

ISSN 0321-0367



ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

2
—
1982



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 2
МАЙ

Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО (*главный редактор*),
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (*ответственный секретарь*), В. С. ГРИГОРЬ-
ЕВ, И. И. ЖБАНКОВА, В. Г. ИВАШИН, В. Г. РУДЬ (*зам. главного*
редактора), А. М. САРЖЕВСКИЙ, А. Е. СУПРУН, И. Г. ТИ-
ЩЕНКО

Редакционная коллегия серии:

А. М. САРЖЕВСКИЙ (*ответственный редактор*),
Ю. С. БОГДАНОВ (*зав. ответственного редактора*), В. И. ВЕДЕР-
НИКОВ, Е. С. ВОРОПАЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Е. И. ИВАНОВ,
Л. И. КОМАРОВ, А. И. КОМЯК, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, И. А.
ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, Б. Ю. ХАНОХ (*ответственный секре-*
тарь), А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, С. С. ШУШКЕВИЧ

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2

Редактор *И. П. Стрельченя*
Художественный редактор *Л. Г. Медведева*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 29.01.82. Подписано в печать 12.05.82. АТ 14663. Формат
70×108¹/₁₆. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 7,16. Тираж 855 экз.
Заказ 745.

Издательство Белорусского государственного университета имени В. И. Ле-
нина. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, телефон 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Бсло-
руссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.



УДК 518 : 519.2

В. В. АПАНАСОВИЧ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Подавляющее большинство потоков, возникающих при проведении различного рода физических экспериментов, является пуассоновскими с изменяющейся во времени интенсивностью. Задача моделирования таких потоков чрезвычайно актуальна в связи с интенсивным проникновением метода статистического моделирования в область исследования систем обеспечения физических экспериментов.

Для задания пуассоновского потока случайных событий в общем случае необходимо знать монотонно неубывающую, ограниченную в любом конечном интервале ведущую функцию $\Lambda(t)$ [1].

В данной работе рассмотрен случай абсолютно непрерывной ведущей функции. Это допущение позволяет говорить об эквивалентном задании потока с помощью функции $\lambda(t) = \Lambda'(t)$ — интенсивности потока.

Пусть пуассоновский поток случайных событий задан на интервале $[T_0, T]$, $0 < \Lambda(T) - \Lambda(T_0) \leq A < +\infty$. Как отмечено в [2], моменты наступления событий пуассоновского потока можно рассматривать как реализации независимых, одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_v$ с функцией распределения

$$F(i) = \frac{\Lambda(t) - \Lambda(T_0)}{\Lambda(T) - \Lambda(T_0)},$$

где v — дискретная случайная величина, определяющая число событий потока на $[T_0, T]$ и распределенная по закону Пуассона с параметром $[\Lambda(T) - \Lambda(T_0)]$;

$$P\{v = i\} = \frac{[\Lambda(T) - \Lambda(T_0)]^i}{i!} e^{-[\Lambda(T) - \Lambda(T_0)]}, i = 0, 1, \dots \quad (1)$$

В силу сделанного предположения о характере ведущей функции случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_v$ непрерывны с плотностью распределения

$$f(t) = \frac{\lambda(t)}{\Lambda(T) - \Lambda(T_0)}.$$

Для моделирования пуассоновских потоков существуют два универсальных способа: первый использует метод обратных функций, а второй основан на преобразовании предварительно полученной реализации потока Бернулли. Если применение метода обратных функций сопряжено со значительными трудностями при вычислении значений функции, обратной к функции распределения очередного интервала между моментами наступления событий, то переход к потоку Бернулли требует применения операции сортировки. Предлагаемый в работе метод моделирования пуассоновских потоков основан на использовании операции прореживания исходного более интенсивного потока. Применяемая операция

режекции аналогична процедуре исключения в широко используемом для моделирования случайных векторов метода Неймана.

Справедливо [3]

Предложение 1. Для каждого $i, i = 1, \dots, v$ — вектор (ξ_i, α_i) , где случайная величина α_i при любом $\xi_i = x$ распределена равномерно на $[0, \lambda(x)]$, распределен равномерно в области

$$D = \{(t, y) \mid T_0 \leq t \leq T, 0 \leq y \leq \lambda(t)\}.$$

Справедливо также обратное

Предложение 2. Последовательность случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_v$, таких, что векторы $(\xi_i, \alpha_i), i = 1, \dots, v$, равномерно распределены в области D , а v подчиняется распределению (1), определяет на $[T_0, T]$ пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$.

Предположим, что существует эффективная процедура генерации пуассоновского потока с интенсивностью $\lambda(t)$.

Предложение 3. Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_v$ определяет на $[T_0, T]$ пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$. Тогда последовательность случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_\mu$ определяет на $[T_0, T]$ пуассоновский поток с интенсивностью $\beta(t)$, если реализации векторов $(\eta_k, \gamma_k), k = 1, \dots, \mu$, рассматриваются как реализации векторов $(\xi_i, \alpha_i), i = 1, \dots, v$, попавшие в область

$$D_\beta = \{(t, y) \mid T_0 \leq t \leq T, 0 \leq y \leq \beta(t)\},$$

а μ — число векторов $(\xi_i, \alpha_i), i = 1, \dots, v$, реализации которых попали в D_β .

Доказательство. Из предложения 1 сразу следует, что векторы $(\eta_k, \gamma_k), k = 1, \dots, \mu$ равномерно распределены в области D_β .

Теперь, учитывая предложение 2, осталось показать, что μ подчиняется распределению Пуассона с параметром $[B(T) - B(T_0)]$, где $B(t) = \int_{T_0}^t \beta(x) dx + B(T_0)$. Действительно,

$$P\{\mu = k\} = \sum_{i=k}^{\infty} P\{\mu = k; v = i\} = \sum_{i=k}^{\infty} P\{v = i\} \cdot P\{\mu = k \mid v = i\}. \quad (2)$$

Так как вероятность попадания в область D_β вектора, равномерно распределенного в D , равна $\frac{B(T) - B(T_0)}{\Lambda(T) - \Lambda(T_0)}$, то $P\{\mu = k \mid v = i\} = C_i^k \left[\frac{B(T) - B(T_0)}{\Lambda(T) - \Lambda(T_0)} \right]^k \cdot \left[1 - \frac{B(T) - B(T_0)}{\Lambda(T) - \Lambda(T_0)} \right]^{i-k}$.

Подставляя последнее выражение в (2) с учетом (1), получаем $P\{\mu = k\} = \frac{[B(T) - B(T_0)]^k}{k!} e^{[\Lambda(T) - \Lambda(T_0)]} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{[\Lambda(T) - \Lambda(T_0) - B(T) + B(T_0)]^{i-k}}{(i-k)!}$, откуда

$P\{\mu = k\} = \frac{[B(T) - B(T_0)]^k}{k!} e^{-[B(T) - B(T_0)]}$, что и требовалось показать.

Предложение 3 дает простую и удобную схему получения реализации пуассоновского потока с интенсивностью $\beta(t)$ по реализации пуассоновского потока с интенсивностью $\lambda(t) \geq \beta(t)$.

Генерируем моменты наступления событий исходного потока $t_1, t_2, \dots$. Для каждого $t_i, i = 1, 2, \dots$, генерируем случайную величину, равномерно распределенную на $[0, \lambda(t_i)]$. Если ее реализация $y_i \leq \beta(t_i)$, то t_i является моментом наступления события потока с интенсивностью $\beta(t)$. В противном случае t_i теряется.

По аналогии с методом Неймана под эффективностью предлагаемого способа будем понимать относительное число полезных генераций при получении одной реализации потока. Ее значение равно отношению среднего числа событий искомого потока к среднему числу событий исходного потока, т. е. $\kappa = \frac{B(T) - B(T_0)}{\Lambda(T) - \Lambda(T_0)}$. Предположим, что для получения

реализаций исходного потока выбран метод, позволяющий генерировать возрастающую последовательность моментов наступления событий $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_j \leq \dots$. Как нетрудно показать, используя свойство отсутствия последствия пуассоновского потока, в этом случае описанную схему можно модифицировать следующим образом: после очередного момента наступления события искомого потока τ корректируем «покрывающую» интенсивность так, чтобы новая $\lambda_\tau(t) \geq \beta(t)$ только для $t \in [\tau, T]$. Такая корректировка позволяет во многих случаях существенно увеличить эффективность рассмотренного метода.

Полученный в работе алгоритм моделирования применялся для генерации внешних воздействий в имитационных моделях автоматизированных систем обеспечения лазерно-локационных экспериментов, а также для экспериментов по исследованию явления радиолюминесценции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания.— М., 1963.
2. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.— М., 1966.
3. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы.— М., 1975.

Поступила в редакцию
02.11.79

Кафедра ЭММ

УДК 577.3

А. С. ЕГОРОВ, В. И. КРОТ

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ НА СТРУКТУРНОЕ СОСТОЯНИЕ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ДНП-СИСТЕМ

Решению одной из актуальных задач современной биофизики — выяснению механизмов регуляции функциональной активности генетического материала клетки — в значительной степени может способствовать изучение структуры и свойств хромосомных моделей *in vitro* при варьирующих условиях среды. Одной из таких моделей, адекватно отражающей поведение моделируемого материала *in vivo*, является надмолекулярная дезоксирибонуклеопротеидная (ДНП) структура, представляющая собой одноосно ориентированное конденсированное волокно в физиологическом растворе (0,14 М NaCl, pH 7,0) [1], весьма чувствительное к изменению как соотношения компонентов ДНП-комплекса, так и параметров внешней среды. В основе такой чувствительности хромосомных моделей к различным физико-химическим воздействиям лежат перестройки пространственной структуры надмолекулярных ДНП-систем, вызванные, в свою очередь, изменением характеристик межмолекулярного взаимодействия в нуклеопротеидном комплексе.

Ранее нами [2, 3] был предложен метод количественной оценки поперечных межмолекулярных связей (узлов) в пространственной сетке указанных систем, основанный на высокоэластической природе деформации ДНП-волокон при небольшой (10^{-7} — 10^{-6} Н) нагрузке. Однако этот метод наряду с достоинствами (высокая чувствительность, возможность исследования образцов в условиях, приближающихся к физиологическим, а также одновременного изучения большого количества объектов) обладает и рядом недостатков (погрешность $\sim 25\%$, отклонения от изотермичности деформирования, нестационарность деформирующего образца потока физиологического раствора), что побудило нас предпринять попытку модификации метода с целью устранения указанных недостатков [4]. С помощью сконструированной нами установки удалось провести нагружение ДНП-волокна стационарным потоком физиологического раствора при постоянной температуре, избежать использования в расчетах ряда приближенных параметров, а также упростить постановку эксперимента и снизить тем самым погрешность метода до 12 %.

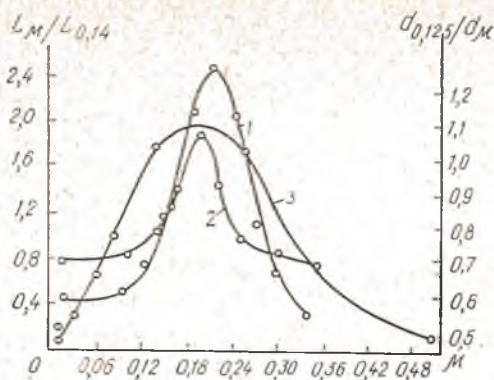


Рис. 1. Зависимость числа узлов пространственной сетки в надмолекулярных ДНП-структурах, полученная методами [3] (1) и [4] (2), а также диаметра хромосом (3, данные из работы [9]) от ионной силы среды, pH 7,0

На рис. 1 показана зависимость относительного количества поперечных межмолекулярных связей, приходящихся на одну молекулу в ДНП-волокне (L), рассчитанных с помощью исходного метода (кривая 1) и его модификации (кривая 2) от ионной силы (μ) среды. Для сравнения приведены результаты качественного характера (кривая 3), адекватно отражающие закономерности, которым мы даем количественную характеристику при реологическом исследовании модельных хромосомных структур. Эти данные, взятые из работы [9], дают информацию о поведении непосредственно хромосом при аналогичных изменениях параметров среды. Как видно из рис. 1, кривые 1 и 2 имеют характерную куполообразную форму, хотя положения максимумов не совпадают (0,22 М и 0,20 М соответственно); увеличение числа связей между молекулами различно. Однако эти отклонения могут быть объяснены разным временем выдерживания препарата от момента его выделения до эксперимента и в некоторой степени характеристиками самого препарата. Кривая 3 также носит куполообразный характер, причем положение максимума полностью совпадает с таковым на кривой 2. Максимум кривой 3 соответствует наибольшему сжатию хромосом при концентрации NaCl, равной 0,2 М, при которой мы фиксируем максимальное количество узлов в пространственной сетке ДНП. Левая и правая ветви кривой 3 указывают на набухание хромосом, где имеет место снижение числа связей между молекулами. Более пологий ход кривой 3, полученной при исследовании хромосом, может быть объяснен, по-видимому, не столько различиями в структурной организации реальных и модельных ДНП-систем, сколько тем, что, судя по материалу, приведенному в [9], хромосомы, в отличие от модельных образцов, не переходили в равновесное состояние при каждом заданном значении ионной силы. Согласно нашим данным, зависимость времени релаксации от ионной силы для модельных хромосомных структур также носит куполообразный характер с максимумом при $\mu = 0,2$.

Таким образом, характер зависимостей, приведенных на рис. 1, может свидетельствовать о том, что изменения хромосом также связаны с нарушением межмолекулярного взаимодействия. В основе наблюдаемых эффектов, очевидно, лежит изменение электростатического взаимодействия между молекулами, входящими в состав ДНП-комплекса, приводящее к диссоциации белка и последующему распаду надмолекулярных ДНП-структур (и хромосом) в области высоких значений ионной силы. В среде с низкой ионной силой оно также вызывает разрушение надмолекулярных ДНП-структур, но взаимное отталкивание индивидуальных молекул ДНП (вследствие слабой экранировки проти-

Эти методы использовались нами для изучения зависимости числа узлов в пространственной сетке ДНП от целого ряда факторов внешней среды, в частности ионной силы и pH физиологического раствора.

Препараты ДНП из тимуса телят и кроликов и ДНП-волокна получали с помощью методов, представленных в работах [1, 5]. Анализ выделенных препаратов проводили, пользуясь методами [6—8]. И использованные препараты имели следующие характеристики: $M \sim 2 \cdot 10^7$; $N/P = 3,9 \div 4,5$; $S_{\text{ДНП}} = 0,1 \div 0,2$ мг/мл. Для всех препаратов наблюдалось практически полное воспроизведение изучаемых зависимостей.

воионами среды отрицательно заряженных групп белка и свободных участков ДНК) теперь происходит в условиях более прочного взаимодействия белков с ДНК.

Корреляция изменения числа межмолекулярных связей в ДНП-системах с изменением диаметра хромосом (использовали также данные работы [9]) наблюдается и при изменении концентрации водородных ионов (рН) среды (рис. 2). Переход от кислых к нейтральным значениям рН характеризуется резким сокращением числа связей между молекулами ДНП-комплекса (кривая 1) и набуханием хромосом (кривая 2). При рН 5—8 диаметр хромосомы практически не меняется, тогда как в щелочной среде (рН 8,5—11) имеет место увеличение размеров хромосомы (в 2,5 раза). Характерно, что, начиная с рН > 8,5, наблюдается значительное уменьшение числа узлов в ДНП-системе, т. е. и в этой области отмечается хорошая корреляция между результатами работы [9] и количественным анализом структурного состояния конденсированных ДНП-систем при изменении рН среды.

Однако с помощью разрабатываемого метода количественной оценки влияния физико-химических факторов на параметры надмолекулярной организации модельных хромосомных структур дополнительно обнаруживается структурная перестройка исследуемых ДНП-систем в области рН 7,5—8,5. Отсутствие этого структурного перехода в исследовании [9], с нашей точки зрения, связано, кроме того, с невысокой точностью микроскопических измерений. В области значений рН, соответствующей обнаруженному структурному переходу, по-видимому, происходит нарушение взаимодействия ДНК — белок вследствие нейтрализации NH_3^+ -групп гистоновых молекул и вовлечения дополнительного числа участков белковых молекул в межмолекулярные взаимодействия белок — белок. Дальнейшее нарушение взаимодействия между ДНК и гистонами и усиление агрегации гистонов приводит в области рН > 8,5 к распаду надмолекулярных ДНП-структур, прослеживаемому по уменьшению числа узлов в пространственной сетке конденсированных ДНП-систем. Увеличение количества межмолекулярных связей в области рН < 5 связано, по-видимому, с уменьшением электростатического отталкивания нейтрализующихся карбоксильных групп взаимодействующих молекул белка.

Следует отметить, что до конца не оценен вклад в наблюдаемые процессы изменения жесткости отрезков цепей между узлами пространственной сетки надмолекулярных ДНП-структур при нарушении стабильности вторичной структуры ДНК и взаимодействия ДНК — белок. Выяснение этого обстоятельства связано с некоторыми затруднениями теоретического и методического характера и является предметом дальнейшего исследования. Однако рассмотрение этого вопроса, основанное на сравнении физико-химических свойств растворов ДНК и ДНП, с одной стороны, и свойств надмолекулярных ДНП-структур в адекватных условиях — с другой, дает основание считать, что предложенное нами объяснение перестроек в модельных хромосомных системах при измене-

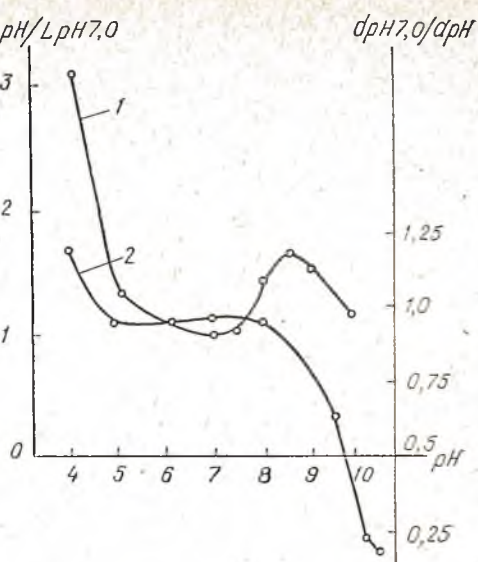


Рис. 2. Зависимость числа узлов пространственной сетки в надмолекулярных ДНП-структурах (1, метод [4]) и диаметра хромосом (2, данные из работы [9]) от рН среды, $\mu=0,14$

нии ионной силы и рН среды верно отражает суть наблюдаемых явлений.

Основные результаты, полученные в данном исследовании, сводятся к следующему.

1. Количественно охарактеризованы структурные перестройки в пространственной сетке модельных хромосомных систем при изменении ионной силы и рН среды.

2. Показана хорошая корреляция между качественными характеристиками изменений структуры хромосом и количественными параметрами пространственной организации надмолекулярных систем ДНП, находящихся в аналогичных условиях.

3. Обнаружен структурный переход в модельных хромосомных системах в области значений рН, близкой к физиологической ($7,5 < \text{pH} < 8,5$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Спитковский Д. М.—Биохимия, 1955, т. 20, № 5, с. 566.
2. Крот В. И., Егоров А. С., Андрианов В. Т.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1972, № 2, с. 90.
3. Крот В. И., Спитковский Д. М., Писаревский А. Н., Андрианов В. Т.—Биофизика, 1974, т. 19, № 1, с. 10.
4. Егоров А. С., Горбачев С. К., Крот В. И.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1978, № 2, с. 86.
5. Куликова Л. Г. и др.—В сб.: Матер. конф. молодых ученых.—М., 1966, с. 63.
6. Спитковский Д. М.—Биофизика, 1958, т. 3, с. 396.
7. Спирин А. С.—Биохимия, 1958, т. 23, № 6, с. 656.
8. Lowry O. H. et al.—J. Biol. Chem., 1951, v. 193, № 1, p. 265.
9. Груздев А. Д., Белая А. Н.—Цитология, 1968, т. 10, № 3, с. 297.

Поступила в редакцию
02.02.80

Кафедра биофизики

УДК 621.396.69-181.48

В. М. БОРЗДОВ

О ТЕПЛОВЕМ СТАРЕНИИ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕЗИСТИВНЫХ ПЛЕНОК

В процессе теплового старения поликристаллических резистивных пленок, основным механизмом деградации которых является диффузия кислорода и примесей, должен наблюдаться переход от диффузии по границам зерен к диффузии по объему [1]. Этот факт был экспериментально подтвержден для неотожженных резисторов на основе тантала. Исследование зависимости коэффициента старения K_R этих резисторов от времени t выявило излом на начальном этапе старения [2—4]. При построении физико-математических моделей, описывающих процессы деградации в резисторах такого типа, возникает задача оценки момента времени t_0 , соответствующего перегибу на графиках зависимости $K_R(t)$.

Целью настоящей работы явилось получение простой численной оценки этого момента времени.

В работе [5] на основе анализа соотношения между количеством вещества, продиффундировавшего в поликристалл по границам зерен и по объему в пределах принятой диффузионной зоны, дана оценка вклада того или иного вида диффузии в общий диффузионный поток в зависимости от температуры отжига T и сформулированы критерии для соответствующих границ температурных интервалов.

На основании результатов работ [6, 7] можно сделать вывод, что переход от зернограницной диффузии к диффузии по объему определяется соотношением между длиной объемной диффузии $\sqrt{Dt}$ (где D — коэф-

коэффициент объемной диффузии, а t — время отжига) и средним размером зерна L . Однако, если учесть, что величина деградации резистора, характеризующая коэффициентом $K_R(t)$, однозначно определяется средней концентрацией продиффундировавших примесей, решение поставленной задачи можно провести на основе соотношения между средними концентрациями примесей, находящихся соответственно в границах зерен и их объеме.

В качестве модели резистивной пленки предполагается модель, аналогичная [8]. При этом размеры зерен по осям X и Y равны соответственно $2L$ и L . Величина L принимается такой, чтобы можно было пренебречь влиянием зернограницной и объемной диффузии на этой глубине [1].

Условие для нахождения момента времени t_0 можно сформулировать следующим образом: как только величина средней концентрации диффузанта в пленке, определяемая диффузией через объем зерна, станет равной величине средней концентрации, определяемой диффузией по границе, то время, соответствующее этому моменту, и будет искомым моментом времени.

Величину концентрации примеси в границе зерна на глубине y в результате диффузии по этой границе можно записать [9]: $C'(y, t) =$

$$= C_0 \exp \left(- \frac{\sqrt[4]{4D} y}{\sqrt[4]{\pi t \sqrt{\delta D'}}} \right), \text{ где } C_0 \text{ — поверхностная концентрация примеси;}$$

δ — ширина границы зерна; D' — коэффициент зернограницной диффузии. Тогда средняя концентрация во всей границе, при условии приня-

го допущения о величине L , определится как: $\bar{C}'(t) = C_0 \frac{1}{L} \int_0^L \exp \times$
 $\times \left(- \frac{\sqrt[4]{4D} y}{\sqrt[4]{\pi t \sqrt{\delta D'}}} \right) dy = C_0 \frac{1}{L} \frac{\sqrt[4]{\pi t \sqrt{\delta D'}}}{\sqrt[4]{4D}}.$

Величина концентрации на глубине y в результате диффузии с поверхности в объем зерен [10]: $C_1(y, t) = C_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right).$

Средняя концентрация $\bar{C}_1(t)$ будет: $\bar{C}_1(t) = C_0 \frac{1}{L} \int_0^L \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right) dy =$
 $= C_0 \frac{1}{L} \sqrt{4Dt} \left[\frac{L}{\sqrt{4Dt}} \operatorname{erfc} \left(\frac{L}{\sqrt{4Dt}} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(- \frac{L^2}{4Dt} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right] =$
 $= C_0 \frac{1}{L} \sqrt{4Dt} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

Кроме объемной диффузии, с поверхности поликристаллической пленки, согласно решению Фишера, будет наблюдаться также и диффузия в объем зерна с границы. Соответствующие этому случаю концентрация $C_2(x, t)$ и средняя концентрация $\bar{C}_2(x, t)$ запишутся в виде:

$$C_2(x, t) = \bar{C}'(t) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right), \quad \bar{C}_2(t) = \bar{C}'(t) \frac{1}{L} \int_0^L \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) dx = \bar{C}'(t) \frac{1}{L} \sqrt{4Dt} \times$$

$$\times \left[\frac{L}{\sqrt{4Dt}} \operatorname{erfc} \left(\frac{L}{\sqrt{4Dt}} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(- \frac{L^2}{4Dt} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right] = \bar{C}'(t) \frac{1}{L} \sqrt{4Dt} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Условие равенства средних концентраций в момент времени t_0 :

$$\bar{C}'(t_0) = \bar{C}_1(t_0) + \bar{C}_2(t_0), \text{ откуда, после введения коэффициентов } a =$$

$$= \frac{1}{L} \frac{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\delta D'}}{\sqrt[4]{4D}} \text{ и } b = \frac{1}{L} \frac{\sqrt{4D}}{\sqrt{\pi}} \text{ получим следующее уравнение относительно}$$

но t_0 : $C_0 a \sqrt[4]{t_0} = C_0 b \sqrt{t_0} + C_0 a \sqrt[4]{t_0} b \sqrt{t_0}$. Вводя новую переменную $z = \sqrt[4]{t_0}$, это уравнение можно переписать в виде: $az = bz^2 + abz^3$.

Сокращая обе части на $z \neq 0$, приходим к обычному квадратному

уравнению: $abz^2 + bz - a = 0$, дискриминант которого $-4a^2b - b^2 < 0$, так как $a > 0$ и $b > 0$ и, следовательно, существуют два действительных корня:

$$z_{1,2} = \sqrt[4]{t_{0,2}} = \frac{-\frac{\sqrt{4D}}{\sqrt{\pi}} \mp \sqrt{\frac{4D}{\pi} + 4\frac{\delta D'}{L}}}{\frac{2}{L} \frac{\sqrt{\delta D'} \sqrt[4]{4D}}{\sqrt[4]{\pi}}},$$

откуда

$$t_{0,2} = \left(\frac{-\frac{\sqrt{4D}}{\sqrt{\pi}} \mp \sqrt{\frac{4D}{\pi} + 4\frac{\delta D'}{L}}}{\frac{2}{L} \frac{\sqrt{\delta D'} \sqrt[4]{4D}}{\sqrt[4]{\pi}}} \right)^4. \quad (1)$$

Так как $z_{1,2} \geq 0$, отрицательный корень z_1 необходимо отбросить. Вто-

рой корень $z_2 = \frac{-\frac{\sqrt{4D}}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{4D}{\pi} + 4\frac{\delta D'}{L}}}{\frac{2}{L} \frac{\sqrt{\delta D'} \sqrt[4]{4D}}{\sqrt[4]{\pi}}}$ имеет смысл лишь при $L_{\min} \leq$

$\leq L \leq \infty$, где $L_{\min}$ приближенно можно оценить следующим образом.

