (2) функции u такой, что в силу (1) $\frac{d^2u}{dt^2}+u\equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелькин В. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 971.
2. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев, 1976.
3. Пыжкова Н. В., Садовский А. П.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1893.
4. Urabe M. J. of mathematics and mechanics, 1961, v. 10, № 4.

Поступила в редакцию 26.02.81.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 519.4

Г. В. МАТВЕЕВ

СЛЕДОВАЯ ФОРМА НА ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОСТОЙ АЛГЕБРЕ

Многие исследования (см., например, [1—4]) посвящены следовой форме на поле алгебраических чисел. Фрелих [2] установил связь рассматриваемых вопросов с теорией полей классов. В работе [4] замечено, что строение группы Галуа соответствующего расширения зависит от параметров следовой формы. Цель настоящей заметки — рассмотреть некоммутативный аналог следовой формы. Иными словами, изучается следовая форма на центральной простой алгебре над полем алгебраических чисел. Основной результат состоит в том, что некоммутативный случай сводится к коммутативному по модулю гиперболических форм. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть A — центральная простая алгебра с центром K, являющимся полем алгебраических чисел. Рассмотрим на алгебре билинейную симметрическую форму $\beta(x, y)=\mathrm{Trd}(xy)$, где $x, y\in A$, а через Trd обозначен приведенный след. Хорошо известно, что форма β невырожденная. Наша цель — свести изучение этой формы к коммутативному случаю, т. е. к случаю, когда алгебра A является полем конечной степени над полем K, а приведенный след обычным следом.

Ниже используются стандартные обозначения из алгебраической теории квадратичных форм [3]. При изучении возникающих таким образом квадратичных форм иногда удобно переходить на язык квадратичных пространств. Поэтому обозначим через $V(A)$ векторное пространство A с симметрической билинейной формой $\beta(x, y)$. Приведенные ниже теоремы 1 и 2 сводят нашу задачу к случаю алгебры с делением.

Теорема 1. Пусть A и B — центральные простые алгебры с общим центром K, $A\times B$ — их тензорное произведение. Тогда $V(A\times B)=V(A)\times V(B)$.

Теорема 2. Пусть $M_r(K)$ — полная матричная алгебра над полем K. Тогда $V(M_r(K))=\langle 1\rangle\perp\langle 1\rangle\perp\ldots\langle 1\rangle\perp H_{r^2-r}$, где H_{r^2-r} — гиперболическое пространство размерности r^2-r.

Известно, что любая центральная простая алгебра A представима в виде $A=M_r(K)\times D$, где D — центральное тело над K. По теореме 1 $V(A)=V(M_r(K))\times V(D)$. Первый множитель справа вычисляется по теореме 2. Перейдем к изучению второго множителя. По классической теореме Хассе — Брауэра — Нетер тело D — циклическое.

Пусть F — максимальное циклическое над K подполе тела D. Обозначим через σ образующий элемент группы $\mathrm{Gal}(F/K)$. Тогда $D=(F/K, \sigma, a)$, где $a\in K^*$. Если степень расширения F/K четная, то в группе $\mathrm{Gal}(F/K)$ найдется инволюция τ. В дальнейшем нам понадобится некоторая модификация пространства $V(F/K)$, заданного с помощью следовой формы $\beta(x, y)=\mathrm{tr}(xy)$, где tr: $F\to K$ — обычное следовое отображение. Наряду с формой $\beta(x, y)$ рассмотрим форму $\beta^\tau(x, y)=\mathrm{tr}(x\tau(y))=\mathrm{tr}(\tau(x)y)$. Эта форма задает на расширении F/K структуру нового квадратичного пространства, которое в дальнейшем обозначается через $V^\tau(F)$. Наконец обозначим через $V_a(F)$ пространство, полученное из пространства $V(F)$ умножением формы β на элемент $a\in K^*$.

Теорема 3. Пусть D — центральное тело K-ранга l^2. Если l — нечетное, то $V(D)=V(F)\perp H_{l^2-l}$, а если l — четное, то $V(D)=V(F)\perp V_a^\tau(F)\perp\perp H_{l^2-l}$.

Прежде чем формулировать заключительный результат, который очевидным образом вытекает из теорем 1—3, необходимо дать одно определение. Обозначим через kV ортогональную сумму k пространств $V\perp V\perp\ldots\perp V$.

Теорема 4. Пусть $A=M_r(K)\times D$, где D — тело K-ранга l. Тогда при нечетном l $V(A)=rV(F)\perp H_{r^2l^2-r}$, а при четном l $V(A)=r(V(F)\perp\perp V_a^\tau(F))\perp H_{r^2l^2-2r}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ — K-базис алгебры A, $b_1, b_2, \ldots, b_{m^2}$ — K-базис алгебры B. Как известно [1], $\mathrm{Trd}((a_i\times b_j)(a_l\times b_k))=\mathrm{Trd}(a_ia_l\times b_jb_k)=\mathrm{Trd}(a_ia_l)\mathrm{Trd}(b_jb_k)$. Поэтому дискриминантная матрица пространства $A\times B$ в базисе $\{a_i\times b_j\}$ является тензорным произведением дискриминантных матриц пространств A и B в базисах $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ соответственно, откуда и получается, что $V(A\times B)=V(A)\times V(B)$.