Если положить, что концентрация $C_0 \exp\left(-\frac{\sqrt[4]{4D} L_{\min}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\delta D'}}\right)$ на этой глубине, например, в 10^2 раз меньше концентрации C_0 на поверхности, имеет место соотношение:

$$\frac{C_0 \exp\left(-\frac{\sqrt[4]{4D} L_{\min}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\delta D'}}\right)}{C_0} = 10^{-2}. \quad (2)$$

Подставляя в (2) значение t_{02} из (1) и проведя ряд элементарных преобразований, легко показать, что

$$L_{\min} \approx \pi \frac{\delta D'}{D}, \quad (3)$$

откуда можно заключить, что минимальная толщина резистивной пленки, для которой справедлива предложенная модель и полученное решение (1), определяется соотношением между параметром зернограницной диффузии $\delta D'$ и коэффициентом объемной диффузии D . В этом случае,

с учетом (3): $z_{2\min} \approx \frac{0,2 \pi^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{4D} \sqrt{\delta D'}}{D}$ и $t_{02\min} \approx (0,3)^4 \pi^3 \frac{(\delta D')^2}{D^3}$. Опреде-

ляя далее значение $z_{2\infty}$ по правилу Лопиталя, получим $\lim_{L \rightarrow \infty} z_2 = \frac{\pi^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\delta D'}}{(4D)^{\frac{3}{4}}}$,

откуда $z_{2\infty} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt[4]{\delta D'}}{D^{\frac{3}{4}}}$ и $t_{02\infty} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \frac{(\delta D')^2}{D^3}$.

Таким образом, анализ полученного решения позволяет сделать вывод о том, что в зависимости от толщины резистивного слоя, оценка для момента времени t_0 будет находиться в пределах:

$$(0,3)^4 \pi^3 \frac{(\delta D')^2}{D^3} \leq t_0 \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \frac{(\delta D')^2}{D^3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыновров В. Ф. и др. Физические основы надежности интегральных схем / Под ред. Ю. Г. Миллера.— М., 1976.
2. Fischer J. S.— In: Proc. 1968 Electron. Compon. Conf., 1968, p. 229.
3. Parisi G. I.— Insulation. / Circuits, 1970, v. 16, N 6, p. 27.
4. Werner J. K., Wogobey W.— In: 22nd E. C. C., Washington, D. C., 1972, New York, 1972, p. 362.
5. Клоцман С. М. и др.— ФММ, 1963, т. 16, вып. 6, с. 895.
6. Harrison L. G.— Trans. Faraday Soc., 1961, v. 57, p. 1191.
7. Колешко В. М., Белицкий В. Ф. Массоперенос в тонких пленках.— Минск, 1980.
8. Hall P. M. and Morabito J. M.— Thin Solid Films, 1978, v. 53, N 2, p. 175.
9. Fischer J. S.— J. Appl. Phys., 1951, v. 22, N 1, p. 74.
10. Бокштейн Б. С. Диффузия в металлах. М., 1978.

Поступила в редакцию
05.01.81.

Кафедра радиофизики
и электроники СВЧ

УДК 621.382.82.001

С. Г. МУЛЯРЧИК, И. И. АБРАМОВ

АЛГОРИТМ ДВУМЕРНОГО ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА БИПОЛЯРНЫХ ТРАНЗИСТОРОВ

При проектировании полупроводниковых компонентов интегральных схем все большее применение находят физико-топологические модели, в основе которых лежит численное решение уравнений непрерывности для дырок и электронов, а также уравнения Пуассона. Одной из таких задач является двумерный статический анализ биполярных транзисторов, однако затраты машинного времени для ее решения известными методами оказываются достаточно большими [1].

В статье предлагается новый алгоритм двумерного статического анализа биполярных транзисторов, позволяющий значительно сократить затраты машинного времени. Основу алгоритма составляет разработанная методика расчета «хорошего» начального приближения для концентраций дырок и электронов и для электростатического потенциала по всей структуре прибора, которые в дальнейшем уточняются с помощью итераций типа Гуммеля [2].

Математическая модель задачи после нормировки всех переменных [3] имеет вид:

$$\nabla^2 \psi = n - p - C_N, \quad (1)$$

$$\nabla \vec{j}_p = -R_p, \quad (2)$$

$$\nabla \vec{j}_n = R_n \quad (3)$$

со вспомогательными уравнениями переноса

$$\vec{j}_p = -\mu_p \cdot p \cdot \nabla \Phi_p, \quad (4)$$

$$\vec{j}_n = -\mu_n \cdot n \cdot \nabla \Phi_n \quad (5)$$

и в случае статистики Больцмана соотношениями

$$n = \exp(\psi - \Phi_n), \quad p = \exp(\Phi_p - \psi), \quad (6)$$

где ψ — электростатический потенциал; n, p — концентрации электронов и дырок; C_N — концентрация некомпенсированной донорной примеси; $\vec{j}_p, \vec{j}_n$ — векторы плотностей дырочного и электронного токов; R_p, R_n — скорости рекомбинации для дырок и электронов; μ_p, μ_n — подвижности дырок и электронов; Φ_p, Φ_n — квазиуровни Ферми для дырок и электронов.

При этом в качестве модели для подвижностей μ_p и μ_n использовалась формула работы [4]. Скорости рекомбинации описывались с по-

мощью модели Шокли — Рида — Холла [5], нормированный вид которой:

$$R = R_p = R_n = \frac{p \cdot n - 1}{\tau_n(p+1) + \tau_p(n+1)}, \quad (7)$$

где τ_p, τ_n — времена жизни дырок и электронов.

Рассмотрим предлагаемую методику выбора начального приближения для n, p и ψ . Прежде всего воспользуемся квазиравновесным предположением [6], которое с учетом уравнений (4) и (5) можем записать

$$\nabla \Phi_p \approx \vec{0}, \quad (8)$$

$$\nabla \Phi_n \approx \vec{0}. \quad (9)$$

В биполярных приборах это условие хорошо выполняется для основных носителей, поэтому при определении начального приближения для квазиуровней Ферми основных носителей будем пользоваться уравнениями (8) и (9).

Преобразуем теперь уравнение непрерывности, к примеру (2), таким образом, чтобы из него можно было определить приближение для квазиуровня Ферми неосновных носителей, в рассматриваемом случае — дырок. Подставив (4) в (2) и учтя тот факт, что всегда $\mu_p \cdot p > 0$, получим:

$$\nabla^2 \Phi_p = \frac{R}{\mu_p \cdot p} - \nabla \ln(\mu_p \cdot p) \cdot \nabla \Phi_p. \quad (10)$$

Будем полагать в (10), что

$$|\nabla \ln(\mu_p \cdot p) \cdot \nabla \Phi_p| \ll |\nabla^2 \Phi_p|. \quad (11)$$

Условие (11) является более общим по сравнению с (8), так как неравенство в (11) обеспечивается не только малостью $\nabla \Phi_p$, но и малостью величины $\nabla \ln(\mu_p \cdot p)$.

Тогда уравнение непрерывности для неосновных носителей — дырок, можно аппроксимировать

$$\nabla^2 \Phi_p \approx \frac{R}{\mu_p \cdot p} \quad (12)$$

и аналогично для электронов

$$\nabla^2 \Phi_n \approx -\frac{R}{\mu_n \cdot n}. \quad (13)$$

Однако использование (12) и (13) для определения Φ_p и Φ_n пока затруднено, так как в эти уравнения, как это следует из (6), входит электростатический потенциал. Рассмотрев две предельные ситуации, например, для уравнения (12), нормированный вид которых 1) $p \cdot n \gg 1$ и $n \gg p$, 2) $p \cdot n \rightarrow 1$ и $p \rightarrow 0$, получим с учетом (7) следующую аппроксимацию этого уравнения:

$$\nabla^2 \Phi_p \approx \frac{1}{\tau_p \cdot \mu_{po}}. \quad (14)$$

По аналогии:

$$\nabla^2 \Phi_n \approx -\frac{1}{\tau_n \cdot \mu_{no}}. \quad (15)$$

В этих уравнениях μ_{po}, μ_{no} — подвижности дырок и электронов в случае слабых полей.

Теперь начальное приближение для квазиуровней Ферми основных и неосновных носителей определяется путем решения линейных уравнений, соответственно (8), (9) и (14), (15) при стандартных граничных условиях [1]:

1) $\Phi_n = \Phi_p = V_{пр}$ — на омических контактах;

2) $\frac{d\Phi_n}{dN} = \frac{d\Phi_p}{dN} = 0$ — на других границах,

где $V_{пр}$ — прикладываемое к контакту внешнее напряжение; N — нормаль к соответствующей границе.

Области основных и неосновных носителей определяются при этом по знаку функции C_N .

Следующий этап методики определения начального приближения для n, p, ψ — это расчет начального приближения для ψ путем решения уравнения Пуассона с нелинейной правой частью:

$$\nabla^2 \psi = f_1 \cdot \exp(\psi) - f_2 \cdot \exp(-\psi) - C_N, \tag{16}$$

где $f_1 = \exp(-\Phi_n)$, $f_2 = \exp(\Phi_p)$ становятся известными после решения задачи определения начального приближения для Φ_n и Φ_p . Граничные условия при решении (16) имеют следующий вид:

- 1) $\psi = V_{пр} + \text{sign}\{C_N\} \cdot \ln \left[\sqrt{\left(\frac{C_N}{2}\right)^2 + 1} + \frac{|C_N|}{2} \right]$ — на омических контактах;
- 2) $\frac{d\psi}{dN} = 0$ — на других границах.

В качестве начального приближения для ψ при решении (16) методом Ньютона используются значения, определяемые из соотношения

$$\psi = \Phi + \text{sign}\{C_N\} \cdot \ln \left[\sqrt{\left(\frac{C_N}{2}\right)^2 + 1} + \frac{|C_N|}{2} \right],$$

где $\Phi = \Phi_n$ для областей, в которых n являются основными носителями и $\Phi = \Phi_p$ для оставшихся областей. Это соотношение получено из предположения квазинейтральности по всей структуре прибора.

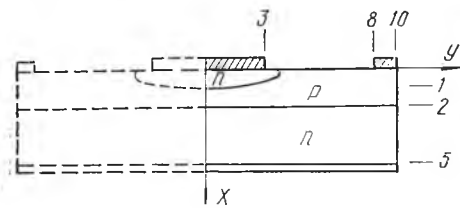
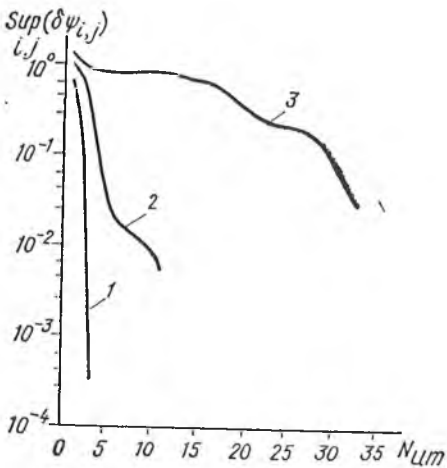


Рис. 1. Структура анализируемого транзистора

Рис. 2. Графики, характеризующие скорость сходимости алгоритма:
1 — $V_{эб} = -0,7\text{ В}$, $V_{кб} = 1\text{ В}$; 2 — $V_{эб} = -0,8\text{ В}$, $V_{кб} = 1\text{ В}$; 3 — $V_{эб} = -0,9\text{ В}$, $V_{кб} = 1\text{ В}$



И последний этап в расчете начального приближения: по найденным значениям ψ, Φ_n, Φ_p из (6) определяются приближения для n и p .

Далее осуществляется численное решение полной системы уравнений (1) — (3) относительно переменных n, p, ψ с использованием итераций Гуммеля в виде:

- 1) решение конечно-разностных аналогов уравнений (2) и (3) на разностной сетке относительно n и p при фиксированном ψ ;
- 2) решение квазилинеаризованного конечно-разностного аналога уравнения (1) на разностной сетке относительно ψ при фиксированных n и p .

Эти итерации повторяются до полной сходимости итерационного процесса. В качестве критерия сходимости используется критерий неизменности выходного тока.

Параметры профиля легирования

C_E	C_B	C_C	A_1	A_2	B
см^{-3}	см^{-3}	см^{-3}	мкм^{-1}	мкм^{-1}	—
$5 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{18}$	$5 \cdot 10^{16}$	7,008592	2,298513	0,1646272

Изложенный алгоритм реализован в программе двумерного анализа биполярных транзисторов для ЕС ЭВМ на языке ФОРТРАН-IV, названной COTDAB. При разностной аппроксимации задачи использовалась интегральная формулировка типа Шарфеттера — Гуммеля [7]. Для решения всех систем линейных алгебраических уравнений использовался циклический метод Чебышева [8].

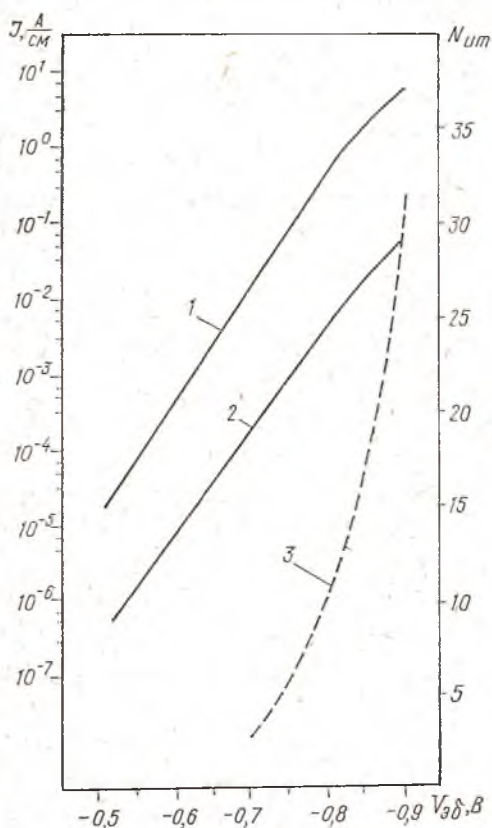


Рис. 3. Рассчитанные вольт-амперные характеристики (1 — ток коллектора, 2 — ток базы) и кривая 3, характеризующая соответствующие вычислительные затраты ($V_{кб} = 1$ В)

го начального приближения. Так, к примеру, в работе [9] указывается, что при смещении $V_{эб} = -0,75$ В и $V_{кб} = 0,5$ В требуется около 120 итераций Гуммеля (в этом эксперименте $J_K \approx 0,3$ А/см).

Разработанный алгоритм может быть положен в основу программ анализа более сложных интегрированных структур, так как характеризуется высокой скоростью сходимости и экономичен, как и алгоритм Гуммеля, по требуемым объемам памяти.

ЛИТЕРАТУРА

1. Носов Ю. Р., Петросянц К. О., Шилин В. А. Математические модели элементов интегральной электроники. — М., 1976.
2. Gummel H. K. — IEEE Trans., 1964, v. ED-11, № 10, p. 455.
3. Petersen O. G., Rikoski R. A., Cowles W. W. — Solid-State Electronics, 1973, v. 16, № 2, p. 239.
4. Caughey D. M., Thomas R. F. — Proc. IEEE, 1967, v. 55, № 12, p. 2192.
5. Shockley W., Read W. — Phys. Rev., 1952, v. 87, № 9, p. 835.
6. Миддлбрук Р. Введение в теорию транзисторов. — М., 1960.
7. Sharfetter D. L., Gummel H. K. — IEEE Trans., 1969, v. ED-16, № 1, p. 64.
8. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М., 1975.
9. Slotboom J. W. — IEEE Trans., 1973, v. ED-20, № 8, p. 669.

Поступила в редакцию
16.03.80

Кафедра радиофизики
и электроники СВЧ

ОБ ОЦЕНКЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ КИХ-ФИЛЬТРОВ ПРИ АНТЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Нерекурсивные цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) могут применяться при расчете характеристик антенных систем по результатам измерения амплитудно-фазового распределения (АФР) поля в ближней зоне, например, для цифровой фильтрации входных данных [1].

Задание длин M, N импульсной характеристики $H(m, n)$ КИХ-фильтров в основном определяет ошибку аппроксимации частотной характеристики синтезируемого фильтра. Для заданных значений M и N , вида симметрии импульсной и частотной характеристик КИХ-фильтров, длины входного массива I, K , характеристик используемой ЭВМ общего назначения существенен выбор способа цифровой фильтрации, обеспечивающего наибольшее быстродействие при минимальном использовании емкости оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) ЭВМ. Недостаток работ [2—4], посвященных разработке способов цифровой фильтрации, в сложности приводимых оценок быстродействия этих способов.

В настоящей работе приводятся простые оценки быстродействия различных способов цифровой фильтрации с помощью КИХ-фильтров, позволяющие избрать способ цифровой фильтрации при антенных измерениях с учетом как характеристик ЭВМ и ВЗУ, так и длины обрабатываемых массивов.

В качестве способов цифровой фильтрации рассмотрим линейную, круговую и секционированные свертки. Для обеспечения минимальной задержки выходной информации при малой величине вносимых амплитудно-фазовых искажений реализация цифровых фильтров при антенных измерениях предпочтительнее с помощью линейной и секционированной свертки. При этом фильтрация может осуществляться непосредственно при вводе обрабатываемых результатов измерения АФР поля в ЭВМ. Представляется важным определение границ использования этих способов.

Пусть X, Y — массивы до и после фильтрации; используется ЭВМ со временем сложения и умножения 4-байтовых слов T_+, T_* , емкостью ОЗУ в V 4-байтовых слов и ВЗУ с прямым доступом со временем поиска записи T_n и скоростью передачи информации W байт/с. БПФ с применением ВЗУ осуществляется по методике, предложенной в [5] с использованием алгоритма с основанием 2. В зависимости от длин массивов X, Y рассмотрим три случая.

1. Массивы X, Y, H находятся в ОЗУ. При действительном массиве H и комплексных массивах X, Y значение V должно удовлетворять условию $V > 2 \cdot L \cdot J + M \cdot N + 2 \cdot I \cdot K$. Оценки времени осуществления линейной $T_{л1}$ и круговой $T_{к1}$ свертки:

$$T_{л1} = M \cdot N \cdot I \cdot K \cdot T_1, \quad (1)$$

$$T_{к1} = 16 \cdot T_2 \cdot (L + r_1) \cdot (J + r_2) \cdot \log_2 [(L + r_1) \cdot (J + r_2)] + 2 \cdot T_1 \cdot (L + r_1) \cdot (J + r_2), \quad (2)$$

где $T_2 = T_+ + T_*$; $T_1 = 2 \cdot T_* + T_+$; r_1, r_2 — числа нулевых отсчетов, добавляемых к значениям L и J для получения длины массива Y , кратной степени 2. Для секционированной свертки при длине секции $I_1 \cdot K_1$ и целом числе секций без учета времени расчета частотной характеристики фильтра имеем

$$T_{с1} = 2 \cdot I_1 \cdot K_1 \cdot \frac{(L + r_1) \cdot (J + r_2)}{(I_1 - M + 1) \cdot (K_1 - N + 1)} \cdot [8 \cdot T_2 \cdot \log_2 (I_1 \cdot K_1) + 2 \cdot T_2]. \quad (3)$$

При выполнении упрощающих условий

$$M = N, L + r_1 = J + r_2 = 2^q, \quad (4)$$

$$I_1 = K_1 = 2^{Q_1}, \quad I_2 = 0,5 \cdot T_1,$$

пренебрежении временем перемножения спектров для круговой и секционированной сверток и длине секции, значительно превышающей длину фильтра, линейная свертка быстрее секционированной при

$$M \leq \frac{2^{Q+2}}{I} \sqrt{Q} \quad (5)$$

и быстрее круговой при

$$M \leq \frac{2^{Q+2}}{I} \sqrt{Q_1}. \quad (6)$$

Однако применение секционированной свертки нецелесообразно, ибо, как следует из соотношений (2)–(4), секционированная свертка оптимальнее круговой лишь при малых значениях M .

2. Массив Y находится в ВЗУ. Предполагается, что $V > 2 \cdot I \cdot K + M \cdot N$, $T_{л1} = T_{л2}$, а $T_{с2} = T_{с1}$. Оценка времени круговой свертки увеличится на время перемножения спектров, равное при запоминании одной строки из $2 \cdot (L + r_1)$ слов на одной записи в ВЗУ величине $T_* = 2 \cdot (L + r_1)^2 \cdot T_1 + 3(L + r_1) \cdot (T_n + 8(L + r_1)/W)$, и на время транспонирования матрицы промежуточных результатов, равное при считывании из ВЗУ в ОЗУ по

2^о строк одновременно величине

$$T_{тр} = \text{о. к.} \left[\frac{\log_2(L + r_1)}{p} \right] \cdot 6 \cdot \left[T_n + 8 \times \frac{(L + r_1)}{W} \right] \cdot (L + r_1),$$

где о. к. — округление к большему ближайшему целому числу. Следовательно, с учетом (4) имеем

$$T_{к2} = T_2 \cdot 2^{2Q+2} \cdot (8Q + 1) + 3 \cdot \left(T_n + \frac{2^{Q+3}}{W} \right) \cdot 2^Q \cdot \left[1 + \text{о. к.} \left(\frac{Q}{p} \right) \cdot 2 \right]. \quad (7)$$

Теперь требование $T_{с2} > T_{к2}$ невыполнимо, и в расчет принимается оценка (6).

3. Массивы X , Y не вмещаются в ОЗУ. Выполняются следующие условия: $3M \cdot N < V < M \cdot N + 2 \cdot I \cdot K$, $T_{к3} = T_{к2}$, $T_{с3} = T_{с2}$. Время $T_{с3}$ увеличится по сравнению с $T_{с2}$ на время ввода-вывода, зависящее как от способа осуществления секционированной свертки, так и от размеров блоков. Пусть имеется возможность запомнить в ОЗУ ряд блоков. Тогда время ввода-вывода при $L + r_1$, обеспечивающем целое число блоков, будет

$$T_c = \frac{L + r_1}{K_1 - N + 1} \cdot 2 \cdot I_1 \cdot T_n + 16 \cdot (L + r_1) \cdot (J + r_2)/W,$$

а суммарное время

$$T_{с3} = \frac{2^{2Q+2Q_1+2}}{(2^{Q_1} - M + 1)^2} \cdot T_2 \cdot (8Q_1 + 1) + \frac{2^{Q+Q_1+1}}{2^{Q_1} - M + 1} + \frac{2^{2Q+4}}{W}. \quad (8)$$

Из сравнения (8) и (7) при условии $2^{Q_1} \gg M - 1$ следует, что $T_{с3} < T_{к3}$. Таким образом, в случае 3 целесообразно применение секционированной и линейной сверток. Используя подстановки $W \cdot T_2 = 2^1$, $\frac{T_n}{T_2} = 2^{13}$, типичные для ЭВМ системы ЕС, из (8) и (1) получаем при пренебрежении временем передачи данных ОЗУ — ВЗУ и условии $8Q_1 \gg 1$ условие применения линейной свертки в виде

$$M < \frac{2^{Q+2}}{I} \sqrt{Q_1 + 2^{9-Q}}. \quad (9)$$

Итоговые результаты по выбору способа реализации КИХ-фильтров при антенных измерениях представлены в таблице, где символами «л»,

Рекомендации по выбору способа реализации КИХ-фильтров

Массивы	Длина фильтра M	Границы разделения видов сверток	Вид сверток
X, Y в ОЗУ	$\leq$	$\frac{2^{Q+2}}{I} \sqrt{Q}$	л
	$>$		к
Y в ВЗУ	$\leq$	$\frac{2^{Q+2}}{I} \sqrt{Q_1}$	л
	$>$		с
X, Y в ВЗУ	$\leq$	$\frac{2^{Q+2}}{I} \sqrt{Q_1 + 2^{9-Q}}$	л
	$>$		с

«к», «с» обозначены линейная, круговая и секционированная свертки. Отметим, что при симметричности импульсной характеристики фильтра, оценки (5), (6), (9) следует увеличить в пользу линейной свертки пропорционально уменьшению числа операций умножения.

Таким образом, в данной работе получены как полные, так и асимптотические оценки быстродействия трех способов фильтрации с помощью КИХ-фильтров, пригодные для выбора способа цифровой фильтрации в зависимости от емкости ОЗУ ЭВМ, характеристик используемых ВЗУ и процессоров, длины импульсной характеристики КИХ-фильтра и длины обрабатываемого массива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алешкевич Н. Н., Будаев А. Г., Курило В. С. и др.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1978, № 1, с. 81.
2. Hunt B. R.—IEEE Trans. Computers, 1972, v. C-21, № 11, p. 1219.
3. Twogood R. E., Ekstrom M. P., Mitra S. K.—IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, 1977, p. 670.
4. Twogood R. E., Ekstrom M. P., Mitra S. K.—IEEE Trans. Circuits and Systems, 1978, v. CAS-25, № 5, p. 260.
5. Twogood R. E., Ekstrom M. P.—IEEE Trans. Computers, 1976, v. C-25, № 9, p. 950.

Поступила в редакцию
31.03.80

НИИ ПФП

УДК 681.118.1

К. П. КУРЕЙЧИК, В. Л. МАКАРОВ

ТАЙМЕР ЭЛЕКТРОТЕРМИЧЕСКОГО АТОМИЗАТОРА

Применение электротермических атомизаторов в ряде случаев позволяет получить более высокие метрологические показатели атомно-абсорбционных анализаторов по сравнению с пламенными [1—3]. Такие атомизаторы работают в четырех основных режимах: сушка — выпаривание влаги из пробы; термическая обработка — озоление органических соединений; атомизация — испарение пробы (получение атомных паров анализируемого элемента); обжиг — кратковременный нагрев испарителя до температуры, при которой улетучиваются остатки пробы. Длительность каждого режима находится в интервале от 0,2 с до 2 мин при изменении температуры от 60 до 3000 °C [4, 5]. Стабильность задания временных интервалов обработки пробы определяет воспроизводимость результатов измерения, что является весьма важным при массовом контроле [2, 5].

Авторы настоящей работы использовали для управления электротермическим атомизатором устройство, описанное в [6]. Однако, как показала практика, указанный таймер обеспечивал погрешность задания вре-

менных интервалов обработки пробы $\sim 2\%$, что вносило большие ошибки (до 20% в зависимости от рода атомизируемого вещества) на воспроизводимость результата. Следует отметить, что таймеры, построенные на основе электромагнитных реле (как и устройство, описанное в [6]) принципиально не могут обеспечить высокой точности, и, кроме того, габариты таких устройств велики.

В настоящей работе предлагается таймер, обеспечивающий высокую точность установки длительности формируемых режимов и стабильность работы электротермического атомизатора.

Рассмотрим принцип работы таймера, воспользовавшись для этого электрической схемой (рис. 1) и временными диаграммами работы (рис. 2).

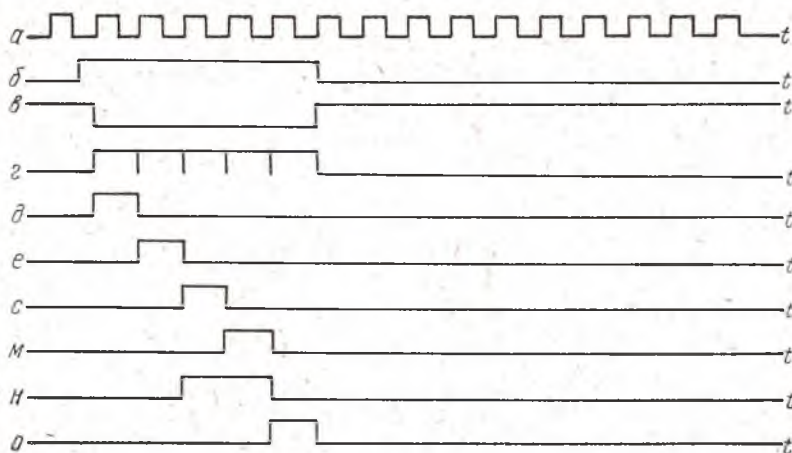


Рис. 2. Временные диаграммы работы таймера

В исходном состоянии на шину «Пуск» подан потенциал логического нуля (рис. 2, б), что приводит к установке в «1» триггера Д8S-1, а Д8S-2, Д9S-1, Д9S-2, Д10S-2, Д10S-1 в «0». Пересчетные синхронные двигатели Д1 и Д4, работающие в коде 8-4-2-1, также установлены в «0» через схемы Д5-1, Д6-4, Д6-2.

На вход Д5-2 поступают тактовые импульсы с $\tau_u = 20$ мс (рис. 2, а). Эти импульсы, но в обратной полярности поступают также и на вход Д1.

Длительность режимов сушки, озоления и выжигания пробы управляется соответственно программными переключателями ПП1, ПП2, ПП5 через 0,2 с в диапазоне 0,2—99,8 с.

Длительность режима атомизации двухступенчатая: ПП3 устанавливает длительность задержки измерения (при начавшейся атомизации) в диапазоне 0,02—9,980 с, а ПП4 — режим измерения (при продолжающейся атомизации) в диапазоне 0,2—99,8 с.

При подаче на шину «Пуск» логической «1» (рис. 2, б) ближайшим положительным перепадом тактовых импульсов (рис. 2, а), поступающих на вход Д5-2, триггер Д8S-1 переключается в «0» (рис. 2, в), а триггер Д8S-2 — в состояние «1» (рис. 2, д), что является началом формирования временного интервала t_1 — «Сушка» пробы (рис. 2, д).

Одновременно на шинах «Уст. 0» синхронных пересчетных схем Д1 и Д4 устанавливается «1», поступающая с инверсного выхода триггера Д8-1 через инверторы Д6-1, Д6-2, приводящая к запуску таймера (рис. 2, г). Пересчетными схемами Д1—Д4, работающими по перепаду 1—0, начинается подсчет тактовых импульсов. Эта операция продолжается до тех пор, пока число набранного программными переключателями ПП1 не сравняется с числом, записываемым Д1—Д4. При равенстве чисел на выходе инвертора Д12-1 формируется отрицательный перепад на-

пряжения, приводящий к преобразованию триггера Д8S-2 в «0», а триггеры Д9S-1 в «1» (рис. 2, д, е).

Триггер Д8S-1 удерживается в прежнем состоянии за счет поступления «0» на его вход Д с выхода триггера Д10S-2. Одновременно с выхода инвертора Д7 перепад 0—1 через инверторы Д5-1, Д6-1, Д6-2 сбрасывает в «0» схемы Д1—Д4, в результате чего таймер готов к формированию интервала t_2 «Озоление» пробы (рис. 2, з).

Потенциал «1», поступающий с выхода Д9S-1 на инвертор Д12-2, разрешает формирование временного интервала t_2 , устанавливаемого ПП2. Формирование t_2 аналогично формированию t_1 (рис. 2, е, з). Временные интервалы, соответствующие задержке измерения (рис. 2, с), измерению t_3 (рис. 2, м), выжигу t_4 (рис. 2, о) формируются подобным образом.

Инвертор Д11-3, объединяющий выходы триггеров Д9S-2 и Д10S-1, формирует интервал «Атомизация» пробы (рис. 2, н).

После окончания формирования (рис. 2, о) интервала «Выжиг» пробы триггер Д8S-1 устанавливается в «1», триггер Д10S-2 в «0», и на схему, управляющую запуском таймера, устанавливается «0». Таймер останавливается. Последующий запуск таймера осуществляется подачей на шину «Пуск» потенциала «1».

Сформированные временные интервалы через инверторы Д11-1, Д11-2, Д11-3, Д11-4 поступают на блок управления электротермическим атомизатором, состоящий из четырех регистров памяти емкостью 12 бит каждый, соединенных шинами записи с блоком программных переключателей типа ПП103ХВ, а выходными шинами с коммутатором кодов, выход которого подключен к цифроаналоговому преобразователю (ЦАП). В регистры памяти записывается код температуры испарителя и коммутируется на ЦАП временными интервалами t_1 — t_4 . Выходное напряжение ЦАП управляет температурой испарителя аналогично [6].

Описанное устройство позволяет регулировать температуру испарителя в пределах 0—3000 °С через 3—5 °С в зависимости от его конструкции и материала. Для стеклографитовых испарителей типа СУ-2500 наблюдалась почти линейная зависимость температуры от управляющего напряжения, при этом изменение управляющего напряжения на 5 мВ вызывало изменение температуры ~3 °С.

Электронная схема описанного таймера, выполненная на микросхемах 155 серии, полностью размещается на стандартной плате 140×150 мм². Точность работы, а следовательно, и воспроизводимость результатов измерения, зависит от стабильности тактовых импульсов. Кварцевая стабилизация позволяет минимизировать погрешность формирования до $5 \cdot 10^{-5}$ %, а использование частоты промышленной сети в качестве тактовой увеличивает погрешность до 0,5 %. Средняя погрешность воспроизведения результатов измерения 100 проб для первого и второго случая не хуже ~0,5 %.

Разработанный таймер длительное время устойчиво и надежно работает в составе импульсного атомно-абсорбционного спектрофотометра с непламенной атомизацией и компенсацией неселективных помех.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gamischek S., Lengar L.— Anal. chim. acta, 1974, v. 73, № 1.
2. Kerber J.— Atom. Absorpt. Newstett, 1973, v. 12, № 4.
3. Muzarelli A.— Anal. chim. acta, 1974, v. 69, № 1.
4. Thamersan D.— Scan, 1973, № 2.
5. Разумов В. А.— ЖПС, 1976, т. 31, с. 6.
6. Афанасьев В. А.— Заводская лаборатория, 1976, т. 6, с. 46.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОИЧНОГО ЛОГАРИФМА

Известны устройства [1, 2], предназначенные для вычисления двоичных логарифмов, в основу которых положен разностно-итерационный процесс суммирования приращений констант вида $\alpha_i = \log_2(1 + q_i 2^{-i})$. Быстродействие таких устройств определяется количеством итерационных шагов, численно равным разрядности аргумента. Кроме того, устройства требуют хранения в ПЗУ двух массивов констант: $\alpha_i = \log_2(1 + 2^{-i})$ и $\alpha_j = \log_2(1 - 2^{-j})$. Несколько иной подход к реализации итерационного процесса позволяет сократить объем ПЗУ и значительно ускорить процесс вычисления логарифма.

Пусть заданный аргумент представлен n -разрядным нормализованным двоичным числом ($2^{-1} \leq Z < 1$). Представим Z в форме:

$$Z = 2^{-1} \prod_{i=1}^k (1 + 2^{-l_i})^{q_i}, \quad (1)$$

где $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l_i \leq n$, $q_i \in \{+1, -1\}$.

Очевидно, что для любого значения Z найдется такая последовательность операторов q_i , что определяемая ими сумма констант вида $\alpha_i = q_i \log_2(1 + 2^{-l_i})$ будет стремиться к значению искомой функции:

$$y = \log_2 Z = -1 + \sum_{i=1}^k q_i \log_2(1 + 2^{-l_i}). \quad (2)$$

Оператор q_i и число l_i подбираются таким образом, чтобы очередное приближение аргумента, определяемое зависимостью (1), $Z'_{i+1} = 2^{-1} \prod_{j=1}^{i+1} (1 + 2^{-l_j})^{q_j} = Z'_i (1 + 2^{-l_{i+1}})^{q_{i+1}}$ оказалось как можно ближе к заданному аргументу Z . Оператор q_{i+1} определяется знаком частичного остатка — разностью между заданным аргументом и очередным его приближением;

$$q_{i+1} = \begin{cases} +1, & \text{если } S'_i > 0 \\ -1, & \text{если } S'_i < 0 \\ \text{останов,} & \text{если } S'_i = 0, \end{cases}$$

где $S'_i = Z - Z'_i$.

Очередное приближение аргумента и значение частичного остатка в зависимости от значения оператора q_i , найденного по результатам предыдущей итерации, определяется следующими соотношениями,

$$Z'_i = Z'_{i-1} (1 + 2^{-l_i}), \quad S'_i = S'_{i-1} - Z'_{i-1} 2^{-l_i}, \quad \text{если } q_i = +1, \quad (3)$$

$$Z'_i = \frac{Z'_{i-1}}{1 + 2^{-l_i}}, \quad S'_i = \frac{S'_{i-1} + Z'_{i-1} 2^{-l_i}}{1 + 2^{-l_i}}, \quad \text{если } q_i = -1$$

с начальными условиями $Z'_0 = 2^{-1}$, $S'_0 = Z - 2^{-1}$.

Для устранения необходимости проведения операции деления в соотношениях (3) при $q_i = -1$, можно вместо величин Z , Z'_i и S'_i пользоваться «деформированными» величинами; $Z_i^* = K_i Z$; $Z_i = K_i Z'_i$, $S_i = K_i S'_i$, где

$K_i = \prod_{j=1}^i \bar{K}_j$, а $\bar{K}_i = \begin{cases} 1, & \text{если } q_i = +1 \\ (1 + 2^{-l_i}), & \text{если } q_i = -1. \end{cases}$ Иначе говоря, можно вме-

сто очередного приближения аргумента при $q_k = -1$ $Z'_k = \frac{Z'_{k-1}}{1 + 2^{-l_k}}$ рассматривать его «деформированное» значение $Z_k = Z'_k (1 + 2^{-l_k}) = Z'_{k-1}$ при

условии умножения на такой же коэффициент $(1 + 2^{-l_k})$ заданного аргумента Z , при определении частичного остатка.

Скорость сходимости итерационного процесса в большой степени зависит от правильного определения очередного числа l_{i+1} . Это число следует подбирать так, чтобы очередной частичный остаток, определяемый соотношениями

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_i - Z_i 2^{-l_{i+1}}, \text{ если } q_i = +1 \\ S_{i+1} &= S_i + Z_i^* 2^{-l_{i+1}}, \text{ если } q_i = -1 \end{aligned} \quad (4)$$

был, по крайней мере, в два раза меньше предыдущего остатка. Это произойдет в том случае, когда при выбранном значении l_{i+1} в процессе сдвига вправо величины Z_i (или Z_i^*) ее старший значащий бит совпадает со старшим значащим битом предыдущего остатка S_i .

Чтобы повысить точность вычисления величины S_i , вместо сдвига вправо величины Z_i (или Z_i^*) целесообразно сдвигать влево на такое же количество разрядов значение предыдущего остатка. В этом случае операция сдвига не сопровождается потерей информации за счет выхода значащих разрядов за разрядную сетку. При этом количество разрядов m_i , на которое надо сдвинуть влево значение предыдущего остатка, чтобы совпадали старшие значащие биты в величинах S_{i-1} и Z_{i-1} , определяет значение очередной степени двойки в выражении (1): $l_i = l_{i-1} + m_i$.

Операцию сдвига частичного остатка до совпадения старших значащих битов в величинах S_i и Z_i можно назвать нормализацией частичного остатка.

Таблица 1

i	q_i	l_i	Z_i	Z_i^*	S_i	y_i
0		0	0,1000000000	0,1110001000	0,0110001000	-1,0000000000
1	+1	1	0,1000000000	0,1110001000	0,1100010000	-1,0000000000
			+0,0100000000		-0,1000000000	+0,1001010111
			0,1100000000		-0,0100010000	-0,0110101001
2	+1	2	0,1100000000	0,1110001000	0,1000100000	-0,0110101001
			+0,0011000000		-0,1100000000	+0,0101001010
			0,1111000000		-0,0011100000	-0,0001011111
3	-1	4	0,1110000000	0,1110001000	-0,1110000000	-0,0001011111
			+0,0000111000	+0,0000111000	+0,1110001000	-0,0001011010
			0,1111000000	0,1111000000	+0,0000001000	-0,0010111001
4	+1	10	0,1111000000	0,1111000000	0,1000000000	-0,0010111001
			+0,0000000000		-0,1111000000	+0,0000000001
			0,1111000000		-0,0111000000	-0,0010111000

Таким образом, рекуррентные соотношения алгоритма могут быть представлены в форме:

$$q_i = \begin{cases} +1, & \text{если } S_{i-1} > 0 \\ -1, & \text{если } S_{i-1} < 0 \\ \text{останов,} & \text{если } S_{i-1} = 0 \end{cases} ; l_i = l_{i-1} + m_i$$

$$\begin{array}{l|l}
\text{Если } q_i = +1, \text{ то;} & \text{Если } q_i = -1, \text{ то;} \\
Z_i = (1 + 2^{-l_i}) Z_{i-1}, & Z_i = Z_{i-1} \\
Z_i^* = Z_{i-1}^* & Z_i^* = (1 + 2^{-l_i}) Z_{i-1}^* \\
S_i = (S_{i-1})_H - Z_{i-1}, & S_i = (S_{i-1})_H + Z_{i-1}^* \\
y_i = y_{i-1} + \log_2(1 + 2^{-l_i}). & y_i = y_{i-1} - \log_2(1 + 2^{-l_i}); i = \overline{1, k}
\end{array}$$

с начальными условиями $Z_0 = 2^{-1}$, $Z_0^* = Z$, $S_0 = Z - 2^{-1}$, $y_0 = -1$, $l_0 = 0$. Результат: $y_k = \log_2 Z$. Максимальное значение k номера итерации i — это номер такой итерации, для которой $l_i > n \cdot (S_{i-1})_H$ обозначает нормализованную величину S_{i-1} .

Т а б л и ц а 2

Разрядность аргумента, n	Среднее число итераций, k	Среднеквадратическая ошибка, ско	Максимальная погрешность, абс. значение
10	4,2	0,92	3
11	4,6	0,69	2
12	4,9	0,75	2
13	5,3	0,76	2
14	5,7	0,79	3
15	6,1	0,76	2
16	6,5	0,90	3
17	6,9	0,88	3
18	7,3	0,95	4
19	7,7	0,94	3
20	8,1	1,03	4

Последовательное уменьшение частичного остатка (по крайней мере, в два раза после каждой итерации) гарантирует сходимость итерационного процесса. Табл. 1 иллюстрирует порядок выполнения алгоритма для аргумента $Z = (0,1110001000)_2$.

Алгоритм был подвергнут экспериментальной проверке, для чего на ЭВМ ЕС-1022 моделировалась специализированная ЦВМ с заданной разрядной сеткой ($n=10-20$). На этой ЦВМ по описанному алгоритму вычислялась функция $y = \log_2 Z$ для всех 2^n значений аргументов, возможных при данной разрядности n . Результаты эксперимента сведены в табл. 2, в которой погрешности показаны в единицах младшего разряда регистра.

Результаты эксперимента подтвердили значительно более быструю (в среднем в 2,5 раза) сходимость итерационного процесса по сравнению с ранее описанными алгоритмами при уменьшении аппаратных затрат за счет использования в ПЗУ одного массива констант.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оранский А. М., Немытов Б. В. А. с. 448459 (СССР). Цифровое устройство для логарифмирования двоичных чисел. — Опубликовано в Б. И., 1975, № 40, с приоритетом от 02.03.72.

3. Оранский А. М. Аппаратные методы в цифровой вычислительной технике. — Минск, 1977, с. 158.

Поступила в редакцию
05.05.80

Кафедра ЭММ

ЦИФРО-АНАЛОГОВОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ УСЛОВНЫХ СРЕДНИХ

При некоторых исследованиях возникает необходимость оценить меру статистической зависимости между двумя случайными сигналами. Однако применяемые методы корреляционного анализа, основанные на измерении коэффициента корреляции между сигналами, подчас оказываются малоэффективными или вообще неприменимы. В таких случаях статистическая зависимость должна характеризоваться линией регрессии (1) и корреляционным отношением (2):

$$\Phi(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y \omega(y/x, \tau) dy, \quad (1)$$

$$P_{yx}(\tau) = (\langle \Phi^2(x, \tau) \rangle)^{1/2} / \sigma_y. \quad (2)$$

Следует отметить, что применение методов регрессионного анализа сдерживается отсутствием специальной аппаратуры с достаточно высокой точностью измерения и сравнительной простотой практической реализации. Описанные в литературе аналоговые методы [1—4] вычисления линии регрессии имеют низкую точность, а чисто цифровые методы [4, 5] сложны в реализации, так как в качестве усредняющего устройства требуют алгебраического сумматора. В настоящей работе предлагается цифро-аналоговый регрессометр, в котором алгебраический симматор заменен аналоговым интегратором, что позволило значительно упростить схему регрессометра и добиться при этом необходимой точности измерения (рис. 1).

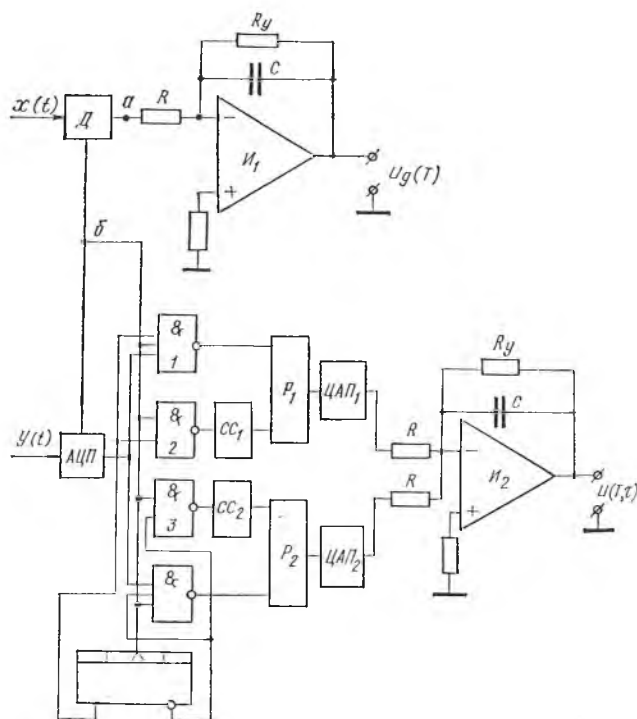


Рис. 1. Функциональная схема цифро-аналогового регрессометра:

Д — дискриминатор; АЦП — аналого-цифровой преобразователь; СС — схема сброса регистра в начальное состояние; Р — регистр; ЦАП — суммирующий цифро-аналоговый преобразователь; И — интегратор

Рассмотрим предлагаемый метод измерения линии регрессии. Для стационарных эргодических процессов $x(t)$ и $y(t)$ усреднение по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по времени одной реализации, т. е. формулу (1) заменить формулой (3):

$$\Phi^*(x, \tau) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t + \tau) \Big|_{x(t)=x} dt \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t_i + \tau) \Big|_{x(t)=x}, \quad (3)$$

где $\Phi^*(x, \tau)$ — оценка линии регрессии; x — уровень дискриминации; t_i — корни уравнения $x(t) = x$.

Так как выборки процесса $y(t)$ представляют собой импульсы с амплитудой $y(t_i + \tau)$ и длительностью t_u , результат их усреднения интегратором представляет собой оценку линии регрессии лишь с точностью до множителя N — числа переходов процессом $x(t)$ уровня дискриминации x , который в зависимости от уровня дискриминации меняется в широких пределах. При использовании интегратора, выходное напряжение регрессометра

$$U(T, \tau) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t_i + \tau) dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N y(t_i + \tau) t_u = \langle N \rangle t_u \Phi^*(x, \tau). \quad (4)$$

Чтобы избавиться от этого множителя, необходимо разделить (4) на постоянную составляющую импульсов с дискриминатора (5):

$$U_g(T) = \frac{1}{T} \int_0^T U_g(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N U_g t_{ug} = \langle N \rangle U_g t_{ug}, \quad (5)$$

$$\frac{U(T, \tau)}{U_g(T)} = \frac{t_n}{U_g t_{ug}} \Phi^*(x, \tau) = k \Phi^*(x, \tau). \quad (6)$$

Так как t_u , U_g , t_{ug} — постоянные величины (рис. 2), то, подбирая их таким образом, чтобы $k=1$, получим, что результат деления будет представлять собой оценку линии регрессии. Таким образом, алгоритм нахождения точек линии регрессии является результатом деления постоянной составляющей выборок $y(t_i + \tau)$ процесса $y(t)$ на постоянную составляющую импульсов с дискриминатора.

Для того, чтобы повысить точность определения величины постоянной составляющей, необходимо удлинить импульсы, поступающие на интеграторы. Однако в некоторые моменты времени при этом возможно перекрытие импульсов, что приведет к потере части постоянной составляющей и ошибке в определении $\Phi^*(x, \tau)$. Чтобы устранить это при определении $U(T, \tau)$ в схеме имеются два одинаковых регистра P_1 и P_2 , в которые с помощью триггера, находящегося в счетном режиме, и системы клапанов 1—4 поочередно записываются выборки процесса $y(t)$. При этом длительность импульса t_u можно увеличить до предельного значения $1/f_B$, где f_B — верхний срез полосы частот, занимаемый процес-

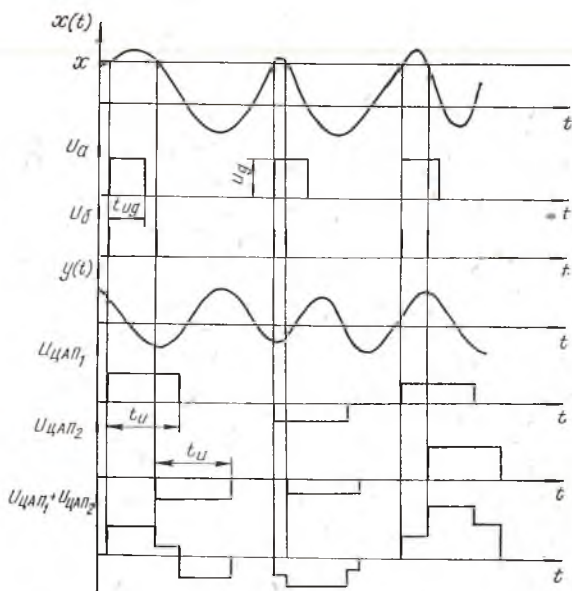


Рис. 2. Временные диаграммы напряжений в основных точках цифро-аналогового регрессометра

сом $x(t)$, что позволяет существенно уменьшить погрешность интегрирования. Схема сброса через время t_u устанавливает регистр в начальное состояние, которое соответствует нулевому напряжению на выходе ЦАП. Для устранения перекрытия импульсов, поступающих на интегратор И₁, они вырабатываются дискриминатором лишь при пересечении процессом $x(t)$ уровня дискриминации снизу. В интеграторах параллельно конденсатору C включено сопротивление R_y . При таком включении интегратор работает аналогично фильтру низких частот, что существенно облегчает методику измерения, так как отсутствует дрейф нуля интегратора.

На основании этой функциональной схемы изготовлен макет регрессометра и экспериментально проверен предложенный метод. Максимальная ошибка определения ординат линии регрессии при измерениях не превышала 5 %, причем, увеличивая постоянную времени интегрирования интеграторов, погрешность можно еще более уменьшить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирьянов Г. К.— Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1967, т. 10, № 11.
2. Тюрин П. Г. Об экспериментальном нахождении линии регрессии стационарных процессов.— Труды I Всесоюзного симпозиума: Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов.— М., 1968.
3. Демкин Л. П., Тюрин П. Г.— В сб.: Морское приборостроение. Сер. акустика, 1973, вып. 3.
4. Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов.— М., 1972.
5. Чеголин П. М., Пойда В. Н. Методы, алгоритмы и программы статистического анализа.— Минск, 1971.

Поступила в редакцию
12.05.80

Кафедра радиофизики
и электроники СВЧ

УДК 621.793.184

И. Г. НЕКРАШЕВИЧ, В. А. ЛАПШИН

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ, ЭРОЗИОННЫМИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ВАКУУМНОЙ ДУГИ

Основными характеристиками вакуумного дугового разряда являются электрическая мощность, выделяющаяся в дуговом промежутке, тепловая мощность, рассеиваемая на электродах и скорость разрушения электродов. Изучение этих характеристик актуально в связи с интенсивными исследованиями в нашей стране [1—3] и за рубежом [4—6] новых типов электродуговых устройств таких, как сильноточные коммутационные системы, электродуговые нагреватели газа и ускорители плазмы.

Следует отметить, что особенный интерес представляет выяснение взаимосвязи между электрическими характеристиками дугового разряда, скоростью эрозии электродов и их физическими свойствами, а также тепловыми потоками, рассеиваемыми в электродах. Решение этой задачи позволит уточнить представление об основных физических процессах, протекающих в дуге, правильно выбрать режим работы и материалы электродов при создании новых приборов и технологических процессов, в основе работы которых используется дуговой разряд.

Целью работы явилось изучение взаимосвязи катодного падения потенциала в вакуумной дуге со скоростью эрозии электродов и тепловыми потоками, поступающими в них. Для этого проводились измерения тока дуги и катодного падения потенциала, времени горения дуги, массы, температуры и скорости эрозии электродов.

Измерение катодного падения потенциала проводилось методом измерения напряжения на электродах вакуумной дуги при давлении остаточных газов в экспериментальной камере порядка 10^{-4} Па. При заданном токе дуги электрическая мощность, выделяющаяся в дуговом про-

межутке, определяется величиной катодного падения потенциала. Экспериментальная установка и методика измерений описаны в [7]. Погрешность измерения катодного падения потенциала при использовании запоминающего вольтметра не превышала 2 %. Электроды изготавливались в виде литых цилиндров диаметром 40—50 мм с плоскими торцами из металлов с существенно различающимися физическими свойствами (цинк, алюминий, медь, никель).

В основу метода измерения скорости эрозии электродов положен весовой метод, т. е. метод определения убыли веса электрода за единицу времени горения дуги. Погрешность измерения скорости эрозии не хуже 15 %.

Температура электродов дуги в вакууме измерялась с помощью хромель-алюмелевых термопар. Для получения более достоверных результатов измерений температуры в каждый электрод впрессовывались по 4 термопары в разных местах. Для снижения теплоотвода электроды крепились на тонких длинных стальных спицах. Зная теплоемкость металла электрода и его массу, можно по приращению его температуры за единицу времени определить тепловой поток, поступающий в электрод. Измерения катодного падения потенциала, тока дуги и температуры электродов проводились при строго одинаковых условиях горения дуги.

Исследования зависимости катодного падения потенциала от величины тока дуги показали, что в исследованном диапазоне от 5 до 700 А катодное падение увеличивается с ростом тока. Характер этой зависимости для исследованных металлов одинаков. При увеличении тока дуги до 100 А зависимость катодного падения потенциала U_c от тока дуги I и теплоты испарения металла катода q можно выразить в виде:

$$U_c = U_1 + A \cdot q \cdot I^b. \quad (1)$$

При дальнейшем увеличении тока дуги зависимость приобретает вид

$$U_c = U_2 + B \cdot q \cdot 10^{cI}. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) U_1 , U_2 , A , B , b , c — постоянные для каждого металла.