Доказательство теоремы 2 фактически содержится в работе [5], хотя эта теорема там в явном виде и не сформулирована. Это доказательство основано на несложных вычислениях. Достаточно лишь заметить, что $\mathrm{tr}(l_{ii}^2)=\mathrm{tr}(l_{ij}l_{ji})=1$, $\mathrm{tr}(l_{ij}^2)=\mathrm{tr}(l_{ij})=0$, при $i\neq j$. Таким образом, матричным единицам l_{ii} соответствуют слагаемые вида $\langle 1\rangle$, а парам матричных единиц l_{ij} и l_{ji} при $i\neq j$ соответствуют гиперболические плоскости.

Доказательство теоремы 3. В расширении F/K выберем циклический базис $w, w^\sigma, \ldots, w^{\sigma^{l-1}}$. Произвольный элемент $x\in D$ можно записать в виде $x=\alpha_0+\alpha_1\delta+\alpha_2\delta^2+\ldots+\alpha_{l-1}\delta^{l-1}$, где $\delta^l=a\in K^*$, $\alpha_i\in F$. Пусть теперь

$$\alpha_0=x_{11}w+x_{12}w^\sigma+\ldots+x_{1l}w^{\sigma^{l-1}}$$

$$\alpha_1=x_{21}w+x_{22}w^\sigma+\ldots+x_{2l}w^{\sigma^{l-1}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{l-1} = x_{l1}w + x_{l2}w^{\sigma} + \ldots + x_{ll}w^{\sigma^{l-1}}.$$

Выпишем приведенное представление элемента x в явном виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \ldots \alpha_{l-1} \\ a\alpha^{\sigma}_{l-1} & \alpha^{\sigma}_0 \ldots \alpha^{\sigma}_{l-2} \\ \ldots & \ldots \\ a\alpha_1^{\sigma^{l-1}} \; a\alpha_2^{\sigma^{l-1}} & \ldots \alpha_0^{\sigma^{l-1}} \end{pmatrix}$$

Отсюда вытекает, что $\mathrm{Trd}\, x = \alpha_0 + \alpha^{\sigma}_0 + \ldots + \alpha_0^{\sigma^{l-1}} = \mathrm{tr}\, \alpha_0$. Теперь можно приступить к вычислению формы $\beta(x, x)$. Воспользуемся тем, что скаляры поля F переставляются с элементом δ с помощью автоморфизма σ. Тогда $\beta(x, x) = \mathrm{Trd}(x^2) = \mathrm{Trd}(\alpha_0^2 + \alpha_1\alpha^{\sigma}_{n-1}a + \alpha_2\alpha^{\sigma^2}_{n-2} + \ldots) = \mathrm{tr}(\alpha_0^2) + a\,\mathrm{tr}(\alpha_1\alpha^{\sigma}_{n-1}) + a\,\mathrm{tr}(\alpha_2\alpha^{\sigma}_{n-2}) + \ldots$

Заметим, что в последнем выражении сумма квадратичных форм является прямой, причем первое слагаемое — следовая форма расширения F/K. Более того, слагаемые вида $\mathrm{tr}(\alpha_i\alpha_j)$, а значит, и $a\,\mathrm{tr}(\alpha_i\alpha_j)$ при $i \neq j$ гиперболические, потому что уравнение $\alpha_i = 0$ задает изотропное подпространство максимальной размерности l. При нечетном l все слагаемые, кроме первого, будут слагаемыми указанного типа. В случае четного $l = 2s$ имеется, помимо первого слагаемого, еще одно априори не гиперболическое слагаемое вида $a\,\mathrm{tr}(\alpha_s\alpha_s^{\sigma^s})$. Автоморфизм $\sigma^s = \tau$ является инволюцией, поэтому это слагаемое соответствует квадратичному пространству $V_a^{\tau}(F)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра, модули, кольца, формы.— М., 1968.
2. Frohlich A.— Math. Zeitschr., 1960, B. 74, S. 18.
3. Lam T. The Algebraic Theory of Quadratic Forms-Massachusets, 1973.
4. Maurer D.— Linear and Multilinear Algebra, 1978, v. 6, p. 33.
5. Матвеев Г. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 60.

Поступила в редакцию 02.04.81.

Кафедра высшей математики

УДК 517.532, 517.535.4

Н. В. ГОВОРОВ, И. Е. САНДРИГАЙЛО, С. В. РОГОЗИН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ С КОНТУРОМ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ЛУЧЕ

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства интеграла

$$\psi(z) = \frac{z}{2\pi i}\int_a^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau - z)}, \quad a > 0, \tag{1}$$

при $z(\in[a, +\infty)) \to \infty$, а также при $z(=t\in[a, +\infty)) \to +\infty$ в предположении, что $\varphi(t)$ в окрестности $t = +\infty$ ведет себя как степенная функция [1].

Введем в рассмотрение следующий класс функций.

Определение 1. Непрерывная на $[a, +\infty)$ функция $f(t)$ принадлежит классу $H_\rho[a, +\infty]$, если

$f(t)$ локально гельдеровская, т. е. $\forall\, t_0 \in (a, +\infty)$

$$\exists\, \delta_0 > 0,\ A_0 > 0,\ 0 < \mu_0 \leqslant 1 : \forall\, t_1, t_2 \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$$

$$|f(t_1) - f(t_2)| < A\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|^{\mu_0}; \tag{2}$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lambda \neq \infty; \tag{3}$$

при некотором ρ

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\rho}{t^\rho}\int_a^t \frac{f(\tau)\tau^\rho}{\tau}\,d\tau = \lambda.$$