Характер зависимости скорости эрозии материала катода от тока дуги также определяется диапазоном изменения тока.

С повышением тока до 100 А зависимость скорости эрозии γ от тока имеет вид

$$\gamma = H \cdot I^b. \quad (3)$$

При дальнейшем увеличении тока

$$\gamma = D \cdot 10^{cI}. \quad (4)$$

Коэффициенты H , D , b , c — постоянные для данного металла. Совпадение участков изменения характера зависимости катодного падения потенциала и скорости эрозии от тока дуги в области 100 А, по нашему мнению, не случайно. Исследования, проведенные в работе [8], показали, что именно в этом диапазоне изменения тока дуги меняются структура и тип катодных пятен, а также характер их движения и взаимодействия.

Следовательно, изменения характера зависимости катодного падения потенциала и скорости эрозии от тока дуги связано с перестройкой структуры и типа катодных пятен дуги, определяющих характер протекания основных процессов электрической дуги.

Проведенные исследования показали, что катодное падение потенциала и скорость эрозии, отнесенная к току дуги, т. е. коэффициент электропереноса с одинаковым видом кривых возрастают с увеличением тока, а зависимость катодного падения потенциала U_c от коэффициента электропереноса σ можно представить в виде:

$$U_c = U_3 + \sigma \cdot q \cdot \varepsilon, \quad (5)$$

где U_3 и ε — постоянные для данного металла.

Из (5) можно получить выражение, связывающее электрическую мощность W , выделяющуюся в дуговом промежутке со скоростью эрозии катода γ :

$$W = U_c \cdot I = U_3 I + \sigma \cdot I \cdot q \cdot \varepsilon = W' + \gamma \cdot q \cdot \varepsilon. \quad (6)$$

Тепловые потоки, поступающие в электроды вакуумного дугового разряда, определялись при регулировке тока дуги в диапазоне от 10 до 100 А. В результате проведенных исследований установлено, что тепловой поток, отводимый от катодных пятен в глубь катода вследствие теплопроводности, является наибольшей частью среди тепловых потоков, рассеиваемых на катоде стационарной вакуумной дуги. Для разных металлов тепловая энергия, отводимая теплопроводностью, в 6—8 раз превышает энергию, отводимую от катода испарением атомов, и в 2—3 раза превышает энергию, отводимую от катода эмиссией электронов.

С увеличением тока дуги соотношение между потоками меняется. Удельный вклад теплового потока, потребляемого испарением атомов катода, возрастает, а удельный (т. е. отнесенный к току дуги) вклад теплового потока, отводимого в глубь катода, уменьшается, и металл в области катодных пятен при увеличении тока дуги перегревается. Этим эффектом можно объяснить изменение структуры и типа катодных пятен при увеличении тока дуги, так как температура металла в области катодного пятна определяет характер протекания физических процессов в дуге и, следовательно, тип катодных пятен.

В исследованных режимах горения дуги тепловые потоки, поступающие на анод, в 1,5—2 раза превышают потоки, рассеиваемые на катоде вследствие теплопроводности. Установлена корреляция между катодным падением потенциала и суммарным тепловым потоком, поступающим на анод, и тепловым потоком, рассеиваемым на катоде. Для металлов с большим катодным падением выше тепловые потоки, поглощаемые как анодом, так и катодом. Из исследованной группы металлов наименьшие тепловые потоки определены в случае цинковых электродов, наибольшие — в случае алюминиевых. Качественное объяснение наблюдаемых зависимостей можно представить в следующем виде.

Увеличение коэффициента электропереноса σ обусловлено возрастанием температуры поверхности металла в катодном пятне при увеличении тока дуги I . Это связано с тем, что количество поступающего в катод тепла, при возрастании тока дуги пропорционально квадрату радиуса катодного пятна, а количество тепла, отводимого теплопроводностью, пропорционально его радиусу [2]. При достаточном увеличении тока дуги катод не в состоянии рассеивать теплопроводностью вводимую в него тепловую мощность, что и вызывает повышение его температуры.

Скорость эрозии определяет собой затраты энергии на испарение металла катода, потребляемой дуговым разрядом. Катодное падение потенциала при заданном токе дуги является количественной электрической характеристикой этой энергии, поэтому дополнительное увеличение скорости эрозии требует и дополнительного увеличения энергии, что реализуется возрастанием катодного падения.

Характер зависимости катодного падения от коэффициентов, определяющих процесс испарения, дает основание считать, что возрастание катодного падения при увеличении тока дуги происходит вследствие возрастания энергетических затрат на теплофизические процессы в катодном пятне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кесаев И. Г. Катодные процессы электрической дуги.— М., 1968.
2. Раховский В. И. Физические основы коммутации электрического тока в вакууме.— М., 1970.
3. Игнатко В. П., Кухтиков В. А.— В сб.: Сильноточные электрические контакты и электроды. Киев, 1972, с. 28.
4. Фаррэлл Д.— ТИИЭР, 1973, т. 61, № 8, с. 68.
5. Daalder J. E.— J. Phys., 1975, v. 8D, p. 1647.
6. Хольм Р. Электрические контакты.— М., 1961.
7. Некрашевич И. Г. и др.— «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук», 1979, № 6, с. 142.
8. Зыкова Н. М. и др.— ЖТФ, 1970, т. 40, № 11, с. 2361.

Поступила в редакцию
03.01.81.

Кафедра радиотехники
и физической электроники, НИИ ПФП

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ФЕРРОМАГНИТНОМ ЦИЛИНДРЕ

В сообщении [1] изложена методика приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения, описывающего зависимость напряженности магнитного поля в ферромагнитном полупространстве от параметров ферромагнетика и намагничивающего поля с учетом вихревых токов и петли гистерезиса, на основе которой получены выражения, пригодные для расчета параметров некоторых гармонических составляющих напряженности магнитного поля и магнитной индукции в полупространстве и на его поверхности.

Однако для решения ряда прикладных задач определенный интерес представляет рассмотрение этого вопроса применительно к ферромагнитному цилиндру, поскольку цилиндрическая форма деталей и узлов из ферромагнитных материалов встречается достаточно широко, а в литературе рассмотрены только некоторые частные случаи.

В настоящей работе задача сформулирована следующим образом. На однородный изотропный бесконечный ферромагнитный цилиндр с постоянной электропроводностью σ и переменной магнитной проницаемостью $\mu = f(H)$ действует гармоническое магнитное поле $H = H_m \cos \omega t$. Требуется получить аналитические зависимости параметров основной и некоторых высших гармонических составляющих напряженностей магнитного и электрического полей, магнитной индукции и ЭДС в катушке, намотанной непосредственно (без зазора) на цилиндр, от характеристик ферромагнетика и намагничивающего поля. В качестве исходного применено уравнение, полученное из системы уравнений Максвелла:

$$\Delta H = \sigma \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (1)$$

Задача решалась в круговой цилиндрической системе координат. Ось z была совмещена с осью цилиндра, учитывалась его симметрия. В качестве начальных и граничных условий приняты:

$$H(r, t)|_{r=R} = H_m \cos \omega t; \quad H(r, t)|_{r=0} = 0, \quad (2)$$

где r — текущая координата радиуса цилиндра.

С учетом записанного уравнение (1) можно представить в развернутом виде:

$$H''(r) + \frac{1}{r} H'(r) - \sigma \mu_d H'(t) = 0. \quad (3)$$

где $H''(r)$, $H'(r)$, $H'(t)$ — вторая и первые производные соответственно; $\mu_d = \frac{\partial B}{\partial H}$ — дифференциальная магнитная проницаемость по петле гистерезиса.

После подстановки выбранного значения μ_d (формула (3) [2]) в (3) и выполнения необходимых преобразований, согласно принятой методике, получены уравнения для 1-й и 3-й гармоник напряженности магнитного поля в 1-ом приближении:

$$H_1'(r) + \frac{1}{r} H_1'(r) - i\omega \delta \mu_d^0 H_1(r) = 0; \quad (4)$$

$$H_3''(r) + \frac{1}{r} H_3'(r) - 3i\omega \delta \mu_d^0 H_3(r) + \frac{1}{q} \left[H_1''(r) + \frac{1}{r} H_1'(r) - i\omega \delta \mu_r H_1(r) \right] H_1^2(r) = 0, \quad \mu_d^0, q, \mu_r — \text{см. [2]}; \text{ вводятся обозначения:}$$

$$\omega \delta \mu_d^0 = k^2; \quad \omega \delta \mu_r = k_1^2.$$

Выражение для 1-й гармоники напряженности магнитного поля представляет собой известное уравнение Бесселя первого рода нулевого по-

рядка от аргумента вида $(i^{3/2}kr)$. Решение такого уравнения с учетом граничного условия (2) имеет вид:

$$H_1(r) = \frac{H_m J_0(i^{3/2}kr)}{2J_0(i^{3/2}kR)}, \quad (5)$$

где $J_0(i^{3/2}kr)$, $J_0(i^{3/2}kR)$ — функции Бесселя.

Уравнение для 3-й гармоники напряженности магнитного поля (4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, для которого известно решение соответствующего однородного уравнения.

Методом вариации постоянных [3] из уравнения (4) получена формула для $H_3(r)$ в общем виде:

$$H_3(r) = \frac{H_m J_0(i^{3/2}kr)}{8_q J_0^3(i^{3/2}kR)} \int_r^R \frac{J_0^2(i^{3/2}k\varphi)}{J_0'(i^{3/2}3k\varphi)} [J_0''(i^{3/2}k\varphi) + \frac{1}{r} J_0'(i^{3/2}k\varphi) - i k_1^2 J_0(i^{3/2}k\varphi)] d\varphi, \quad (6)$$

где φ — переменная интегрирования.

Согласно принятой методике, в 1-ом приближении учитывалось только действие низших гармоник на высшие, т. е. 1-й на 3-ю. Во втором приближении учитывалось взаимодействие 1-й и 3-й гармоник. При этом получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} H_{12}''(r) + \frac{1}{r} H_{12}'(r) - i k^2 H_{12}(r) + \frac{1}{q} \{ 2H_{-1}(r)H_1(r)[H_1''(r) + \frac{1}{r} H_1'(r) - \\ - i k_1^2 H_1(r)] + H_1^2(r)[H_{-1}''(r) + \frac{1}{r} H_{-1}'(r) + i k_1^2 H_{-1}(r)] + H_{-1}^2(r)[H_3''(r) + \\ + \frac{1}{r} H_3'(r) - 3i k_1^2 H_3(r)] + 2H_{-1}(r)[H_{-1}''(r) + \frac{1}{r} H_{-1}'(r) + i k_1^2 H_{-1}(r)] \} = 0. \\ H_{32}''(r) + \frac{1}{r} H_{32}'(r) - 3i k^2 H_3(r) + \frac{1}{q} \{ H_1^2(r)[H_1''(r) + \frac{1}{r} H_1'(r) - i k_1^2 H_1(r)] + \\ + H_3^2(r)[H_{-3}''(r) + \frac{1}{r} H_{-3}'(r) + 3i k_1^2 H_{-3}(r)] + 2H_{-1}(r)H_1(r)[H_3''(r) + \\ + \frac{1}{r} H_3'(r) - 3i k_1^2 H_3(r)] + 2H_{-1}(r)H_3(r)[H_1''(r) + \frac{1}{r} H_1'(r) - i k_1^2 H_1(r)] + \\ + 2H_{-3}(r)H_3(r)[H_3''(r) + \frac{1}{r} H_3'(r) - 3i k_1^2 H_3(r)] \} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $H_1(r)$, $H_{-1}(r)$, $H_3(r)$, $H_{-3}(r)$ — значения соответствующих гармоник в 1-ом приближении.

Уравнения (7) решаются тем же методом вариации постоянных. В общем виде эти решения в работе не приводятся, поскольку они чрезвычайно громоздки и непосредственно не интегрируются. Ниже рассматривается наиболее существенный для прикладных целей, по нашему мнению, частный случай, когда аргумент функции Бесселя $|kr|$ очень велик, т. е. имеет место ярко выраженный скин-эффект. При этом условии функции Бесселя и их производные могут быть аппроксимированы известным образом [4]. После замены функций Бесселя и их производных в решениях уравнений (7) и выполнения необходимых преобразований и упрощений, которые внесли ошибку менее 5 %, получены следующие выражения для гармоник напряженности магнитного поля в ферромагнитном цилиндре:

$$\begin{aligned} H_{11}(r, t) &= H_m \exp[k/\sqrt{2}(r-R)] \cos[\omega t + k/\sqrt{2}(r-R)]; \\ H_{31}(r, t) &\approx -\frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} c(\mu) \left\{ \exp[V\sqrt{3}k/\sqrt{2}(r-R)] \cos[3\omega t + V\sqrt{3}k/\sqrt{2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (r - R) - \frac{R}{r} \exp [3k/\sqrt{2}(r - R)] \cos [3\omega t + 3k/\sqrt{2}(r - R)]; \\
H_{12}(r, t) \approx & H_m \left[\left(1 - \frac{H_m^2}{2H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^4}{16H_{cm}^4} c^2(\mu) \right) \exp [k/\sqrt{2}(r - R)] + \right. \\
& + \frac{H_m^2}{2H_{cm}^2} c(\mu) \frac{R}{r} \exp [3k/\sqrt{2}(r - R)] \left. \right] \cos [\omega t + k/\sqrt{2}(r - R)] - \\
& - H_m \left[\left(\frac{H_m^2}{4H_{cm}^2} c(\mu) - \frac{H_m^4}{7H_{cm}^4} c^2(\mu) \exp [k/\sqrt{2}(r - R)] - \frac{H_m^2}{4H_{cm}^2} c(\mu) \times \right. \right. \\
& \times \frac{R}{r} \exp [3k/\sqrt{2}(r - R)] \left. \right] \sin [\omega t + k/\sqrt{2}(r - R)]; \quad (8) \\
H_{32}(r, t) \approx & -\frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} c(\mu) \left[\left(1 + \frac{H_m^2}{3H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^6}{9H_{cm}^6} c^3(\mu) \right) \exp [V\sqrt{3}k/\sqrt{2} \times \right. \\
& \times (r - R)] + \frac{H_m^6}{64H_{cm}^6} c^3(\mu) \frac{R}{r} \exp [3V\sqrt{3}k/\sqrt{2}(r - R)] + \frac{H_m^2}{H_{cm}^2} c(\mu) \frac{R}{r} \times \\
& \times \exp [(V\sqrt{3} + 2)k/\sqrt{2}(r - R)] \left. \right] \cos [3\omega t + V\sqrt{3}k/\sqrt{2}(r - R)] - \frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} \times \\
& \times c(\mu) \left[\frac{H_m^6}{16H_{cm}^6} c^3(\mu) \exp [V\sqrt{3}k/\sqrt{2}(r - R)] + \frac{H_m^6}{64H_{cm}^6} c^3(\mu) \exp [3V\sqrt{3}k/\sqrt{2} \times \right. \\
& \times (r - R)] \left. \right] \sin [3\omega t + V\sqrt{3}k/\sqrt{2}(r - R)] + \frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} c(\mu) \left\{ \frac{R}{r} \exp [3k/\sqrt{2}(r - \right. \\
& - R)] + \frac{H_m^2}{H_{cm}^2} c(\mu) \frac{R^2}{r^2} \exp [5k/\sqrt{2}(r - R)] + \frac{H_m^6}{64H_{cm}^6} c^3(\mu) \frac{R^2}{r^2} \exp [(3 + \\
& + 2V\sqrt{3})k/\sqrt{2}(r - R)] \left. \right\} \cos [3\omega t + 3k/\sqrt{2}(r - R)] + \frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} c(\mu) \times \\
& \times \left\{ \frac{H_m^6}{64H_{cm}^6} c^3(\mu) \exp [(V\sqrt{3} + 2)k/\sqrt{2}(r - R)] + \frac{H_m^6}{21H_{cm}^6} c^3(\mu) \frac{R^3}{r^3} \times \right. \\
& \times \exp [9k/\sqrt{2}(r - R)] \left. \right\} \sin [3\omega t + 3k/\sqrt{2}(r - R)].
\end{aligned}$$

Из (8) можно, используя известные уравнения Максвелла, вывести формулы соответствующих гармонических составляющих электрического поля, магнитной индукции и индуцированной ЭДС как внутри цилиндра, так и на его поверхности. Ниже, для примера, приведены выражения для амплитуд гармоник магнитной индукции и индуцированной ЭДС во 2-ом приближении:

$$\begin{aligned}
B_{12m} \approx & H_m \mu_d^0 \left[1 - \frac{H_m^2}{2H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^4}{2H_{cm}^4} c^2(\mu) - \frac{H_m^6}{16H_{cm}^6} c^3(\mu) + \dots \right]; \\
B_{32m} \approx & \frac{H_m^3}{2H_{cm}^2} c(\mu) \mu_d^0 \left[1 + \frac{H_m^2}{6H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^4}{64H_{cm}^4} c^2(\mu) + \frac{H_m^6}{32H_{cm}^6} c^3(\mu) + \dots \right]; \\
\mathcal{E}_{12m} \approx & 2\pi RW H_m V \overline{\omega \rho} \mu_d^0 \left[1 - \frac{H_m^2}{2H_{cm}^2} c(\mu) - \frac{H_m^4}{32H_{cm}^4} c^2(\mu) - \dots \right]; \quad (9) \\
\mathcal{E}_{32m} \approx & \pi RW \frac{H_m^3}{H_{cm}^2} c(\mu) V \overline{\omega \rho} \mu_d^0 \left[1 + \frac{H_m^2}{4H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^4}{24H_{cm}^4} c^2(\mu) + \right. \\
& + \frac{H_m^6}{24H_{cm}^6} c^3(\mu) + \frac{H_m^8}{26H_{cm}^8} c^4(\mu) + \dots \left. \right];
\end{aligned}$$

где W — постоянная обмотки.

Сравнительный анализ выражений для гармонических составляющих напряженности магнитного поля, магнитной индукции и индуцированной ЭДС в ферромагнитных бесконечном цилиндре и полупространстве показывает, что при наличии ярко выраженного скин-эффекта эти выражения имеют идентичную структуру и совпадают с точностью до постоянных множителей. Этот факт дает серьезные основания для того, чтобы считать принятую в работе методику пригодной для проведения соответствующих расчетов как для ферромагнитного полупространства, так и для бесконечного ферромагнитного цилиндра.

Полученные результаты имеют и практическое значение. Так, из уравнений (9), используя известное выражение В. К. Аркадьева, описывающее связь между магнитными проницаемостями тела и вещества, можно получить формулы для гармоник, например, ЭДС для случая, когда длина и диаметр цилиндра одного порядка. При этом, с учетом только первых слагаемых, выражения для амплитуд 1-й и 3-й гармоник имеет вид:

$$\mathcal{E}_{12m} \approx 2\pi R W H_m \sqrt{\omega \mu \frac{1}{N}}; \quad \mathcal{E}_{32m} \in \pi R W \frac{H_m^3}{H_{cm}^2} c(\mu) \sqrt{\omega \mu \frac{1}{N}}. \quad (10)$$

Анализ уравнений (10) показывает, что магнитные свойства ферромагнетика влияют только на амплитуды 3-й (и более высоких) гармоник (коэффициенты $l_n(\mu)$), что позволяет с помощью гармонического анализа осуществлять многопараметровый контроль качества. Эксперименты подтвердили справедливость этого вывода для деталей цилиндрической [5] и плоской [6] формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 1, с. 3.
2. Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 2, с. 29.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике.—М.—Л., 1945.
4. Двайт Т. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы.—М., 1948.
5. Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А.—Промышленность Белоруссии, 1975, № 2, с. 93.
6. Лучевский Б. А., Писаренко Л. З., Русаков И. А.—Литейное производство, 1979, № 3, с. 8, 9.

Поступила в редакцию
12.05.80

Кафедра радиотехники, радиофизики
и физической электроники



УДК 519.852.6

В. С. ГЛУШЕНКОВ, С. В. ГНЕВКО, О. И. КОСТЮКОВА

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Эффективность шести методов решения общей задачи линейного программирования сравнивалась по числу итераций (смен опоры), необходимых для построения оптимального плана задачи. Этот критерий является объективной характеристикой метода, поскольку не зависит от возможностей ЭВМ и искусства программиста.

С помощью специального генератора сформировано 14 серий канонических задач линейного программирования [1]: $c'x \rightarrow \max$, $Ax = b$, $d_* \leq x \leq d^*$, где c , x , d_* , $d^* \in R^N$, $A — M \times N$ — матрица, $M < N$. Каждая серия содержала 10 задач. Серии различались размерами M , N задач. Основой генератора был датчик псевдослучайных чисел, реализованный в виде следующей FORTRAN-функции:

```
FUNCTION Y(P)  
P = SIN(137*P+2.)  
K = P**3*100  
Y = K/10  
RETURN  
END
```

Такой датчик генерирует последовательность чисел, расположенных на интервале $[-10, 10]$ и округленных до 0,1. Вначале этими числами заполнялись вектор C и матрица A . Для получения элементов векторов d_* , d^* и начального плана $x^{\text{нач}}$ генерировались тройки псевдослучайных чисел, меньшее из которых принималось за d_{*j} , среднее — за $x_j^{\text{нач}}$, большее — за d_j^* . Затем определялся вектор $b = Ax^{\text{нач}}$. Начальными опорными индексами полагались $N - M + 1$, $N - M + 2, \dots, N$.

Сравнивались следующие методы. Метод 1 с оптимальной заменой элементов опоры [2]. На его итерациях могут изменяться все компоненты плана x , а ведущий столбец выбирается из условия максимального убывания двойственной целевой функции вдоль элементарного направления, соответствующего опорной компоненте плана, которая вышла на границу множества допустимых значений.

Метод 2 с упрощенной заменой элементов опоры [2]. От метода 1 он отличается упрощенным правилом выбора ведущего столбца, которое останавливает изменение сопровождающего коплана после первого появления нулевой неопорной компоненты.

Метод 3 — прямой опорный метод [3]. Метод 4 — двухфазный симплекс-метод [1]. Метод 5 — метод Чарнса [4]. В отличие от метода 3 в нем при выборе ведущего столбца вначале рассматриваются столбцы, которые соответствуют некритическим компонентам текущего плана.

Метод 6 описан в [5]. В нем, в отличие от метода 1, элементарное направление изменения сопровождающего коплана выбирается из условия

максимума начальной скорости убывания двойственной целевой функции.

Перечисленные методы реализованы в виде подпрограмм SUBROUTINE на языке FORTRAN-IV.

Таблица 1

Номер задачи	α	Число итераций при решении различными методами					
		1	2	3	4	5	6
1	55,20	32	72	88	111	103	17
2	56,62	37	92	98	130	109	29
3	57,87	25	58	106	113	85	27
4	45,39	19	70	88	97	74	28
5	46,00	36	73	99	106	97	20
6	43,26	24	44	82	115	85	22
7	46,84	25	84	92	112	94	17
8	51,39	26	82	81	102	81	20
9	52,31	27	87	93	123	81	25
10	48,33	28	76	97	117	107	25

Результаты эксперимента. В табл. 1 приведены результаты серии с $M=10$, $N=90$. Результаты решения задач этой серии качественно сходны с результатами других серий.

Величина α характеризует качество начального плана задачи и вычислена следующим образом:

$$\alpha = \frac{c'x'^{\max} - c'x'^{\text{нач}}}{c'x'^{\max} - c'x'^{\min}}, \quad x'^{\max} \in \text{Arg} \max_{\substack{Ax=b \\ d_* \leq x \leq d^*}} c'x, \quad x'^{\min} \in \text{Arg} \min_{\substack{Ax=b \\ d_* \leq x \leq d^*}} c'x.$$

Таблица 2

Номер итерации	M	N	Среднее число итераций в серии при решении различными методами					
			1	2	3	4	5	6
1	5	10	2,6	3,4	4,2	8,3	3,9	2,9
2	5	30	8,1	18,1	22,5	26,9	20,9	7,1
3	5	50	11,2	34,8	43,3	46,8	38,6	10,7
4	5	90	13,8	63,10	77,0	87,6	70,8	11,5
5	7	10	2,3	2,9	2,8	10,5	2,8	3,0
6	7	30	10,5	18,9	25,1	32,9	25,3	9,8
7	7	50	13,7	37,9	45,7	55,5	45,6	13,6
8	7	90	18,4	67,2	88,6	103,9	80,3	16,1
9	8	30	11,3	22,9	21,1	35,4	21,8	9,5
10	8	50	14,4	39,4	44,3	60,9	43,0	14,9
11	8	90	19,7	66,2	92,1	105,0	84,4	16,7
12	10	30	12,2	21,9	22,6	33,7	24,8	10,5
13	10	50	18,8	47,5	47,8	59,7	42,9	16,4
14	10	90	27,9	73,8	92,4	112,6	91,6	23,0

В табл. 2 приведены данные о среднем числе итераций во всех сериях.

Наиболее эффективными из рассматриваемых оказались методы 6 и 1. Их преимущество возрастает с увеличением отношения N/M . В рассматриваемых задачах информация о начальной опоре бывает, как правило, плохой и эффективное ее преобразование позволяет значительно уменьшить число итераций.

Промежуточное положение занимает метод 2. Его целесообразно использовать, видимо, лишь в тех случаях, когда M и N заведомо близки. Тогда, несмотря на большее количество итераций можно все же получить некоторый выигрыш в машинном времени за счет меньшей трудоемкости каждой итерации.

Далее следуют методы 3, 5, и наименее эффективным оказался двухфазный симплекс-метод.

Для дальнейших экспериментов интересно построить генератор, дающий возможность получать задачи линейного программирования с заранее заданным отклонением начального плана и опоры от оптимальных. Это позволит изучить реакцию методов на качество исходной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения.— М., 1966.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. К методам решения общей задачи линейного программирования: Препринт института математики АН БССР № 14 (30), ноябрь 1977.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 6.
4. Charnes A., Granot D., Granot F.— Linear Algebra and Its Applications, 1977, № 11, p. 65.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования, ч. 3.— Минск, 1980.

Поступила в редакцию
24.01.80

Кафедра МОУ

УДК 62--50

О. И. КОСТЮКОВА, А. И. ТЯТЮШКИН

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОДНОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Приводятся результаты численного решения на ЭВМ серии задач с помощью симплекс-метода [1] и метода, предложенного в [2].

1. Алгоритмы решения. Целью эксперимента была проверка эффективности метода [2] для решения задач линейного программирования в нормальной форме

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, d_* \leq x \leq d^*, \quad (1)$$

где $c = c(J)$; $x = x(J)$; $d_* = d_*(J)$; $d^* = d^*(J)$ — n -векторы; $b = b(I)$ — m -вектор; $A = A(I, J)$ — $m \times n$ -матрица, $I = \{1, 2, \dots, m\}$; $J = \{1, 2, \dots, n\}$.

В основу метода [2] положено понятие опорного плана $\{x, A_{оп}\}$ — совокупности из плана x задачи (1) и невырожденной подматрицы (опорной матрицы) $A_{оп} = A(I_{оп}, J_{оп})$, $I_{оп} \subset I$, $J_{оп} \subset J$, матрицы A . Согласно [2], рассматриваемый метод характеризуется тем, что позволяет начать решение задачи (1) с любого опорного плана $\{x, A_{оп}\}$ и при переходе $\{x, A_{оп}\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{A}_{оп}\}$ используются новые экстремальные правила замены плана и опоры, позволяющие на каждой итерации уменьшать оценку субоптимальности опорного плана. Решение задачи (1) прекращается, как только будет построен опорный план, оценка субоптимальности которого не превосходит заданной степени точности. Особенностью этого метода является также то, что в процессе решения размеры опорной матрицы $A_{оп}$ могут меняться.

В эксперименте проводилось сравнение метода [2] с симплекс-методом. Решение каждым методом начиналось с одинаковых планов. Поскольку начальный план мог быть небазисным, в эксперименте исполь-

Таблица 1

Результаты основного эксперимента

Номер задачи	20×30					30×40				
	Симплекс-метод		Адаптивный метод			Симплекс-метод		Адаптивный метод		
	число итераций	время счета, с	число итераций	время счета, с	средний размер опоры	число итераций	время счета, с	число итераций	время счета, с	максимальный размер опоры
1	68	23	27	7	8,2	84	53	45	15	15
2	58	19	26	5	6,0	95	59	38	13	15
3	54	18	19	4	6,9	91	57	26	8	11
4	73	24	16	4	5,6	114	70	28	9	12
5	67	21	22	5	7,4	105	65	34	11	14
6	62	19	22	5	8,4	98	59	28	10	13
7	62	19	25	5	6,8	89	54	41	14	14
8	72	22	26	5	5,4	99	60	32	11	15
9	84	26	30	6	6,6	115	71	38	13	13
10	67	21	20	5	7,4	112	70	24	9	13
11	60	18	16	3	6,2	105	65	32	10	12
12	68	21	20	4	6,4	88	53	38	13	15
13	73	23	22	4	6,0	88	53	42	15	17
14	67	20	21	4	7,8	82	50	48	17	15
15	83	26	24	5	6,3	89	57	39	13	15

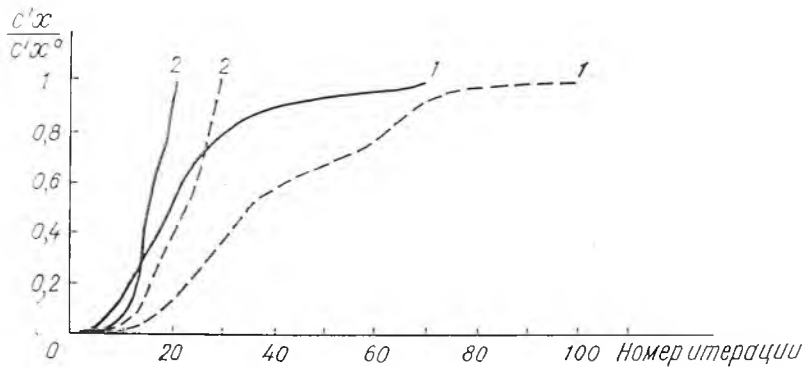


Рис. 1

зовалась модификация симплекс-метода из [3]. Начальная базисная матрица в симплекс-алгоритме составлялась из единичных векторов условий, соответствующих свободным переменным. Начальная опора в алгоритме [2] состояла из пустого множества, т. е. начальная опорная матрица имела размеры 0×0 . Каждая задача решалась сначала симплекс-методом, а затем методом [2].

2. Основной эксперимент. В эксперименте рассматривались небольшие задачи: в связи со значительными затратами машинного времени (решено около тысячи задач) и потому, что большие задачи имеют, как правило, специальное строение множества параметров, допускающие более эффективные модификации как симплекс-метода, так и рассматриваемого метода. Методы решения больших задач, основанные на алгоритме [2], будут рассмотрены в дальнейшем.

В основном эксперименте решались задачи (1) с размерами 20×30 ($m=20$, $n=30$). Параметры задачи генерировались датчиком случайных чисел с равномерным распределением и принимали значения из следую-

ющих отрезков: $-100 \leq a_{ij} \leq 100$, $0 \leq b_i \leq 100$, $-100 \leq d_{*j} \leq 0$, $0 \leq d_j^* \leq 100$, $-100 \leq c_j \leq 100$, $i = \overline{1,20}$; $j = \overline{1,30}$. Решение каждый раз начиналось с плана $x = 0$.

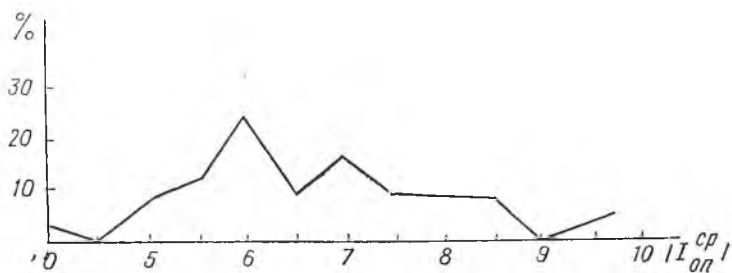


Рис. 2

Симплекс-алгоритм и алгоритм из [2] были запрограммированы на Алголе для БЭСМ-6 с использованием обратных базисных и опорных матриц без их специального представления.

Алгоритмы сравнивались по количеству итераций до получения оптимального плана. В алгоритме [2] следили за изменением в ходе итераций размеров $|I_{оп}|$ опор и для каждой задачи вычисляли средний размер опор. Поскольку в сравниваемых методах совокупности операций на итерациях отличаются, дополнительно засекалось время решения задач. Результаты эксперимента по 15 задачам приведены *

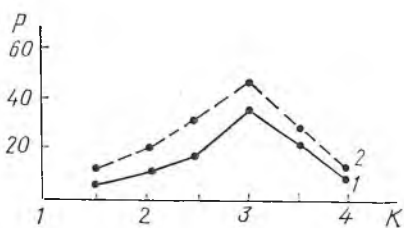


Рис. 3

в табл. 1. Из них видно, что в алгоритме [2] число итераций в среднем в 3,03 раза меньше, чем в симплекс-алгоритме, а время счета в 5 раз меньше. На рис. 1 показано изменение (в относительных единицах) целевой функции при решении 12-й задачи (сплошные кривые; кривая 1 соответствует симплекс-алгоритму, 2 — алгоритму [2]). На рис. 2 изображено распределение средних размеров $|I_{оп}^{сп}|$ опор (в процентах от общего количества решенных задач). На рис. 3 кривая 1 характеризует распределение отношения числа итераций симплекс-метода к числу итераций метода [2] (кривая 2) (k), в процентах от общего количества решенных задач (p).

Таблица 2

Результаты дополнительного эксперимента

		а						б								
m		5	5	10	40	60	90	20					30			
n		10	30	30	50	70	100	30					40			
d		100						5	10	20	100	200	5	10	50	200
Среднее число итера- ций в 5 задачах	Симп- лекс- метод	14,4	34,4	49,6	160	151	224	46,2	54,0	56,0	68,6	69,8	87,0	85,0	79,6	124,2
	Адап- тивный метод	5,5	9,0	16,2	47,8	74,3	26,0	19,0	20,0	20,4	25,8	22,2	30,0	31,2	34,8	34,6

* В таблицах метод из [2] назван адаптивным.

3. **Дополнительные эксперименты.** Для проверки основных выводов, полученных в эксперименте с задачами 20×30 , решены задачи 30×40 . Результаты эксперимента приведены в табл. 1 и на рис. 1, 3 (пунктирные линии).

Другие данные, связанные с измененными размерами задач, приведены в табл. 2, а.

Для учета влияния прямых ограничений решены задачи с прямыми ограничениями вида $|x_j| \leq d, j = \overline{1, n}$, с разными значениями d (табл. 2, б).

Из анализа результатов проведенных экспериментов видно, что алгоритм [2] является эффективным методом решения задач типа (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения.— М., 1966.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.— Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 5, с. 197.

3. Charnes A., Granot D., Granot F.— Linear Algebra and It's Applications, 1977, v. 17, p. 65.

Поступила в редакцию
21.02.80

Кафедра МОУ, Сибирский энергетический
институт СО АН СССР

УДК 539.3

И. А. ПРУСОВ, В. В. СЕЛЯВКО

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБА БЕСКОНЕЧНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЕМ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Пусть срединная плоскость недеформированной пластины занимает в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ бесконечную односвязную область S , ограниченную замкнутым гладким контуром L . Внешняя нагрузка на пластинку состоит из усилий на контуре L и равномерно распределенных на бесконечности области S моментных усилий M_x^∞ , M_y^∞ и H_{xy}^∞ . Будем считать, что область S отображается на внешность окружности $\gamma(|\xi| = 1)$ в плоскости комплексного переменного $\xi = re^{i\theta}$ функцией

$$Z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{m}{\xi} + \frac{n}{\xi^2} + \frac{l}{\xi^3} + \dots \right), \quad (1)$$

где R — положительная постоянная; $m, n, l, \dots$ — вещественные коэффициенты, удовлетворяющие условию, чтобы $\omega'(\xi) \neq 0$ в области $|\xi| \geq 1$.

Используя общие формулы в форме, предложенной в работе [2], и затем распространяя по методу Н. И. Мусхелишвили [1] определение функции $F(\xi) = \omega'(\xi)\Phi(\xi)$ на область $|\xi| < 1$, для точек $\xi = \sigma \in \gamma$, получим соотношения:

$$\kappa F^-(\sigma) + F^+(\sigma) = f(\sigma) + 2\bar{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} [\Omega_1 / \overline{\omega'(\sigma)}]; \quad (2)$$

$$2iD [\Phi^-(\sigma) - \overline{\Phi^-(\sigma)}] + D\eta \Omega = P_p - c_0; \quad (3)$$

$$F^-(\sigma) - F^+(\sigma) = q(\sigma) - 2(\bar{\sigma}) \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} [\Omega_1 / \overline{\omega'(\sigma)}]; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\sigma}} = \text{Im} \left[\frac{1}{h} (u_p - iu_\theta) |\omega'(\sigma)| + 4\epsilon_0 \sigma \Phi'(\sigma) - 2i\bar{\sigma} \Omega_1 \right]; \quad (5)$$

Здесь ω — прогибы в точках срединной плоскости пластинки; u_p, u_θ — составляющие смещений в криволинейных координатах для точек, безразмерная третья координата которых $\delta = Z/h = 1$; $2h$ — толщина пластинки,

$$\begin{aligned} f(\delta) &= -\eta_1 [M_p + i(H_{p\theta} + P_p - c_0)] \omega'(\delta), \\ g(\sigma) &= i\bar{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} [(u_p + iu_\theta) \sigma \omega'(\sigma) (h |\omega'(\sigma)|^{-1})], \end{aligned} \quad (6)$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \eta_1 = \frac{1}{D(1-\nu)},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)G'}, \quad \lambda^2 = \frac{6(1+\nu)G'}{Eh^2},$$

$$\eta = \frac{2}{\varepsilon_0} = (1-\lambda)\lambda^2, \quad P_\rho = \int_0^\theta N_\rho |\omega'(\sigma)| d\theta,$$

E, ν, G' — коэффициенты упругости [5]; M_ρ и M_θ — изгибающие моменты; $H_{\rho\theta}$ — крутящий момент; N_ρ — перерезывающие силы, c_0 — произвольная вещественная постоянная*; Ω — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Omega = \lambda^2 \Omega \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

Ω_1 — функция, определяемая соотношениями

$$\Omega_1 = 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\xi}} = \left(-\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) e^{i\theta}. \quad (8)$$

Знаками (+) и (−) вверху справа у символов обозначены предельные значения функций на γ со стороны областей $|\xi| < 1$ и $|\xi| > 1$.

Считая $\Omega = \Omega(\xi, \bar{\xi})$, нетрудно показать, что уравнение (7) преобразуется к виду

$$\Delta \Omega = \lambda^2 \Omega \omega'(\xi) \overline{\omega'(\xi)}, \quad (9)$$

где

$$\Delta \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2}. \quad (10)$$

Будем предполагать, что для больших $|\xi|$

$$|\Omega(\xi, \bar{\xi})| < A \cdot e^{-\alpha \rho} \quad (A > 0, \alpha > 0) \quad (11)$$

и что функция $\omega(\xi)$ в точке $\xi=0$ имеет полюс не выше третьего порядка. В этом случае функция $F(\xi)$ голоморфна всюду в областях $|\xi| > 1$ и $|\xi| < 1$, кроме точки $\xi=0$, где она имеет полюс не выше четвертого порядка. При этом

$$F(\xi) = R \left(\Gamma + \frac{m_\infty}{R\xi} + \frac{a_{-2}}{\xi^2} + \frac{a_{-3}}{\xi^3} + \dots \right) \text{ для } |\xi| \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$F(\xi) = B(\xi) + \text{голоморфная функция для } \xi \rightarrow 0$,

где

$$B(\xi) = -R \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} \left(m\Gamma + \frac{\overline{nm}_\infty}{R} + l(m\Gamma + \bar{a}_{-2}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\xi^2} \left(n\Gamma + \frac{\overline{lm}_\infty}{R} \right) + \frac{l\Gamma}{\xi^3} \right] + \frac{R\Gamma'}{\xi^2} + \frac{m_\infty}{\xi}, \quad (13)$$

$$\Gamma = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2D(1-\nu)}, \quad m_\infty = \frac{M_x^0 + iM_y^0}{8\pi iD},$$

M_x^0 и M_y^0 — главные моменты внешней нагрузки на L относительно осей координат x и y ; $a_{-2}, a_{-3}, \dots$ — произвольные коэффициенты. Значение коэффициента a_{-2} подлежит определению на основании условий (12) после нахождения явного выражения функции $F(\xi)$.

Формулы (2), (3) и (4), (5) представляют собой граничные условия для функций $F(\xi)$ и Ω при задании на контуре L внешних напряжений $M_\rho, H_{\rho\theta}, N_\rho$ или значений функций ω, u_ρ, u_θ .

Зная выражения функций $F(\xi)$ и Ω , удовлетворяющих определенным граничным условиям на контуре L , а также условиям (12), распределение напряжений на контуре L найдем по формулам

* Значение постоянной c_0 определяется из условия однозначности прогибов при обходе контура отверстия.

$$\begin{aligned}
M_\rho + M_\theta &= -2D(1 + \nu)[\Phi^-(\sigma) + \overline{\Phi^-(\sigma)}], \\
[M_\theta - \nu M_\rho - i(1 + \nu)H_{\rho\theta}]\omega'(\sigma) &= -D(1 - \nu^2) \times \\
\times \left[F^-(\sigma) - F^+(\sigma) - \lambda^2 \Omega \omega'(\sigma) - 2i\bar{\sigma} \frac{\partial}{\partial \theta} [\Omega_1 \overline{\omega'(\sigma)} - 1] \right], \\
N_\rho + iN_\theta &= -D[4\overline{\Phi'(\sigma)} - i\eta \Omega_1 \bar{\sigma} |\omega'(\sigma)|^{-1}].
\end{aligned} \quad (14)$$

Черта над символами во всех приведенных выше формулах — знак комплексного сопряжения.

Предположим, что на контуре L заданы величины M_ρ , $H_{\rho\theta}$ и N_ρ как функции полярного угла θ в плоскости комплексного переменного $\xi = re^{i\theta}$. Для решения задачи воспользуемся методом малого параметра, за который мы примем число $\varepsilon = m$, считая при этом, что $\omega'(\xi) = R[1 - \varepsilon\varphi(\xi)]$, где, согласно выражению (1), $\varphi(\xi) = \xi^{-2} + 2n_0\xi^{-3} + 3l_0\xi^{-4}$, $n_0 = n/m$, $l_0 = l/m$. Кроме того, будем считать, что значения заданных на контуре L напряжений M_ρ , $H_{\rho\theta}$, N_ρ не зависят от параметра ε .

Дальнейший ход решения задачи такой. Представим функции $F(\xi)$ и $\Omega(\xi, \bar{\xi})$ рядами

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F_k(\xi), \quad \Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Omega^{(k)}(\xi, \bar{\xi}), \quad (15)$$

где $F_k(\xi)$ и $\Omega^{(k)}$ — неизвестные функции. Подставляя эти выражения в формулы (2) и (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенств, получим граничные условия для функций $F_k(\xi)$ и $\Omega^{(k)}$ на γ :

$$\chi F_k^-(\sigma) + F_k^+(\sigma) = f_k(\sigma) + 2\bar{\sigma} R^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{r=0}^k \Omega_1^{(r)} \bar{\varphi}^{k-r}, \quad (16)$$

$$2iD \sum_{r=0}^k [F_2^-(\sigma) \varphi^{k-2} - \overline{F_2^-(\sigma)} \bar{\varphi}^{k-2}] + D\eta R \Omega^{(k)} = RP_k,$$

где f_k и P_k — коэффициенты при ε^k разложения функций f и $P_\rho - c_0$, $\varphi = \varphi(\sigma)$, $\bar{\varphi} = \overline{\varphi(\sigma)}$. При этом следует учесть, что

$$\Phi(\sigma) = F(\sigma) \omega'(\sigma)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{r=0}^k F_r(\sigma) \varphi^{k-r} \right) R^{-1} \quad (17)$$

и, поскольку заданные на L компоненты напряжения M_ρ , $H_{\rho\theta}$ и N_ρ не зависят по условию от параметра ε , разложение функции P_ρ по этому параметру сводится к разложению функции

$$|\omega'(\sigma)| = \sqrt{\omega'(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)}} = R \sqrt{1 - \varepsilon(\varphi + \bar{\varphi}) + \varepsilon^2 \varphi \bar{\varphi}}. \quad (18)$$

Значения функции $\Omega^{(k)}$ можно определить по формуле (8), полагая $\Omega = \Omega^{(k)}$ и $\rho = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где $\Omega^{(k)}$ — произвольные функции, удовлетворяющие уравнениям [3]:

$$\begin{aligned}
\Delta \Omega^{(0)} &= (\lambda R)^2 \Omega^{(0)}, \\
\Delta \Omega^{(1)} &= (\lambda R)^2 [\Omega^{(1)} - (\varphi + \bar{\varphi}) \Omega^{(0)}], \\
\Delta \Omega^{(k)} &= (\lambda R)^2 [\Omega^{(k)} - (\varphi + \bar{\varphi}) \Omega^{(k-1)} + \varphi \bar{\varphi} \Omega^{(k-2)}].
\end{aligned} \quad (19)$$

Согласно формулам (12), каждая из функций $F_k(\xi)$ в окрестности точек $|\xi| = \infty$ и $\xi = 0$ должна удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}
F_0(\xi) &= R \left[\Gamma + \frac{m_\infty}{R\xi} + \frac{a_{-2}^{(0)}}{\xi^2} + \frac{a_{-3}^{(0)}}{\xi^3} + \dots \right] \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty, \\
F_k(\xi) &= R \left[\frac{a_{-2}^{(k)}}{\xi^2} + \frac{a_{-3}^{(k)}}{\xi^3} + \dots \right] \text{ при } k \geq 1, |\xi| \rightarrow \infty;
\end{aligned} \quad (20)$$

$$F_k(\xi) = B_k(\xi) + \text{голоморфная функция при } \xi \rightarrow 0, \quad (21)$$

$$\text{где } B_0(\xi) = \frac{R\bar{\Gamma}'}{\xi^2} + \frac{m_\infty}{\xi},$$

$$B_1(\xi) = R \left[\frac{1}{\xi^2} \left(\Gamma + l\Gamma + \frac{n_0 \bar{m}_\infty}{R} + l a_{-2}^{(0)} \right) + \frac{2}{\xi^3} \left(n_0 \Gamma + \frac{1}{R} l_0 \bar{m}_\infty \right) + \frac{3}{\xi^4} l_0 \Gamma \right], \quad (22)$$

$$B_k(\xi) = R l_0 \bar{a}_{-2}^{(k)} \xi^{-2} \quad (k \geq 2),$$

где $a_{-2}^{(k)}$, $a_{-3}^{(k)}$ — произвольные постоянные коэффициенты.

Зная выражения функций $F_k(\xi)$ и $\Omega_k(\xi, \bar{\xi})$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$), значения компонентов напряжения на контуре L найдем по формулам (14), считая

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k F_k(\xi) [\omega'(\xi)]^{-1}, \quad \Omega = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \Omega^{(k)}. \quad (23)$$

Преобразуя формулы (14), как указано выше, можно найти компоненты напряжения $M_p^{(k)}, \dots, N_\theta^{(k)}$ на L для каждого из приближений F_k и $\Omega^{(k)}$ функций $F(\xi)$ и $\Omega(\xi, \bar{\xi})$. Аналогично решается задача при заданных на контуре L функциях w, u_p, u_θ .

Другим методом решение аналогичной задачи, основанное на общих формулах Э. Рейсснера [8] и некоторых родственных ей задач моментной теории упругости дано в работах [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М., 1966.
2. Савин Г. Н., Прусов И. А.— ПМ, 1969, т. 5, вып. 6.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М., 1973.
4. Угодников А. Г., Соболева В. А. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в плитах по теории Рейсснера.— ПМ, 1972, т. 8, вып. 6.
5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит.— Минск, 1975.
6. Карцивадзе И. Н.— Сообщ. АН Груз. ССР, 1946, т. 7, № 8.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1963.
8. Reissner E.— J. Math. and Phys., 1944, v. 23, № 1.

Поступила в редакцию
06.03.80

Кафедра теоретической механики

УДК 518:517(944)947

П. А. ВАКУЛЬЧИК

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим смешанную задачу для системы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varphi \left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где $U = \{u^1, u^2, \dots, u^n\}$, $\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$ — векторы, а матрица $A =$

$$= A \left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \left\| \frac{\partial \varphi^i \left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial \left(\frac{\partial u^j}{\partial x} \right)} \right\|, \quad i, j = \overline{1, n} \quad \text{удовлетворя-$$

ет условию гиперболичности [1]. Пусть, не ограничивая общности, собственные значения $\xi^i = \xi^i\left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$ матрицы A занумерованы так, что $\xi^i \leq 0$, $i = \overline{1, n_0}$, $n_0 \leq n$; $\xi^i > 0$, $i = \overline{n_0 + 1, n}$. При $t = 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассмотрим начальные условия

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad (2)$$

где $U_0 = \{u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n\}$ — вектор. Граничные условия пусть заданы на отрезке $0 \leq t \leq T$ прямых $x = 0$, $x = 1$ и имеют вид

$$L(x, t)U(x, t) = \psi(x, t), \quad (3)$$

где $\psi = \{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n\}$ — вектор, а матрица $L(x, t)$ порядка $n \times n$ удовлетворяет требованиям корректности [1]—[3] граничных условий (3) для системы (1). Это позволяет систему граничных условий (3) на каждой из границ представить следующим образом:

$$\begin{aligned} u^i(0, t) &= \sum_{j=n_0+1}^n \alpha^{ij}(0, t) u^j(0, t) + \beta^i(0, t), \quad i = \overline{1, n_0}, \\ u^i(1, t) &= \sum_{j=1}^{n_0} \alpha^{ij}(1, t) u^j(1, t) + \beta^i(1, t), \quad i = \overline{n_0 + 1, n}, \end{aligned} \quad (3')$$

где α^{ij} , β^i ($i, j = \overline{1, n}$) — некоторые функции, определяемые через элементы матрицы L и компоненты вектора ψ . Предположим, что в прямоугольнике $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ существует достаточно гладкое решение задачи (1) — (3').

На сетке $\omega_{h\tau}$ рассмотрим регуляризованную [4] разностную схему

$$\bar{Y}_t - \tau A(\bar{Y}, Y_x) Y_{tx} = \varphi(\bar{Y}, Y_x) \quad (4), \quad Y(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}^i|_{x=0} &= \sum_{j=n_0+1}^n \hat{\alpha}^{ij} \hat{y}^j + \hat{\beta}^i|_{x=0}, \quad i = \overline{1, n_0}, \\ \hat{y}^i|_{x=1} &= \sum_{j=1}^{n_0} \hat{\alpha}^{ij} \hat{y}^j + \hat{\beta}^i|_{x=1}, \quad i = \overline{n_0 + 1, n}, \end{aligned} \quad (6)$$

которая аппроксимирует исходную задачу с погрешностью $O(h^2 + \tau)$.

Для исследования сходимости разностной схемы (4) — (6) рассмотрим ее погрешность $Z = U - Y$, которая удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t - \tau A\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) Z_{tx} &= \left[\varphi\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \varphi(\bar{Y}, Y_x) \right] - \tau \left[A\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \right. \\ &\quad \left. - A(\bar{Y}, Y_x) \right] Z_{tx} + \tau \left[A\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) - A(\bar{Y}, Y_x) \right] U_{tx} + r, \end{aligned} \quad (7)$$

$$Z(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad (8)$$

$$\hat{z}^i|_{x=0} = \sum_{j=n_0+1}^n \hat{\alpha}^{ij} \hat{z}^j|_{x=0}, \quad i = \overline{1, n_0}; \quad \hat{z}^i|_{x=1} = \sum_{j=1}^{n_0} \hat{\alpha}^{ij} \hat{z}^j|_{x=1}, \quad i = \overline{n_0 + 1, n}. \quad (9)$$

Здесь $r = O(h^2 + \tau)$ — погрешность аппроксимации разностной схемы (4). Умножив обе части (7) на матрицу $M = \{\{l^{ij}\}\}$ левых собственных векторов A , придем к инвариантной форме записи задачи (7) — (9) для погрешности. Рассмотрим систему положительно определенных в Ω функций $\mu_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Уравнения с номером i каждой из инвариантных систем (7) — (9) умножим на функцию $\mu_i(x)$. Тогда для $v^i = \mu_i(x) \sum_{j=1}^n l^{ij} \left(U, \frac{\partial U}{\partial x} \right) z^j(x, t)$, $x, t \in \omega_{h\tau}$ получим следующую разностную задачу:

$$\bar{v}_t^i - \tau \xi^i\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) v_{tx}^i = \xi^i\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) v_x^i +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{\mu_i}{\mu_j} b^{ij} \bar{v}^j + 0(\bar{V}) 0(V_x) + r^i,$$

$$\bar{v}^i(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad i = \overline{1, n}, \quad \hat{v}^i|_{x=0} = \sum_{j=n_0+1}^n \hat{\alpha}^{*ij} \frac{\mu^i}{\mu_j} \hat{v}^j|_{x=0}, \quad i = \overline{1, n_0},$$

$$\hat{v}^i|_{x=1} = \sum_{j=1}^{n_0} \hat{\alpha}^{*ij} \frac{\mu^i}{\mu_j} \hat{v}^j|_{x=1}, \quad i = \overline{n_0+1, n}.$$

Здесь $\{\{b^{ij}\}\} = \{\{l^{ij}\}\} \{\{b^{ij}\}\}$, $\{\{b^{ij} = \left\{\left\{\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}\right\}\right\}; \quad i, j = 1, n; \quad 0(\bar{V}) \text{ и } 0(V_x) \text{ указы-}$
 вают на величины порядка малости $\bar{V}$ и V_x соответственно, элементы $\{\{\alpha^{*ij}\}\}$ легко определяются через элементы $\{\{l^{ij}\}\}$ и $\{\{\alpha^{ij}\}\}$. Доказательство сходимости разностной схемы будем проводить, используя метод энергетических неравенств и теоремы вложения [5, 6]. Справедлива

Лемма. Систему функций $\mu_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ можно выбрать так, что в граничных точках сетки ω_h будут справедливы неравенства:

$$\sum_{i=1}^n \xi^i (v^i)^2|_{x=0} \geq C_1 \sum_{i=1}^{n_0} (v^i)^2|_{x=0}, \quad C_1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \xi^i (v^i)^2|_{x=1} \geq C_1 \sum_{i=n_0+1}^n (v^i)^2|_{x=1},$$

$$\sum_{i=1}^n \xi^i (v_i^i)^2|_{x=0} \geq C_2 \sum_{i=1}^{n_0} (v_i^i)^2|_{x=0}, \quad C_2 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \xi^i (v_i^i)^2|_{x=1} \geq C_2 \sum_{i=n_0+1}^n (v_i^i)^2|_{x=1}.$$

Из-за громоздкости выкладок доказательство леммы мы опускаем. Учитывая полученные неравенства, а также используя оценки, аналогичные [4], можно доказать следующую теорему о сходимости разностной схемы (4) — (6).

Теорема. Пусть решение исходной задачи в Ω существует, единственно и обладает гладкостью, которая обеспечивает погрешность аппроксимации порядка $0(\tau + h^2)$. Кроме того, элементы матриц $A\left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$ и $\xi\left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$ дважды непрерывно дифференцируемы по компонентам $\{u^i\}$, $\left\{\frac{\partial u^i}{\partial x}\right\}$ ($i = \overline{1, n}$) и непрерывно дифференцируемы по x и t . Тогда при достаточно малых h и τ и таких, что $(\tau + h^2)^2 \tau^{-1} h^{-1} \rightarrow 0$, решение, полученное по разностной схеме /4/ — /6/, сходится к решению исходной задачи, при этом порядок сходимости совпадает с порядком погрешности аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. — М., 1978.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М., 1971.
3. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М., 1972.
4. Абрашин В. Н., Вакульчик П. А. — Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1975, № 5, с. 125.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М., 1977.
6. Абрашин В. Н. — Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 2.

Поступила в редакцию
17.06.80

Кафедра вычислительной
математики

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Постановка задачи. Большинство практических задач принятия решения, возникающих в экономике, промышленности и военном деле, являются задачами векторной оптимизации [1]. Будем рассматривать задачу векторной оптимизации с двумя критериями качества.

Допустим, требуется изготовить емкость наибольшего объема, вес которой был бы минимальным. Параметры емкости и отпущенный для ее изготовления материал удовлетворяют системе ограничений A . Эта задача имеет следующую математическую модель:

$$\begin{cases} f_1(x) \rightarrow \min \\ f_2(x) \rightarrow \min \\ x \in A, x \in R^n, \end{cases} \quad (1)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывные, монотонные по любому направлению функции; A — система ограничений, определяющая выпуклое множество.

Заметим, что с математической точки зрения задача векторной оптимизации является некорректной. Обычно в качестве решения задачи векторной оптимизации выбирают множество эффективных точек.

Определение 1. Точку $x^{\text{эф}}$ назовем эффективной, если не существует на множестве ограничений задачи (1) таких точек, что $f_i(x) \geq f_i(x^{\text{эф}})$, $i = 1, 2$ и $f_i(x) \neq f_i(x^{\text{эф}})$, хотя бы для одного i .

Постановку задачи векторной оптимизации следует уточнить. Правило, в каком смысле понимается решение проблемы, называется принципом выбора решения задачи векторной оптимизации. Принцип выбора заключается в постановке одной или ряда математических корректных задач оптимизации, решение которых и принимается в качестве решения задачи векторной оптимизации. Откорректируем сформулированную выше математическую модель задачи векторной оптимизации следующим образом.

Определение 2. Эффективную точку x^0 назовем решением задачи (1), если она удовлетворяет соотношению

$$\frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} = \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}, \quad (2)$$

где $m_{11} = f_1(\underline{x}_1^0)$, $M_{11} = f_1(\bar{x}_1^0)$, $m_{21} = f_2(\underline{x}_2^0)$, $M_{21} = f_2(\bar{x}_2^0)$, а $\underline{x}_1^0$, $\bar{x}_1^0$, $\underline{x}_2^0$, $\bar{x}_2^0$ — решения задач, соответственно (3)—(6).

$$\begin{cases} f_1(x) \rightarrow \min \\ x \in A \end{cases} \quad (3), \quad \begin{cases} f_1(x) \rightarrow \max \\ x \in A \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f_2(x) \rightarrow \min \\ x \in A \end{cases} \quad (5), \quad \begin{cases} f_2(x) \rightarrow \max \\ x \in A \end{cases} \quad (6)$$

Соотношение (2) является условием, регулирующим относительные потери различных критериев.

При такой постановке задачи дополнительным требованием к изготовителям могут быть следующие: уменьшение объема на одну относительную единицу соответствует уменьшению веса на одну относительную единицу (или на k , или не менее, чем на k единиц). Тогда в качестве корректирующих можно выбрать такие условия:

$$k \cdot \frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} = \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}, \quad \frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} \leq k \cdot \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}, \quad k = \text{const.}$$

Условие (2) уже использовалось в литературе для определения понятия оптимального решения задачи векторной оптимизации [2]. Числа m_{i1} ,

$M_{i1} (i = \overline{1, 2})$ могут быть выбраны из практических соображений, учитывая смысл задачи (например, исходя из предполагаемого решения задачи).

Определение 3. Функцию $f(x)$, $x \in R^n$ назовем монотонной по любому направлению, если функция $f(x + \varepsilon l)$ является монотонной по ε для любого l и $\varepsilon > 0$.

2. Алгоритм решения. Предлагаемый алгоритм решения задачи вида (1) основан на итеративной процедуре, в ходе которой решаются параллельно две задачи с единственным критерием качества и проводится поэтапное получение информации об отклонении текущего плана от оптимального решения. Отыскание решения задачи основано на методе деления отрезка пополам.

Решение задачи (1) заменяем решением задач

$$\begin{cases} f_1(x) \rightarrow \min \\ f_2(x) \leq \frac{m_{2j} + M_{2j}}{2} \\ x \in A \end{cases} \quad (7), \quad \begin{cases} f_2(x) \rightarrow \min \\ f_1(x) \leq \frac{m_{1j} + M_{1j}}{2} \\ x \in A \end{cases} \quad (8)$$

где $j = \overline{1, N}$ — номер итерации. Пусть x_{1j}^0 , x_{2j}^0 — соответственно решения задач (7) и (8). Введем обозначения:

$$\Delta(x) = \frac{f_2(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_1(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}, \quad (9)$$

$$\bar{\Delta}_{11} = \Delta(x_1^0), \quad \underline{\Delta}_{11} = \Delta(x_1^0), \quad \bar{\Delta}_{21} = \Delta(x_2^0), \quad \underline{\Delta}_{21} = \Delta(x_2^0), \quad (10)$$

$$\Delta_{1j} = \Delta(x_{1j}^0), \quad \Delta_{2j} = \Delta(x_{2j}^0). \quad (11)$$

Из всех подсчитанных оценок выбираем для каждого i минимальную по абсолютной величине:

$$\min \{ |\bar{\Delta}_{ij}|, |\underline{\Delta}_{ij}|, |\Delta_{ij}| \} = \Delta_{ij}^0, \quad i = \overline{1, 2} \quad (12)$$

Возможны следующие случаи. 1) $\Delta_{ij}^0 \neq \Delta_{ij}$. В задаче (7) (или (8)) знак в дополнительном ограничении меняем на противоположный и вновь решаем полученную задачу.

2) $\Delta_{ij}^0 = \Delta_{ij}$. Определяем знак текущей оценки Δ_{ij} , $i = \overline{1, 2}$ и в зависимости от него пересчитываем верхнюю ($\bar{\Delta}_{ij}$) и нижнюю ($\underline{\Delta}_{ij}$) оценки, наибольшее (M_{ij}) и наименьшее (m_{ij}) значения функции на данной итерации j . Новые значения вычисляются по формулам (13) и (14):

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \Delta_{ij} = \operatorname{sgn} \bar{\Delta}_{ij}, \text{ тогда } \bar{\Delta}_{ij+1}^H &= \Delta_{ij}, \quad M_{ij+1}^H = f_i(x_{ij}^0), \\ \underline{\Delta}_{ij+1}^H &= \underline{\Delta}_{ij}, \quad m_{ij+1}^H = m_{ij}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \Delta_{ij} \neq \operatorname{sgn} \bar{\Delta}_{ij}, \text{ тогда } \bar{\Delta}_{ij+1}^H &= \bar{\Delta}_{ij}, \quad M_{ij+1}^H = M_{ij}, \\ \underline{\Delta}_{ij+1}^H &= \Delta_{ij}, \quad m_{ij+1}^H = f_i(x_{ij}^0), \end{aligned} \quad (14)$$

переходя к следующей итерации, решаем задачи

$$\begin{cases} f_1(x) \rightarrow \min \\ f_2(x) \leq \frac{m_{2j}^H + M_{2j}^H}{2} \\ x \in A \end{cases} \quad (15), \quad \begin{cases} f_2(x) \rightarrow \min \\ f_1(x) \leq \frac{m_{1j}^H + M_{1j}^H}{2} \\ x \in A \end{cases} \quad (16)$$

Решение задач вида (15), (16) продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено соотношение (2) или условие субоптимальности (17):

$$|\Delta_{ij}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad i = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Вектор x^0 , на котором выполняется условие (2) или (17), назовем условно эффективной точкой.

Для того, чтобы определить, является ли условно эффективная точка решением задачи (1), необходимо проверить, является ли эта точка опти-

мальной (эффективной) по Парето. Для этого достаточно, чтобы точка x^0 совпадала с решением задачи (18) или (19)

$$\begin{cases} f_1(x^0) \rightarrow \min \\ f_2(x^0) \leq f_2(x) \end{cases} \quad (18), \quad \begin{cases} f_2(x^0) \rightarrow \min \\ f_1(x^0) \leq f_1(x) \end{cases} \quad (19)$$

3. Доказательство существования решения. Мы полагали функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывными, монотонными по любому направлению. Тогда функция $\Delta(x) = \frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}$ также будет непрерывной, как разность двух непрерывных функций. Кроме того, на значениях $\bar{x}_i^0$ и $\underline{x}_i^0$ оценка Δ имеет противоположные знаки. Покажем это. Пусть $i=1$.

$$\Delta(\underline{x}_1^0) = \frac{f_1(\underline{x}_1^0) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_2(\underline{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} = - \frac{f_2(\underline{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} \leq 0,$$

$$\Delta(\bar{x}_1^0) = \frac{f_1(\bar{x}_1^0) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_2(\bar{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} = 1 - \frac{f_2(\bar{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} \geq 0.$$

Итак, функция $\Delta(x)$ — непрерывная, на границах односвязного множества принимает значения с противоположными знаками. Следовательно, она принимает значение 0 внутри рассматриваемого множества, т. е. существует такая точка x^0 , что $\Delta(x^0) = 0$. Покажем, что предложенный алгоритм сходится именно к решению задачи (1). Для этого, необходимо доказать, что $\forall \varepsilon > 0, \exists n$, что $\forall m \geq n, |\Delta_{im}| \leq \varepsilon, i=1, 2$. Согласно самому алгоритму, на каждом шаге отрезок, на котором находится минимальное значение рассматриваемой функции, уменьшается вдвое. Причем, каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему. Согласно лемме о вложенных отрезках, все они имеют одну общую точку. Абсцисса этой точки будет доставлять решение уравнению $\Delta(x) = 0$. Так как на каждом последующем отрезке оценка $|\Delta|$ заведомо меньше, чем на предыдущем (см. алгоритм).

Предложенный алгоритм применим на множестве выпуклых функций. При разработке алгоритма для этого класса функций использован тот факт, что каждую выпуклую функцию можно заменить двумя монотонными.

Алгоритм распространен также на случай конечного числа критериев качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М., 1964.
2. Волкович В. Л., Даргейко Л. Ф. — Кибернетика, 1972, № 5.

Поступила в редакцию
30.06.80.

Кафедра МОУ

УДК 62—50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, А. Л. ЛЕБЕДЕВ

ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Постановка задачи. Рассмотрим дискретную систему, состояние которой описывается линейным разностным уравнением с переменными коэффициентами

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + \bar{A}_{k-1}x_{k-1-N} + G_{k-1}\omega_{k-1}, \quad (1)$$

где x_k — n -вектор системы; ω_{k-1} — m -вектор случайных внешних воздействий; A_{k-1} , $\bar{A}_{k-1}$, G_{k-1} — матрицы соответствующих размерностей; N — число точек на отрезке запаздывания.

ω_{k-1} представляет собой дискретный белый шум с нулевым средним значением и известной ковариационной матрицей Q_k , т. е. $M[\omega_k] = 0 \forall k$

и $M[\omega_k \omega_j^T] = Q_k \delta_k(k-j)$, где $\delta_k(k-j) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$, функция Кронекера, а матрица Q_k неотрицательно определена (т. е. допускается $\omega_k \equiv 0$.)

Начальное состояние системы

$$x_0(\cdot) = \{x(t_0) = x_0, x_\mu = \varphi_\mu, \mu = \overline{1, N}\}, \quad (2)$$

где $x_\mu = x(t_0 - \mu\theta)$, а θ — шаг дискретизации, т. е. $\theta = t_k - t_{k-1} \forall k$. В (2) x_0 — случайный вектор с известными статистическими свойствами $M[x_0] = \mu_0$, $M[x_0 x_0^T] = P_{x_0}$, а φ_μ — дискретный белый шум с нулевым средним значением и неотрицательно определенной матрицей X_k .

Пусть в любой момент времени t_k имеется в распоряжении r -мерный выходной сигнал

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (3)$$

где C_k — $(r \times n)$ — матрица наблюдения, которая считается известной, а измерительный шум v_k предполагается белым с нулевым средним значением и положительно определенной ковариационной матрицей R_k .

Случайные помехи в системе, в начальных условиях и в измерительном устройстве считаем независимыми между собой, а также от вектора начального состояния x_0 .

Для описанной математической модели системы ставится задача: найти оценку $\hat{x}_k$ вектора состояния системы в момент t_k в классе линейных оценок. Эта оценка должна быть наилучшей в том смысле, что математическое ожидание суммы квадратов ошибок оценивания принимает минимальное значение. Если под ошибкой оценивания понимать вектор $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$, то оптимальность оценки достигается минимизацией функционала

$$e_k = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N M[\tilde{x}_{k-i}^T \tilde{x}_{k-j}] \rightarrow \min. \quad (4)$$

Поставленная задача является задачей фильтрации (см. [1, 2]).

Вывод уравнения оценивания. В качестве линейной структуры уравнения оценивания возьмем структуру уравнения (1).

Сначала оценку $\hat{x}_k$ будем прогнозировать лишь на основе знания оценок в моменты t_{k-1} и t_{k-1-N} , т. е. без привлечения результатов измерений. Так как шумовая помеха ω_{k-1} не зависит от вектора состояния в моменты t_{k-1} и t_{k-1-N} и имеет нулевое среднее значение, то можно считать, что она не влияет на оценку $\hat{x}_k$. Это означает, что при фильтрации и предсказании наилучшая оценка белого шума с нулевым средним тождественно равна нулю. Тогда оценку естественно прогнозировать в виде

$$\hat{x}'_k = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \bar{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1-N}. \quad (5)$$

Результаты измерения выходного сигнала можно использовать для корректирования данной оценки. Действительно, ожидаемое значение

выходного сигнала равно $\hat{y}_k = C_k \hat{x}'_k$ в момент t_k и $\hat{y}_{k-j} = C_{k-j} \hat{x}'_{k-j}$ в моменты t_{k-j} , $j = \overline{1, N}$. Действительное же значение выходных сигналов в эти моменты равно y_k и y_{k-j} . Теперь введем последовательность «обновляющих» величин (по аналогии с [3]):

$$\tilde{y}_k = y_k - C_k \hat{x}'_k, \quad \tilde{y}_{k-j} = y_{k-j} - C_{k-j} \hat{x}'_{k-j}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Таким образом, можно скорректировать оценку (5), добавляя к ней «обновляющие» величины с соответствующими весовыми коэффициентами. Тогда можно принять окончательную форму уравнения оценивания

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k \tilde{y}_k + \sum_{j=1}^N L_{k,j} \tilde{y}_{k-j}. \quad (6)$$

Матричные коэффициенты усиления K_k и $L_{k,j}$ выбираются из условия минимума функционала (4). Такие матрицы K_k и $L_{k,j}$, при которых функционал (4) принимает минимальное значение, назовем оптимальными коэффициентами усиления.

Анализ соотношений (5), (6) показывает, что в фильтре Калмана реализуется идея предсказания — коррекции. Предыдущие оценки $\hat{x}_{k-1}$, $\hat{x}_{k-1-N}$ экстраполируются на один шаг вперед и затем используются для получения наилучшей оценки нового наблюдения, т. е. для построения $\hat{y}_k$ и $\hat{y}_{k-j}$. Ошибки между наилучшей оценкой текущего наблюдения и фактическими наблюдениями составляют последовательность «обновляющихся» величин. Эти ошибки взвешиваются с весами K_k и $L_{k,j}$ для формирования сигналов коррекции, которые складываются с предсказанной оценкой (5), в результате чего получается новая оценка.

Вывод соотношений для оптимальных коэффициентов усиления. Поскольку очевидным образом выполняется соотношение

$$M[\tilde{x}_k^T \tilde{x}_k] = Sp M[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T], \quad (7)$$

качество оценивания будем характеризовать ковариационной матрицей ошибок оценивания $P_k = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]$. Для вычисления P_k сформируем вектор ошибок $\tilde{x}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k = & A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \bar{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1-N} + K_k (C_k x_k + v_k - C_k A_{k-1} \hat{x}_{k-1} - \\ & - C_k \bar{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1-N}) + \sum_{j=1}^N L_{k,j} [C_{k-j} x_{k-j} + v_{k-j} - C_{k-j} (A_{k-j-1} \hat{x}_{k-j-1} + \\ & + \bar{A}_{k-j-1} \hat{x}_{k-j-N-1})] - A_{k-1} x_{k-1} - \bar{A}_{k-1} x_{k-1-N} = (I - K_k C_k) (A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + \\ & + \bar{A}_{k-1} \tilde{x}_{k-1-N} - G_{k-1} \omega_{k-1}) + K_k v_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} [C_{k-j} (A_{k-j-1} \tilde{x}_{k-j-1} + \\ & + \bar{A}_{k-j-1} \tilde{x}_{k-j-N-1} - G_{k-j-1} \omega_{k-j-1}) - v_{k-j}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее формируем матрицу P_k . Для этого подставим (8) в формулу $P_k = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]$ и воспользуемся тем, что все случайные воздействия, действующие на систему, некоррелированы. Если при этом ввести следующие обозначения:

$$P_{k-1,j} = M[\tilde{x}_{k-1} \tilde{x}_{k-1-j}^T], \quad P_{k-1,j,i} = M[\tilde{x}_{k-1-j} \tilde{x}_{k-1-i}^T], \\ R_{k-j} \delta_j(j-i) = M[v_{k-j} v_{k-i}^T], \quad Q_{k-1-j} \delta_j(j-i) = M[\omega_{k-1-j} \omega_{k-1-i}^T],$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_k = & A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + A_{k-1} P_{k-1,N} \bar{A}_{k-1}^T + \bar{A}_{k-1} P_{k-1,N}^T A_{k-1}^T + \\ & + \bar{A}_{k-1} P_{k-1,N,N} \bar{A}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k,j} = & A_{k-1-j} P_{k-1,j}^T A_{k-1}^T + A_{k-1-j} P_{k-1,N}^T \bar{A}_{k-1}^T + \bar{A}_{k-1-j} P_{k-1,N+j}^T A_{k-1}^T + \\ & + \bar{A}_{k-1-j} P_{k-1,N,N+j}^T \bar{A}_{k-1}^T, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k,j,i} = & A_{k-1-j} P_{k-1,j,i}^T A_{k-1-i}^T + A_{k-1-j} P_{k-1,j,N+i}^T \bar{A}_{k-1-i}^T + \\ & + \bar{A}_{k-1-j} P_{k-1,N+j,i}^T A_{k-1-i}^T + \bar{A}_{k-1-j} P_{k-1,N+j,N+i}^T \bar{A}_{k-1-i}^T + \\ & + G_{k-1-j} Q_{k-1-j} \delta_j(j-i) G_{k-1-i}^T, \end{aligned} \quad (11)$$

то после соответствующих преобразований можно получить следующее соотношение:

$$P_k = \bar{P}_k - K_k C_k \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T L_{k,j}^T \right) - \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} \right) C_k^T K_k^T +$$

$$+ K_k (C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k) K_k^T + \sum_{j=1}^N [L_{k,j} (C_{k-j} \bar{P}_{k,j} C_{k-j}^T + R_{k-j}) L_{k,j}^T - L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} - \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T L_{k,j}^T] + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j,i} C_{k-i}^T L_{k,i}^T. \quad (12)$$

Матрицы $(C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k)$ и $(C_{k-j} \bar{P}_{k,j} C_{k-j}^T + R_{k-j})$ неотрицательно определены и симметричны, что выражается соотношениями

$$S_k S_k^T = C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k, \quad (13)$$

$$S_{k,j} S_{k,j}^T = C_{k-j} \bar{P}_{k,j} C_{k-j}^T + R_{k-j}. \quad (14)$$

В (12) второе — четвертое и пятое слагаемые образуют квадратичные матричные полиномы относительно неизвестных матриц K_k и $L_{k,j}$. Предположим, что существуют такие матрицы D_k и $D_{k,j}$, что возможно следующее дополнение указанных полиномов до полного квадрата:

$$P_k = \bar{P}_k + (K_k S_k - D_k) (K_k S_k - D_k)^T - D_k D_k^T + \sum_{j=1}^N [(L_{k,j} S_{k,j} - D_{k,j}) \times \\ \times (L_{k,j} S_{k,j} - D_{k,j})^T - D_{k,j} D_{k,j}^T] + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j,i} C_{k-i}^T L_{k,i}^T. \quad (15)$$

Раскрыв скобки в (15) и приравняв соответствующие члены членам (12), можно определить матрицы $D_k, D_{k,j}$:

$$D_k = \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} \right) C_k^T (S_k^T)^{-1}, \quad (16)$$

$$D_{k,j} = \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T (S_{k,j}^T)^{-1}. \quad (17)$$

Второе и четвертое слагаемые в (15) — неотрицательно определенные матрицы и, значит, след матрицы P_k принимает минимальное значение, когда они равны нулю, т. е. при

$$K_k S_k = \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} \right) C_k^T (S_k^T)^{-1}, \quad (18)$$

$$L_{k,j} S_{k,j} = \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T (S_{k,j}^T)^{-1}. \quad (19)$$

Учтя (13), (14), будем иметь

$$K_k = \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} \right) C_k^T (C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k)^{-1}, \quad (20)$$

$$L_{k,j} = \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T (C_{k-j} \bar{P}_{k,j} C_{k-j}^T + R_{k-j})^{-1}. \quad (21)$$

Получение уравнений для матриц $P_k, P_{k,j}, P_{k,j,i}$. Уравнение для P_k получается подстановкой (16) и (17) в (15). В результате несложных преобразований можно получить

$$P_k = (I - K_k C_k) \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T L_{k,j} \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j,i} C_{k-i}^T L_{k,i}^T. \quad (22)$$

При выводе (22) следует учесть соотношения (13), (14), (20), (21), а также перестановочность операций транспонирования и обращения матриц. Начальное условие для (22)

$$P_0 = P_{\infty}. \quad (23)$$

Теперь формируем матрицу $P_{k,j}$, для чего воспользуемся соотношением (8)

$$P_{k,j} = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_{k-j}^T] = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_{k-1-(j-1)}^T] = (I - K_k C_k)(A_{k-1} P_{k-1, j-1} + \bar{A}_{k-1} P_{k-1, N, j-1}) - \sum_{i=1}^N L_{k,i} C_{k-i} (A_{k-1-i} P_{k-1, i, j-1} + \bar{A}_{k-1-i} P_{k-1, N+i, j-1}). \quad (24)$$

Начальные условия:

$$P_{0,j} = 0, \quad j = \overline{0, N}; \quad (25)$$

граничные условия:

$$P_{k,0} = P_k^0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (26)$$

где матрица P_k^0 определяется из уравнения (22) с нулевыми начальными условиями.

Соотношение для $P_{k,j,i}$ очевидно:

$$P_{k,j,i} = M[\tilde{x}_{k-j} \tilde{x}_{k-i}^T] = M[\tilde{x}_{k-1-(j-1)} \tilde{x}_{k-1-(i-1)}^T] = P_{k-1, j-1, i-1}. \quad (27)$$

Начальные условия:

$$P_{0,j,i} = X_j \delta_j(j-i), \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, N}, \quad X_0 = 0; \quad (28)$$

граничные условия задаются матрицей $P_{k,i}$:

$$P_{k,0,i} = P_{k,i}, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Соотношения (5), (6), (9)–(11), (20)–(29) образуют оптимальный дискретный фильтр Калмана для системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E., Bucy R. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory.— Trans. ASME, J. Basic Eng., 1961.
2. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства.— М., 1976.
3. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М., 1976.

Поступила в редакцию
30.06.80.

Кафедра МОУ

УДК 517.948.32

А. П. ШИЛИН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, СВОДЯЩАЯСЯ К ТРЕМ ЗАДАЧАМ РИМАНА

Краевая задача типа задачи Римана

$$\sum_{k=0}^l \left[a_k(t) \frac{d^k \Phi^+(t)}{dt^k} + \int_L A_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] - \sum_{k=0}^p \left[b_k(t) \frac{d^k \Phi^-(t)}{dt^k} + \int_L B_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^-(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] = f(t), \quad (1)$$

где $A_k(t, \tau)$ и $B_k(t, \tau)$ — фредгольмовы ядра, изучена в [1–3]. В указанных работах с помощью различных интегральных представлений искомой функции установлена равносильность задачи (1) интегральному уравнению (полному сингулярному или уравнению Фредгольма), а также дана нижняя оценка числа произвольных постоянных, входящих в решение. Естествен вопрос о выделении частных случаев задачи (1), для которых картина разрешимости была бы более точной, чем в общем случае. Ниже рассмотрен один такой частный случай, сводящийся к трем задачам Римана; решение дается в замкнутой форме. На возможность

выделения этого случая автора натолкнула на мысль работа Ю. И. Черского [4], в которой некоторые интегральные уравнения сводятся к двум задачам Римана. Приведем формулировку задачи.

Пусть L — простой гладкий замкнутый контур на комплексной плоскости, D^+ и D^- — его внутренность и внешность соответственно. Считаем, что положительная ориентация контура оставляет D^+ слева и что начало координат принадлежит D^+ . Зададим на контуре H -непрерывные функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $c(t) \neq 0$, $f(t)$. Требуется найти все кусочно-аналитические функции $\Phi(z)$ по краевому условию (1) на L при $l=0$, $p=0$, $a_0(t) = b(t)$, $b_0(t) = -a(t)c(t)$, $A_0(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t}$, $B_0(t, \tau) = \frac{a(t)}{2\pi i} \frac{c(\tau) - c(t)}{\tau - t}$.

Решение ищется в классе функций, исчезающих на бесконечности. Краевое условие (1) в указанном случае после несложных преобразований может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b(t) \Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Phi^+(\tau) d\tau}{\tau - t} = \\ & = -\frac{1}{2} a(t) c(t) \Phi^-(t) + \frac{a(t)}{2\pi i} \int_L \frac{c(\tau) \Phi^-(\tau) d\tau}{\tau - t} + f(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Введем новые неизвестные кусочно-аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ по формулам

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Phi^+(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{c(\tau) \Phi^-(\tau) d\tau}{\tau - z}. \quad (3)$$

Теперь краевое условие (2) можно записать в виде задачи Римана

$$\Phi_1^+(t) = a(t) \Phi_2^-(t) + f(t), \quad (4)$$

откуда на основании теории задачи Римана [3]

$$\frac{\Phi_1^+(t)}{b(t)} = \frac{f(t)}{2b(t)} = \frac{X^+(t)}{2\pi i b(t)} \int_L \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{X^+(t) P_{\alpha-1}(t)}{b(t)}, \quad (5)$$

$$\Phi_2^-(t) = -\frac{f(t)}{2a(t)} + \frac{X^+(t)}{2\pi i a(t)} \int_L \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{X^+(t) P_{\alpha-1}(t)}{a(t)}, \quad (6)$$

где $2\pi\alpha = [\arg a(t)]_L$, $P_{\alpha-1}(t)$ — многочлен степени не выше $\alpha-1$ с произвольными комплексными коэффициентами, $P_{\alpha-1}(t) \equiv 0$ при $\alpha \leq 0$,

$$X^+(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln [t^{-\alpha} a(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln [\tau^{-\alpha} a(\tau)]}{\tau - t} d\tau \right\}.$$

При $\alpha < 0$ для разрешимости задачи (4) необходимы и достаточны условия

$$\int_L \frac{f(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, \dots, -\alpha. \quad (7)$$

Записав по формулам Сохоцкого выражения для плотностей интегралов типа Коши (3), придем еще к двум задачам Римана:

$$\Phi^+(t) = -\frac{1}{b(t)} \Phi_1^-(t) + \frac{\Phi_1^+(t)}{b(t)} \quad (8), \quad \Phi_2^+(t) = c(t) \Phi^-(t) + \Phi_2^-(t), \quad (9)$$

свободные члены которых даются формулами (5) и (6).

Из задачи (8) находим

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_1^+(\tau)}{b(\tau) Y^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + Y(z) Q_{\beta-1}(z), \quad z \in D^+, \quad (10)$$

где $2\pi\beta = -[\arg b(t)]_L$, $Q_{\beta-1}(z)$ — многочлен степени не выше $\beta-1$ с произвольными комплексными коэффициентами, $Q_{\beta-1}(z) \equiv 0$ при $\beta \leq 0$,

$$Y(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \left[-\frac{\tau^{-\beta}}{b(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau-z} \right\}, \quad z \in D^+.$$

При $\beta < 0$ для разрешимости задачи (8) необходимы и достаточны условия

$$\int_L \frac{\Phi_1^+(t) t^{m-1} dt}{b(t) Y^+(t)} = 0, \quad m = 1, \dots, -\beta. \quad (11)$$

Из задачи (9) находим

$$\Phi(z) = \frac{z^{-1} Z(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_2^-(\tau)}{Z_2^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} + Z(z) S_{\gamma-1}(z), \quad z \in D^-, \quad (12)$$

где $2\pi\gamma = [\arg c(t)]_L$; $S_{\gamma-1}(z)$ — многочлен степени не выше $\gamma-1$ с произвольными комплексными коэффициентами, $S_{\gamma-1}(z) \equiv 0$ при $\gamma \leq 0$,

$$Z(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln [\tau^{-1} c(\tau)] d\tau}{\tau-z} \right\}, \quad z \in D^+ \cup D^-.$$

При $\gamma < 0$ для разрешимости задачи (9) необходимы и достаточны условия

$$\int_L \frac{\Phi_2^-(t)}{Z^+(t)} t^{n-1} dt = 0, \quad n = 1, \dots, -\gamma. \quad (13)$$

При $\alpha > 0$ условия (11), (13) будут представлять собой системы линейных алгебраических уравнений, соответственно

$$\sum_{j=1}^{\alpha} g_{mj} \lambda_j = g_m, \quad m = 1, \dots, -\beta, \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{\alpha} h_{nj} \lambda_j = h_n, \quad n = 1, \dots, -\gamma, \quad (15)$$

где

$$g_{mj} = \int_L \frac{X^+(t) t^{m+j-2} dt}{b(t) Y^+(t)}, \quad h_{nj} = \int_L \frac{X^+(t) t^{n+j-2} dt}{a(t) Z^+(t)},$$

$$g_m = - \int_L \frac{f(t) t^{m-1} dt}{2b(t) Y^+(t)} - \int_L \frac{X^+(t) t^{m-1} dt}{2\pi i b(t) Y^+(t)} \int_L \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t},$$

$$h_n = \int_L \frac{f(t) t^{n-1} dt}{2a(t) Z^+(t)} - \int_L \frac{X^+(t) t^{n-1} dt}{2\pi i a(t) Z^+(t)} \int_L \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Условия разрешимости задачи (2) соберем в следующей теореме.

Теорема 1. Для разрешимости задачи (2) необходимо: выполнение условий (7), если $\alpha < 0$; выполнение условий (11), если $\beta < 0$, что при $\alpha > 0$ равносильно совместности системы (14); выполнение условий (13), если $\gamma < 0$, что при $\alpha > 0$ равносильно совместности системы (15); совместность объединенной системы, состоящей из систем (14) и (15), если $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$. Одновременное выполнение этих условий при указанных α , β , γ является достаточным для разрешимости задачи (2); при $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ задача (2) разрешима безусловно.

В случае разрешимости задачи (2) формулы (10), (12) дают ее общее решение. При $\alpha > 0$ через посредство формул (5), (6) в это решение входит многочлен $P_{\alpha-1}(t) = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j t^{j-1}$, коэффициенты которого при $\beta \geq 0$,

$\gamma \geq 0$ остаются произвольными, при $\beta < 0, \gamma \geq 0$ представляют собой общее решение системы (14), при $\beta \geq 0, \gamma < 0$ — общее решение системы (15), а при $\beta < 0, \gamma < 0$ — общее решение объединенной системы (14), (15). Обозначим r ранг системы (14), если $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma \geq 0$, системы (15), если $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma < 0$, объединенной системы (14), (15), если $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0$; положим $r = 0$ в остальных случаях.

Теорема 2. Число линейно независимых решений однородной задачи (2) равно $\max\{0, \alpha\} + \max\{0, \beta\} + \max\{0, \gamma\} - r$.

В самом деле, пусть $f(t) \equiv 0$. Если $\Phi(z) \equiv 0, z \in D^+$, то $\Phi^+(t) \equiv 0$ и из краевого условия (8) получим $\Phi_1^-(t) \equiv \Phi_1^+(t)$. В силу теоремы об аналитическом продолжении и теоремы Лиувилля $\Phi_1(z) \equiv 0$, тогда из формулы (5) следует, что $P_{\alpha-1}(t) \equiv 0$, а затем из формулы (10) получаем $Q_{\beta-1}(t) \equiv 0$. Аналогично из предположения $\Phi(z) \equiv 0, z \in D^-$, получим, что $P_{\alpha-1}(t) \equiv 0, S_{\gamma-1}(t) \equiv 0$. Следовательно, ненулевые коэффициенты многочленов $P_{\alpha-1}(t), Q_{\beta-1}(t), S_{\gamma-1}(t)$ не могут дать линейно зависящие решения однородной задачи (2), что и доказывает теорему 2.

З а м е ч а н и е. Если $\delta(t)$ и $\omega(t)$ — сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы L на себя, то краевая задача

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b(t) \Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Phi^+(\tau) \delta'(\tau) d\tau}{\delta(\tau) - \delta(t)} = \\ & = \frac{1}{2} a(t) c(t) \Phi^-(t) - \frac{a(t)}{2\pi i} \int_L \frac{c(\tau) \Phi^-(\tau) \omega'(\tau) d\tau}{\omega(\tau) - \omega(t)} + f(t) \end{aligned}$$

аналогично сводится к трем задачам Газемана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крикунов Ю. М. — Уч. зап. Казанского ун-та, 1952, т. 112, № 10, с. 191.
2. Рогожин В. С. — Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 4, с. 797.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М., 1977.
4. Черский Ю. И. — Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 4, с. 802.

Поступила в редакцию
13.11.80

Кафедра теории функций

УДК 33.083.722

А. А. КОЛЯДА, Ф. С. ПИЛИПОВЕЦ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОПРАВКИ АМЕРБАЕВА К НЕТОЧНОМУ РАНГУ ЧИСЛА В СИСТЕМАХ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

В работе доказана в общем виде теорема о нормированном ранге числа в системах остаточных классов (СОК) $v^{(n)}$ и с ее помощью установлена формула для мощности $\mu[M_1]$ подмножества M_1 чисел из диапазона СОК, для которых ранг не совпадает с неточным рангом, введенным В. М. Амербаевым. Программная реализация полученной формулы показала, что M_1 составляет незначительную часть диапазона СОК — в среднем 3–6 %.

Рассмотрим систему остаточных классов (СОК) с n попарно взаимно простыми модулями $p_1, p_2, \dots, p_n$ и пусть $(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn})$ — нормированный остаточный код в этой СОК [1, с. 141] числа $A \in [0, P^{(n)})$, где

$P^{(n)} = \prod_{i=1}^n p_i, \alpha_{in} = |A| P_{in}^{-1} |p_i| p_i, P_{in} = \frac{P^{(n)}}{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$; через $|X|_p$ обозначается остаток от деления числа X на p .

Как известно, нормированный ранг $v^{(n)}$ числа A (в дальнейшем он называется просто рангом) определяется соотношением:

$$A = \sum_{i=1}^n P_{in} \alpha_{in} - v_A^{(n)} P^{(n)} \quad (1)$$

и, следовательно, выражается формулой:

$$v_A^{(n)} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{in}}{p_i} \right] \quad (2)$$

$[X]$ — целая часть числа X .

Согласно [1, с. 151] для $v_A^{(n)}$ справедлива формула

$$v_A^{(n)} = \underline{v}_A^{(n)} + \eta(A), \quad (3)$$

где

$$\underline{v}_A^{(n)} = \left[\frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right], \quad (4)$$

а $\eta(A)$ равно 0 или 1, если $p_n > v_{\max}^{(n-1)}$ ($v_{\max}^{(n-1)}$ — максимальное значение $v^{(n-1)}$). Формулу (3) назовем формулой Амербаева, а величину $\eta(A)$ — поправкой Амербаева к неточному рангу $\underline{v}_A^{(n)}$. В [1, с. 151] также показано, что $\eta(A)$ можно выразить через ранг некоторого числа в укороченной СОК $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Другими словами, определение ранга с помощью (3) приводит к рекурсивной процедуре, при этом вычисление поправки $\eta(A)$ за минимальное время требует существенно больших аппаратных затрат, чем вычисление $\underline{v}_A^{(n)}$.

Найдем условие, при котором $v_A^{(n)} = \underline{v}_A^{(n)}$, а также определим распределение поправки Амербаева, т. е. мощности множеств: $M_i = \{A \in [0, P^{(n)}] \mid \eta(A) = i\}$, $i = 0, 1$.

Теорема 1. (0 ранге числа). Пусть n -ный модуль СОК удовлетворяет условию $p_n > v_{\max}^{(n-1)}$. Тогда для произвольного числа $A \in [0, P^{(n)})$ имеет место формула $v_A^{(n)} = \bar{v}_A^{(n)} - S_{B(A)}$, где

$$\bar{v}_A^{(n)} = \left\lfloor \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right\rfloor; \quad (5)$$

$S_{B(A)}$ — знак числа

$$B(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} P_{in-1} \alpha_{in-1} - \rho(A) P^{(n-1)}, \right. \\ \left. \rho(A) = \left\lfloor - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right\rfloor_{p_n} \right\} \quad (6)$$

определяемый как $S_{B(A)} = \begin{cases} 0, & \text{если } B(A) \geq 0, \\ 1, & \text{если } B(A) < 0. \end{cases}$

Через $[X]$ обозначается наименьшее целое число, не меньшее X .

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn})$ — произвольное число из $[0, P^{(n)})$. Рассмотрим последовательность чисел

$$A_j = \sum_{i=1}^n P_{in} \alpha_{in} - j P^{(n)}, \quad j = 0, 1, \dots, v_{\max}^{(n)} \quad (7)$$

$v_{\max}^{(n)} = \max_{X \in [0, P^{(n)})} \{v_X^{(n)}\}$ и представим A_j в виде:

$$A_j = \sum_{i=1}^{n-1} P_{in-1} \alpha_{in-1} - r_j P^{(n-1)}. \quad (8)$$

С этой целью преобразуем A_j следующим образом:

$$A_j = \sum_{i=1}^n P_{in} \alpha_{in} - j P^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} P_{in-1} (\alpha_{in-1} + [P_n \alpha_{in}/p_i] p_i) + \\ + P^{(n-1)} \alpha_{nn} - j P^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} P_{in-1} \alpha_{in-1} - \left(j p_n - \sum_{i=1}^n [\alpha_{in} p_n/p_i] \right) P^{(n-1)}, \quad (9)$$

$$r_j = j p_n - \sum_{i=1}^n [\alpha_{in} p_n/p_i].$$

По определению (см. формулу (1)) ранг числа равен номеру последнего неотрицательного числа в последовательности (7) и для его нахождения достаточно воспользоваться леммой о знаке числа [2], которая применительно к (8) формулируется в виде.

Лемма 1. (О знаке числа). Если $r_j > v_{\max}^{(n-1)}$, то $A_j < 0$, если $z_j \leq 0$, то $A_j > 0$.

Из (9) видно, что увеличение j на единицу приводит к увеличению r_j на p_n ; и так как по условию теоремы $1 \ p_n > v_{\max}^{(n-1)}$, то, применяя к (8) лемму 1, устанавливаем, что номер $v_A^{(n)}$ искомого элемента последовательности (7) совпадает с целым числом $\bar{v}_A^{(n)}$ удовлетворяющим условию

$$0 \leq r_{\bar{v}_A^{(n)}} < p_n, \quad (10)$$

если только число $B(A) = A_{\bar{v}_A^{(n)}}$ неотрицательно, если же $B(A) < 0$, то

$$v_A^{(n)} = \bar{v}_A^{(n)} - 1. \text{ Подставляя (9) при } j = \bar{v}_A^{(n)} \text{ в (10), получим } \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n \times \\ \times \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \leq \bar{v}_A^{(n)} < 1 + \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right], \text{ т. е.}$$

$$\bar{v}_A^{(n)} = \left\lfloor \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right\rfloor. \quad (11)$$

$$\text{Наконец, из (9) с учетом (11) имеем } \rho(A) = \left\lfloor \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right\rfloor p_n - \\ - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] = - \left\lfloor \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right\rfloor p_n - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] = - \left\lceil \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right\rceil p_n.$$

Теорема доказана. В [3] получен модульный вариант теоремы 1.

Сравнивая (3) с формулой для $v_A^{(n)}$ из теоремы 1 заключаем, что поправка Амербаева связана с величиной $S_{B(A)}$ следующим соотношением:

$$\eta(A) = \begin{cases} 1 - S_{B(A)}, & \text{если } \rho(A) \neq 0 \\ 0, & \text{если } \rho(A) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Придание величине $S_{B(A)}$ смысла знака числа позволило разработать алгоритм для $v_A^{(n)}$ [3, 4], который не является рекурсивной процедурой. Алгоритм характеризуется максимальным параллелизмом, независимостью вычислений по различным модулям СОК, высоким быстродействием $(2 + \log_2 n)$ — модульных операций).

Перейдем теперь непосредственно к вопросу о мощности $\mu[M_1]$ множества M_1 . Мощность дополнительного множества M_0 выражается через $\mu[M_1]$ соотношением $\mu[M_0] = P^{(n)} - \mu[M_1]$.

Сначала заметим, что лемму 1 можно усилить следующим образом.

Лемма 2. Пусть $n_A (1 \leq n_A \leq n-1)$ — число цифр остаточного кода числа $B = \sum_{i=1}^n P_{in-1} \alpha_{in-1} - r P^{(n-1)}$ в СОК с модулями $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ от-

личны от нуля, а остальные равны нулю. Тогда, если $n_A - 1 < r$, то $B < 0$; если $r \leq 0$, то $B \geq 0$.

Применяя к числу $B(A)$ из теоремы 1 лемму 2 и учитывая (12), заключаем, что поправка $\eta(A)$ может быть ненулевой лишь для чисел $A \in [0, P^{(n)})$, для которых $1 \leq \rho(A) \leq n_A - 1$, ($2 \leq n_A \leq n - 1$).

Теорема 2. Пусть n -ый модуль СОК удовлетворяет условию $p_n \geq \geq v_{\max}^{(n-1)}$. Тогда, $\mu[M_1] = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n-1} \mu_j$, где μ_j — количество чисел $A \in [0, P^{(n)})$, для которых $n_A = j$ и $1 \leq \rho(A) \leq j - 1$.

Доказательство. Пусть A произвольное число из $[0, P^{(n)})$, для которого $n_A = j$ ($2 \leq j \leq n - 1$) и $1 \leq \rho(A) \leq j - 1$. Используя (1), представим (6) в виде

$$B(A) = |A|_{P^{(n-1)}} + (v_{|A|_{P^{(n-1)}}}^{(n-1)} - \rho(A)) P^{(n-1)} \quad (13)$$

и найдем выражение для $\rho(A^D)$, где $A^D = |P^{(n)} - A|_{P^{(n)}}$. В соответствии с (6) имеем

$$\begin{aligned} \rho(A^D) &= \left| - \sum_{i=1}^n \left[p_n \frac{|p_i - \alpha_{in}|_{p_i}}{p_i} \right] \right|_{p_n} = \left| - \left(j p_n + \sum_{i=1}^n \left[- \frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right) \right|_{p_n} = \\ &= \left| - \left(-j - \sum_{i=1}^n [\alpha_{in} p_n / p_i] \right) \right|_{p_n}, \end{aligned} \quad (14)$$

т. е. $\rho(A^D) = |j - \rho(A)|_{p_n} = j - \rho(A)$, причем $1 \leq \rho(A^D) \leq j - 1$. Из (2) легко получить

$$v_{|A^D|_{P^{(n-1)}}}^{(n-1)} = j - 1 - v_{|A|_{P^{(n-1)}}}^{(n-1)}. \quad (15)$$

Применяя (14) и (15), из (13) находим:

$$B(A^D) = |A^D|_{P^{(n-1)}} + (j - 1 - v_{|A|_{P^{(n-1)}}}^{(n-1)} - j + \rho(A)) P^{(n-1)}$$

или

$$B(A^D) = |A^D|_{P^{(n-1)}} + (\rho(A) - v_{|A|_{P^{(n-1)}}}^{(n-1)} - 1) P^{(n-1)}. \quad (16)$$

Используя (13) и (16), легко проверить, что числа $B(A)$ и $B(A^D)$ в рассматриваемом случае всегда имеют разные знаки. Следовательно, количества чисел $A \in [0, P^{(n)})$, для которых $n_A = j$ и $\eta(A) = 1$ составляет

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i. \text{ Теорема доказана.}$$

На основе теоремы 2 составлена программа для вычисления $\mu[M_i]$, результаты счета по которой показали, что нормированный ранг числа в СОК совпадает с его неточным значением в среднем для 94—97 % чисел из $[0, P^{(n)})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амербаев В. М. Теоретические основы машинной арифметики. — Алма-Ата, 1976.
2. Коляда А. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 1, с. 12.
3. Коляда А. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 6.
4. Коляда А. А., Ивашкова Л. Ж. — А. с. 800989 СССР. Устройство определения ранга числа. — Оpubл. в БИ, 1981, № 4.

Краткие сообщения

УДК 621.374.32 : 621.317.421

А. Е. ПРЯХИН

ИЗМЕРИТЕЛЬ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ЦИФРОВЫМ ОТСЧЕТОМ В СИСТЕМЕ СИ

В настоящее время широкое распространение получили измерители магнитной индукции, основанные на явлении ядерного магнитного резонанса. Измерение индукции однородного постоянного магнитного поля B_0 сводится к измерению пропорциональной ему резонансной частоты f_0 электромагнитных колебаний: $B_0 = \sigma f_0$. Для наиболее часто применяемых датчиков, содержащих протоны (децимолярный раствор FeCl_3 в воде), коэффициент $\sigma = 2,34874 \cdot 10^{-2}$ Т/МГц. Частота f_0 обычно измеряется цифровым частотомером. Таким образом, для получения результатов измерения в единицах индукции магнитного поля показания частотомера необходимо умножать на коэффициент σ , что представляет неудобство и заметно уменьшает оперативность измерений.

Существует ряд способов, позволяющих производить отсчет резонансной частоты непосредственно в единицах поля. Так, в работе [1] предлагается переделка частотомера. Время счета периодов измеряемой частоты выбирается кратным величине σ . Можно также поставить на входе частотомера делитель с коэффициентом пересчета $\frac{1}{\sigma}$. Неудобство этого способа состоит в том, что делитель должен иметь высокое быстродействие (для поля $B_0 = 1$ Т, $f_0 = 42,6$ МГц). Существует, однако, способ не требующий переделки частотомера и пересчетных схем высокого быстродействия. Состоит он в следующем: на вход А цифрового частотомера подается измеряемая резонансная частота, а на вход Б — деленная на коэффициент пересчета $K = 234874$ частота 10 МГц с выхода того же частотомера. Переключатель «Род работы» устанавливается в положение «Измерение отношения частот», при этом частотомер будет показывать значение измеряемого магнитного поля с точностью до положения десятичной запятой. Действительно: $f_A/f_B = 2,34874 \cdot 10^{-2} f_0 = B_0$.

В некоторых частотомерах (например, ЧЗ-33) запятую можно установить на нужное место с помощью переключателя «Время измерения» (рис. 1). Естественно, при использовании датчиков с другим рабочим веществом делитель должен иметь другой коэффициент деления.

Реализовать цифровой делитель с $K = 234874$ сложно, так как этот коэффициент представляет собой произведение простых чисел 2 и 117437. Гораздо проще сделать делитель с $K = 234876$, который является произведением простых чисел $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 37$. Ошибка по сравнению с истинным коэффициентом составляет $8,5 \cdot 10^{-6}$, что вполне приемлемо. От делителя требуется быстродействие 10 МГц. Такой делитель можно собрать на широко распространенных интегральных микросхемах серии 155 или 133.

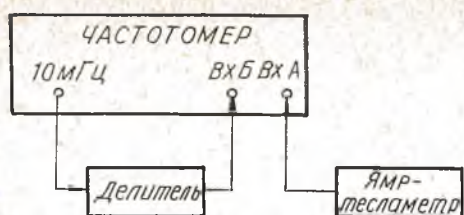


Рис. 1. Блок-схема измерения

Схема делителя показана на рис. 2. Источковый повторитель на транзисторе Т1 служит для согласования выхода частотомера с уровнями сигналов ТТЛ-схем. Элементы М1-1 и М1-2 являются формирователями импульсов. В качестве делителя на 12 используется элемент М2.

Делитель на 37 выполнен на элементах М3—М6 по схеме безвентильного счетчика [2] по принципу $37 = 2 \cdot 6 \cdot 3 + 1$. Элементы М1-3 и М1-4 служат для увеличения числа входов элемента М6. Делители с коэффициентом пересчета 23 собраны на элементах М7—М13 по принципу $23 = 2 \cdot 2 \cdot 6 + 1$.

Состояние счетчика 1011 дешифруется элементом М13-1 (М13-2), выход которого подключен ко входам К первых двух разрядов делителя. По следующему счетному импульсу происходит синхронная установка этих разрядов в единичное состояние и счетчик переходит в состояние 1111, минуя состояние 0111.

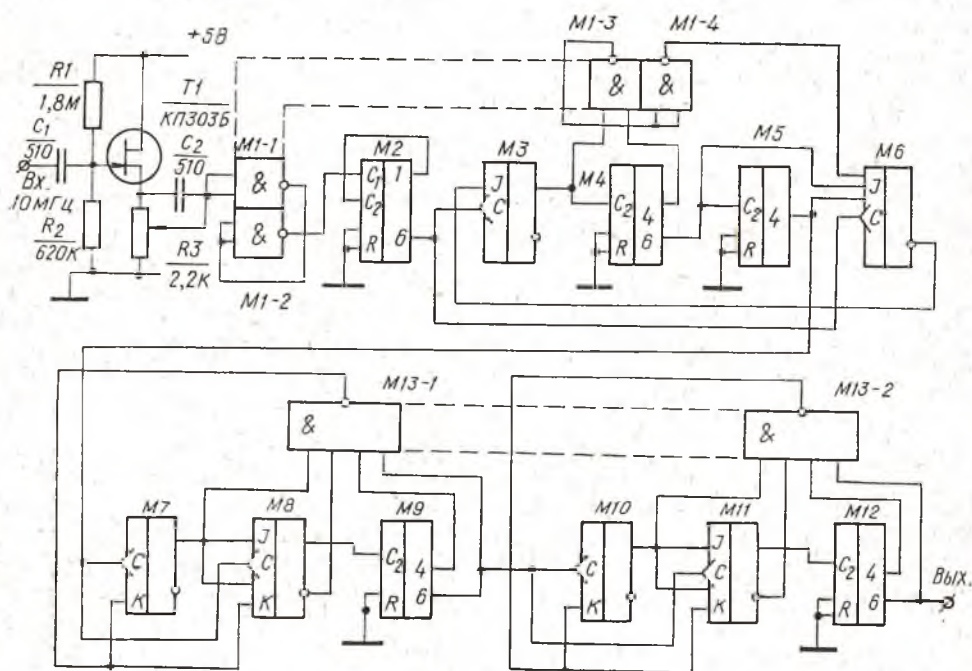


Рис. 2. Принципиальная схема приставки-делителя:

М1—К1ЛБ553; М3, М6—М8, М10, М11—К1ТК551; М2, М4, М5, М9, М12—К155ИЕ4, М13—К1ЛБ551

Делитель с $K=234876$ собран в виде отдельной приставки, питается от нестабилизированного источника напряжением 5 В и потребляет ток 250 мА. На выходе делителя имеются импульсы с периодом 0,0234876 с. В сочетании с кварцевым генератором на 10 МГц такой делитель может быть использован для создания простого специализированного частотомера-измерителя магнитной индукции, работающего по принципу, описанному в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Муха Г. М.— Приборы для научных исследований, 1965, № 4, с. 143.
2. Букреев И. Н., Мансуров Б. М., Горячев В. И. Микроэлектронные схемы цифровых устройств.— М., 1975.

Поступила в редакцию
23.01.80

Кафедра ядерной физики
и мирного использования атомной энергии

УДК 621.382.2.029.64

Ю. М. КАЛИНИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ АКТИВАЦИИ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В СПЛАВНЫХ GaAs И Ge ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДАХ

В работе [1] установлено, что изменение температуры выдержки сплавных GaAs и Ge туннельных диодов ТД приводит к обратным изменениям (релаксации пикового тока ПТ), и высказано предположение о том, что такая термическая нестабильность ПТ связана с протеканием реакции



лимитирующей стадией которой является диффузия одного из компонентов.

Исследование температурной зависимости процессов релаксации могло бы помочь идентифицировать подвижный компонент реакции (1).

С этой целью в данной работе изучалась кинетика релаксации ПТ $I_j^i(t)$ GaAs и Ge ТД (i — температура, при которой выдерживался диод до проведения измерений; j — температура, при которой проводились измерения, °C). Методика измерения ПТ описана в [1]. Погрешность измерений ПТ не превышала 0,03 %, а стабильность температуры была не хуже 0,1 °C.

Анализ кинетики релаксации спада ($i < j$) и нарастания ($i > j$) ПТ показал, что при малых временах

$$\Delta I_j^i(t) = K \sqrt{t}, \quad (2)$$

где $\Delta I_j^i(t)$ — изменение ПТ в процессе релаксации; K — некоторая постоянная при фиксированных температуре измерений и величине релаксационных изменений ПТ.

Для определения зависимости K от величины релаксационных изменений ПТ варьировалась температура предварительной выдержки; температура измерений была фиксирована; начальное значение находили экстраполяцией зависимости (2) к нулю. Типичные результаты представлены на рис. 1. Как видно, можем записать

$$K = D \ln \frac{I_j^i(\infty)}{I_j^i(0)} \left(\ln \frac{I_j^i(\infty)}{I_j^i(0)} + F \right), \quad (3)$$

где D и F — некоторые постоянные при фиксированной температуре измерений.

Используя (3) для анализа процесса кинетик релаксации ПТ, устанавливаем, что F не зависит от температуры. Температурная зависимость D изображена на рис. 2. Величина наклонов температурных зависимостей D для Ge и GaAs ТД: $0,17 \pm 0,015$ и $0,26 \pm 0,014$ эВ соответственно. Оценки получены методом линейной регрессии при повторных наблюдениях [2].

В [1] показано, что величина $\ln I_j^i(\infty)/I_j^i(0)$ пропорциональна изменению концентрации носителей в процессе релаксации, поэтому полученные результаты (см. рис. 1) свидетельствуют о протекании бимолекулярной реакции. В GaAs ТД концентрации реагирующих дефектов (примесей) равны, в Ge — существенно различаются.

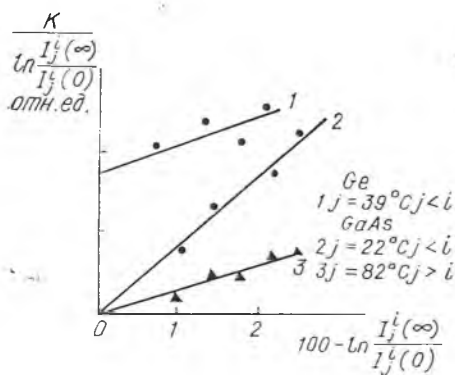


Рис. 1. Зависимость K от величины релаксационных изменений пикового тока

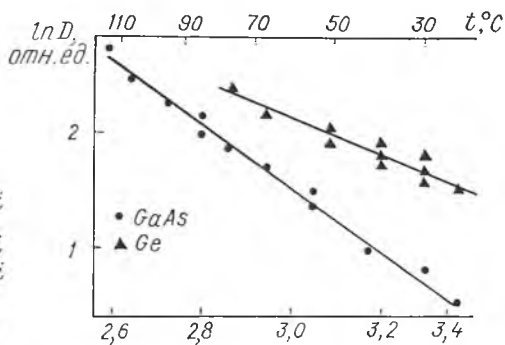


Рис. 2. Температурная зависимость параметра D

Из величин наклонов температурных зависимостей D находим, что энергия активации диффузии E_A в GaAs и Ge ТД: $0,34 \pm 0,03$ и $0,52 \pm 0,028$ эВ соответственно. Эти значения совпадают с энергией активации меди (в GaAs $E_A = 0,53 \pm 0,05$ эВ; в Ge $E_A = 0,33$ эВ [3]). Поскольку медь является одной из «основных» неконтролируемых примесей в GaAs [4] и растворимость ее значительно повышается с ростом уровня легирования полупроводниковых материалов [3], весьма вероятно, что термическая нестабильность ПТ сплавных GaAs и Ge ТД вызвана химической активностью остаточной меди.

Похожее перераспределение примеси наблюдалось в работе [5], где введение лития в p -область ТД приводило к появлению обратимых изменений вольтамперной характеристики в процессе работы прибора.

Автор выражает благодарность В. М. Ломако за интерес к работе и полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин Ю. М., Ломако В. М.— Электронная техника. Сер. 2, полупроводниковые приборы, 1979, т. 132, № 6, с. 37.
2. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами.— М., 1973.
3. Hall R. N., Racette J. N.— J. Appl. Phys., 1964, v. 35, № 2.
4. Освенский В. Б., Югова Т. Г. Особенности поведения меди в арсениде галлия.— М., 1970.
5. Epstein A. S., Coldwell J. F.— J. Appl. Phys., 1964, v. 35, p. 3050.

Поступила в редакцию
03.06.80

НИИ ПФП

УДК 621.317.08

А. Д. ГУЛЯЕВ, В. И. ЕМЕЛЬЯНЕНКОВ, В. В. ИЗОХ

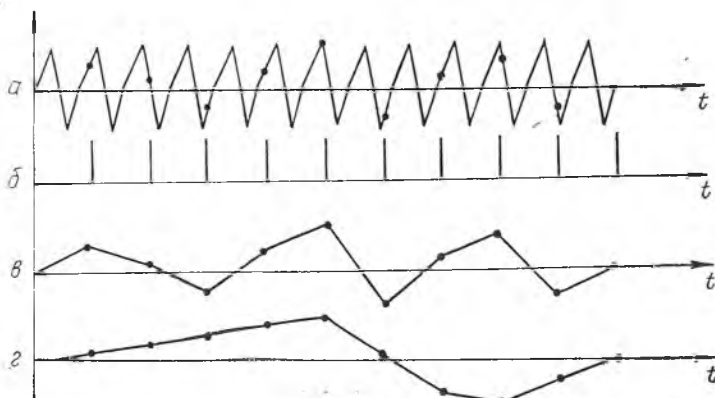
К ВОПРОСУ О СТРОБОСКОПИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

Стробоскопическое преобразование — один из наиболее распространенных методов исследования формы сигналов, сущность которого заключается в измерении мгновенных значений повторяющихся сигналов (взяты выборки) посредством стробирования короткими импульсами (стробимпульсов), автоматически сдвигающимися относительно исследуемого сигнала [1]. Необходимый порядок следования выборок обеспечивается жесткой синхронизацией стробимпульсов исследуемым сигналом.

В связи с недостаточной изученностью вопроса стробирования сигнала

лов несинхронизированными импульсами, возможности стробоскопического преобразования используются неполно. Целью предлагаемой работы является анализ закономерности расположения выборок при несинхронном стробировании периодического сигнала.

Для решения поставленной задачи рассмотрим отрезок времени, ограниченный теми импульсами стробирующей последовательности, которые берут выборки одинаковых точек исследуемого сигнала. Для удобства, не нарушая общности, можно принять, что стробимпульсы, ограничивающие выбранный отрезок, совпадают с теми точками сигнала, в которых он меняет знак с отрицательного на положительный (см. рисунок а, б). Назовем эти точки начальными.



Временная диаграмма

Как видно из рисунка, все стробимпульсы внутри рассматриваемого отрезка берут выборки из различных участков исследуемого сигнала через интервалы T_2 . Если воспроизвести непосредственно по таким выборкам сигнал (см. рисунок, в), его форма не будет отображать форму исходного сигнала.

Составив уравнение, описывающее координаты t_1 начальных точек в виде

$$t_1 = N_1 T_1, \tag{1}$$

где $N_1 = 0, 1, 2, \dots$ — номер точки; T_1 — период следования начальных точек исследуемого сигнала, и уравнение, описывающее координаты t_2 импульсов стробирующей последовательности, в виде

$$t_2 = N_2 T_2, \tag{2}$$

где $N_2 = 0, 1, 2, \dots$ — номер импульса; T_2 — период следования стробимпульсов, можно получить соотношение, описывающее координаты $t_p = t_1 = t_2$ совпадения начальных точек исследуемого сигнала со стробимпульсами. Для этого, подставляя значения N_1 и N_2 из уравнений (1), (2) в характеристическое уравнение [2]

$$p = N_1 - k N_2, \tag{3}$$

где $K = 1, \dots$ — параметр, удовлетворяющий условию $|T_1 - k T_2| \leq \frac{T_2}{2}$, и разрешая его относительно t_p , получаем искомое соотношение. Запишем его в виде $t_p = \frac{p T_1 T_2}{T_1 - k T_2}$. Обозначив $\delta T = \frac{T_1 - k T_2}{p}$, определим общее количество N_2^p периодов T_2 между совпадениями в виде равенства

$$N_2^p = \frac{t_p}{T_2} = \frac{T_1}{\delta T}, \tag{4}$$

и общее количество N_1^p периодов T_1 между теми же совпадениями в виде

$$N_1^p = \frac{t_p}{T_1} = \frac{T_2}{\delta T}. \tag{5}$$

Расстояние Δt до любой выборки от начала сигнала определяется как разность координат $t_2 - t_1$, соответствующих стробимпульсов и начальных точек сигнала при условии

$$\Delta t = N_2 T_2 - N_1 T_1 \leq T_1. \quad (6)$$

Если теперь на основании (4) — (6) каждому стробимпульсу присвоить номер i_{N_2} в соответствии с соотношением

$$i_{N_2} = \frac{\Delta T}{\delta T} = N_2 N_1^p - N_1 N_2^p \leq N_2^p,$$

а затем расставить их в соответствии с полученными номерами, то они будут представлять выборки участков исследуемого сигнала, следующих через интервалы δT , а не через интервалы T_2 , и позволят значительно точнее воспроизвести его форму (см. рисунок, z).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябинин Ю. А. Стробоскопическое осциллографирование. — М., 1972.
2. Преснухин Л. Н. и др. Муаровые растровые датчики положения и их применение. — М., 1969.

Поступила в редакцию
03.01.81

Кафедра радиофизики
и электроники СВЧ

УДК 517—920

М. Б. МЕЩЕРСКАЯ

О ЗАВИСИМОСТИ МНОЖЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОТ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ КРИВОЙ

Множество K в R^2 назовем линией, если существует представление $K = U(x(t), y(t))$, где $t \in I$; $I =]a, b[$; интервал на R ; $x(t), y(t)$ — непрерывно-дифференцируемые функции и $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0 \forall t$. Дуга — часть линии на промежутке $[\alpha, \beta]$, где $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, причем различным значениям t из $[\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки дуги. Если промежуток $[\alpha, \beta] =]\alpha, \beta]$ замкнут, то дугу назовем замкнутой. В случае, если $[\alpha, \beta] =]\alpha, \beta]$, то дуга полуоткрыта. Иногда замкнутую дугу называют «дугой с концами».

Лемма. Пусть $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$, где 1) B_0 — полуоткрытая дуга; 2) B_i — замкнутая дуга с концами M_{i-1}, M_i ; 3) $B_i \cap B_{i+1} = M_i$; 4) в каждой точке M_i выполняется условие сопряжения, т. е. $\frac{y_i}{x_j}(\beta_j) = \frac{y_{j+1}}{x_{j+1}}(\alpha_{j+1}) \dot{j} \geq 0$; тогда K — линия.

Доказательство леммы опустим.

Положим $M_t = (x(t), y(t)) \in K$; $\kappa(M_t) = y'(t) : x'(t) \in R_{\infty}$; $\kappa(M_t)$ — угловой коэффициент касательной существует в любой точке K .

Возьмем $M = (x, y) \in K$. Обозначим I_M совокупность всех $t \in I$, таких, что $M_t = M$, и положим

$$\kappa(M) = \{\kappa(M_t) | t \in I_M\}.$$

Тройку $(x(t), y(t), \kappa(t))$ назовем линейным элементом K в точке M_t данной параметризации [1].

Обозначим $l(K)$ совокупность линейных элементов у K при данной параметризации. Если K является дугой, то $l(K)$, очевидно, не зависит от параметризации.

Покажем, что существуют линии, для которых $l(K)$ зависит от параметризации.

Рассмотрим множество K , составленное из дуг (см. рисунок). На основании леммы множество K является линией.

Первая параметризация. Кривая начинается в точке A , затем идет так, как показано стрелками на рисунке. Каждый раз, когда мы вновь

приходим в точку A , происходит смещение по оси x на какое-то расстояние $k_1 \dots k_i$, при этом меняются и r_i, r'_i, l_i . Причем

$$(k_i) \uparrow 0 \quad k_i = -\frac{1}{2^i}$$

$$(l_i) \downarrow \frac{1}{4} \quad l_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{i+2}} \quad i \geq 2$$

Запишем уравнение кривой в параметрическом виде, только на участке нас интересующем.

Первый шаг:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = r'_0 \operatorname{tg} \theta \end{cases} \quad \operatorname{arctg} \frac{2R}{r'_0} \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = r_0 \operatorname{tg} \theta_1 \end{cases} \quad \operatorname{arctg} \frac{2R}{r'_0} \leq \theta_1 \leq 2\pi$$

i -й шаг:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = r'_i \operatorname{tg} \theta - l_i \end{cases} \quad \operatorname{arctg} \frac{2R - l_i}{r'_i} \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = r_i \operatorname{tg} \theta_1 - l_i \end{cases} \quad \operatorname{arctg} \frac{2R - l_i}{r'_i} \leq \theta_1 \leq 2\pi$$

В этом случае $\kappa(\theta) \equiv 0$.

Вторая параметризация

0-ой шаг:

$$\begin{cases} x = R \operatorname{tg} t - R \\ y = 0 \end{cases} \quad \frac{7}{4} \pi \leq t \leq \operatorname{arctg} 2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2R - R \operatorname{tg} t_1 \end{cases} \quad \frac{7}{4} \pi \leq t_1 \leq \operatorname{arctg} 2$$

j -ый шаг ($j \geq 1$) этой параметризации совпадает полностью с первой параметризацией, т. е. $j=1$ совпадает с первым шагом первой параметризации, а $j+1$ с i -ым.

В этом случае $\kappa(\theta) \equiv 0$.

Таким образом, при первой параметризации построенной кривой множество линейных элементов этой кривой не содержит тройки $(0, 0, 0)$, входящей в указанное множество при второй параметризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям.— Минск, 1977.

Поступила в редакцию
24.01.80

Кафедра дифференциальных
уравнений

УДК 518.32:33

В. В. БОБКОВ

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ С УЛУЧШЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ УСТОЙЧИВОСТИ

На примере задачи Коши для уравнения

$$\dot{u} = f(u, t) \quad (1)$$

рассмотрим вопрос о построении с использованием принципа последовательного повышения порядка точности [1] явных численных методов высоких порядков точности с расширенной областью устойчивости.

Как известно [2], среди линейных методов численного решения уравнений вида (1) не существует A -устойчивых [2] методов порядка точно-

сти выше второго. Отказ от линейности конструкции методов позволяет в некоторых случаях совмещать требования устойчивости и высокого порядка точности. В качестве примера таких методов рассмотрим новые явные нелинейные методы третьего порядка точности вида

$$\begin{aligned} y_{j+\frac{1}{3}} &= y_j + \frac{1}{3} \tau R_1 f_j, \\ y_{j+\frac{2}{3}} &= y_j + \frac{2}{3} \tau R_2 f_{j+\frac{1}{3}}, \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{4} \tau R_3 (f_j + 3f_{j+\frac{2}{3}}), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} y_{j+\alpha} &\approx u(t_j + \alpha\tau), \quad \tau > 0, \quad f_{j+\alpha} = f(y_{j+\alpha}, t_j + \alpha\tau), \\ R_1 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z}, \quad R_2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}z\right)^2}{1 - \frac{2}{3}z + \frac{2}{9}z^2}, \\ R_3 &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2\right)\left(1 - \frac{2}{3}z + \frac{2}{9}z^2\right)}{\left(1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3\right)\left(1 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{18}z^2\right)} \end{aligned} \quad (3)$$

или

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{3 \left[\exp\left(\frac{1}{3}z\right) - 1 \right]}{z}, \quad R_2 = \frac{3 \left[\exp\left(\frac{2}{3}z\right) - 1 \right]}{2z \exp\left(\frac{1}{3}z\right)}, \\ R_3 &= \frac{4(\exp z - 1)}{z \left[3 \exp\left(\frac{2}{3}z\right) + 1 \right]}, \end{aligned} \quad (4)$$

при этом z может быть вычислено по-разному, например, $z = \tau f_u(y_j, t_j)$, $z = [f(y_j + \beta\tau f_j, t_j + \beta\tau) - f(y_j, t_j + \beta\tau)] / \beta f_j$, $\beta > 0$.

При $R_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, методы вида (2) построены ранее [1]. Введение регуляризирующих множителей R_1, R_2, R_3 вида (3) или (4) позволяет, не нарушая порядка точности метода (легко проверить, что $R_i = 1 + O(\tau^i)$, $i = 1, 2, 3$), повысить уровень согласованности в поведении решений дифференциального (1) и соответствующих разностных вида (2) уравнений. Действительно, применительно к модельному [2] уравнению

$$\dot{u} = \lambda u, \quad \lambda = \text{const}, \quad (5)$$

методы вида (2) с выбором $R_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, или по формулам (3), (4) приводят соответственно к соотношениям $y_{j+1} = S_k y_j$, $k = 1, 2, 3$, где $S_1 = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$, $S_2 = \left(1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3\right)^{-1}$, $S_3 = \exp z$, $z = \lambda\tau$.

Для точного же решения уравнения (5) при переходе от точки t_j в точку $t_{j+1} = t_j + \tau$ справедливо равенство $u(t_{j+1}) = S u(t_j)$, $S = \exp z$, при этом в устойчивом случае ($\lambda < 0$) $S_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ для любых $\tau > 0$ и $S \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Очевидно, что $S_1 = S + O(\tau^4)$, $S_2 = S + O(\tau^4)$, $S_3 = S$. Однако при $\tau \rightarrow \infty$ (в случае $\lambda < 0$) имеем $S_1 \rightarrow -\infty$, $S_2 \rightarrow 0$, кроме того, $S_2^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ для любых $\tau > 0$, а $S_1^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ с ростом j лишь для малых $\tau > 0$. Это обеспечивает более высокий уровень согласования по устойчивости с исходным дифференциальным уравнением (1) разностных уравнений вида (2) при выборе R_i , $i = 1, 2, 3$, по формулам (3) и тем более (4), чем в случае $R_i = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Аналогичную конструкцию имеют и регуляризованные методы высших порядков, построенные на основе [1].

Покоординатно подобные методы могут быть использованы и в случае систем уравнений вида (1), а также применены при построении нелинейных разностных схем для параболических уравнений с сохранением в ряде случаев свойства спектральной устойчивости [3] при любом соотношении между шагами сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков В. В.—Весті АН БССР. Сер. фіз.-матем. наук, 1967, № 4, с. 27.
2. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем.— М., 1979.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.

Поступила в редакцию
21.06.80

Кафедра вычислительной
математики

УДК 513

Л. Д. ДУХВАЛОВ

О НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАД АЛГЕБРОЙ КВАЗИМАТРИЦ

Б. А. Розенфельд [1] ввел в рассмотрение алгебру квазиматриц:

$$M_n^m = \left\{ V = \begin{pmatrix} A & \varepsilon B \\ \varepsilon C & D \end{pmatrix} \right\},$$

где A и D — квадратные вещественные матрицы порядков m и $n-m$ соответственно; B и C — прямоугольные вещественные матрицы; ε — дуальная единица. В этой же работе рассмотрена группа Ли $G(M_n^m)$ указанной алгебры и ее важнейшие подгруппы: ортогональных квазиматриц $O(M_n^m)$, псевдоортогональных квазиматриц ${}^{kl}O(M_n^m)$ и, если $n = 2m$, симплектических квазиматриц $S_p(M_n^m)$.

Пусть

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{a} & A & \varepsilon B \\ \varepsilon \bar{b} & \varepsilon C & D \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

подгруппа $G(M_n^m)$, где $V \in O(M_{n-1}^{m-1})$. M_n^m есть G — пространство, относительно φ :

$$\Delta \times M_n^m \rightarrow M_n^m: (g, U \rightarrow g U g^{-1}). \quad (2)$$

Изучим его однородные симметрические пространства, применяя определение, предложенное в работе [2]: однородное G -пространство над алгеброй M_n^m будем называть симметрическим, если порождающий его элемент $\kappa \in M_n^m$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \det(\kappa) \neq 0 \\ \kappa G \kappa^{-1} \subset G \\ \kappa^2 g = g \kappa^2 \forall g \in G. \end{cases} \quad (3)$$

Производя соответствующие вычисления и учитывая $G = \Delta$, получим, с точностью до подобия:

$$\kappa = \begin{pmatrix} E_{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{p_2} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где E_i — единичная матрица порядка i , $k_1 + p_1 = m$.

Однородное симметрическое пространство, соответствующее набору чисел k_1, k_2 в выражении (4), будем обозначать $X_{k_1 k_2 \kappa}$. Такое пространство можно определить с точностью до изоморфизма, порожденного отображением $\kappa \rightarrow \kappa_0 = \frac{1}{2}(E_n + \kappa)$.

Пространство $X_{10\kappa_0}$ назовем квазиэллиптическим пространством и обозначим S_{n-1}^{m-1} . Тогда, по определению,

$$S_{n-1}^{m-1} = \left\{ H = g \kappa_0 g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{x} & 0 & 0 \\ \varepsilon \bar{y} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall g \in \Delta \right\}.$$

Будем говорить, что $\bar{x}$ задает координаты первого рода, а $\bar{y}$ координаты второго рода точки H . Это пространство изучалось Б. А. Розенфельдом и его учениками [3—5].

Отображение φ индуцирует в S_{n-1}^{m-1} структуру G — пространства, т. е. определено φ' :

$$\Delta \times S_{n-1}^{m-1} \rightarrow S_{n-1}^{m-1}: (g, H) \rightarrow H' = g H g^{-1}, \quad (5)$$

если $H \in S_{n-1}^{m-1}$ определено координатными столбцами $\bar{x}, \bar{y}$; а $H' = \bar{x}', \bar{y}'$, то из соотношения (5) получим

$$\begin{cases} \bar{x}' = A \bar{x} + \bar{a} \\ \bar{y}' = C \bar{x} + D \bar{y} + \bar{b}, \end{cases} \quad (6)$$

где $A, C, D, \bar{a}, \bar{b}$ определяются заданием $g \in \Delta$.

Любой полиномиальный морфизм $p: (S_{n-1}^{m-1}) \rightarrow M_n^m$ первой степени, т. е. $p(H_1, H_2) = H_1 + \lambda H_2$; если $\lambda = -1$, то образом этого морфизма служит векторное квазиэллиптическое пространство:

$$\bar{S}_{n-1}^{m-1} = \left\{ \bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{x} & 0 & 0 \\ \varepsilon \bar{y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (7)$$

а если $\lambda \neq -1$, то образ морфизма есть точка, делящая $[H_1, H_2]$ в отношении λ .

Рассмотрим ${}^T \bar{S}_{n-1}^{m-1} = \{ \bar{H}^T | \bar{H} \in \bar{S}_{n-1}^{m-1} \}$ (T — знак транспонирования). Указанное множество есть $\Delta^T = \{ g^T | g \in \Delta \}$ — пространство относительно ψ :

$$(g^T, \bar{H}^T) \rightarrow (g^T)^{-1} \bar{H}^T g^T. \quad (8)$$

Рассмотрим полиномиальные морфизмы $p: \bar{S}_{n-1}^{m-1} \times {}^T \bar{S}_{n-1}^{m-1} \rightarrow M_n^m$. Все они не выше второй степени. Важнейшими из них будут:

$$1) p_0: (\bar{H}_1, \bar{H}_2^T) \rightarrow \bar{H}_2^T \bar{H}_1 = (\bar{x}_2^T \bar{x}_1) \cdot \kappa_0,$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ координаты первого рода $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$. Числовой инвариант $\bar{x}_2^T \bar{x}_1$ называется скалярным произведением первого рода

$$(\bar{H}_1 \bar{H}_2)_1 \quad (9)$$

$$2) p_1: (\bar{H}_1 \bar{H}_2^T) \rightarrow \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2^T,$$

$$\bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & \varepsilon B \\ 0 & \varepsilon C & D \end{pmatrix},$$

где $B \cdot C = (\bar{y}_1^T \bar{y}_2) A$; $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ — координаты второго рода $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$. Инвариант $\bar{y}_1^T \bar{y}_2$ назовем скалярным произведением второго рода

$$(\bar{H}_1, \bar{H}_2)_2. \quad (10)$$

Рассмотрим сейчас все другие наборы k_1, k_2 и построим для них сим-

метрические однородные пространства $X_{k_1 k_2}$, исходя из начального элемента x_0 , определенного в (4). Получим:

$$X_{k_1, k_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{x} & P_1 & \varepsilon V^T \\ \varepsilon \bar{y} & \varepsilon V & P_2 \end{pmatrix} \right\},$$

где

$$\begin{cases} P_1 = A E_{k_1}^0 A^T, \\ P_2 = D E_{k_2}^0 D^T, \\ V = (C A^T) P_1 - P_2 (C A^T), \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x} = \bar{a} - P_1 \bar{a}, \\ \bar{y} = (\bar{b} - P_2 \bar{b}) - V \bar{a}. \end{cases} \quad (11)$$

E_i^0 матрица с i единицами по диагонали и остальными нулями есть G — пространство, и под действием преобразования g матричная координата V , проектирующие операторы P_1, P_2 и координаты начальной точки $\bar{x}, \bar{y}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases} P'_1 = A P_1 A^T, & \bar{x}' = A \bar{x} - (P'_1 \bar{a} - \bar{a}), \\ P'_2 = D P_2 D^T, & \bar{y}' = D \bar{y} + C \bar{x} - V \bar{a} - \\ V' = D V A^T + C P_1 A^T + D P_2 B^T, & - (P'_2 \bar{b} - \bar{b}). \end{cases} \quad (12)$$

Формулы (12) обобщают формулы Б. А. Розенфельда [4], рассмотренные для частного случая $P_1 = E_{m-1}, P_2 = 0$.

Рассматривая морфизмы, заданные на $X_{k_1 k_2}$, называемом пространством (k_1, k_2) -плоскостей, легко классифицировать эти плоскости, указать их уравнения и направляющие пространства, а также найти все основные инварианты, пользуясь инвариантами (9), (10).

Заменив в определении группы Δ группу $O(M_{n-1}^{m-1})$ на ${}^{kl}O(M_{n-1}^{m-1})$, либо на $Sp(M_{n-1}^{m-1})$, можно получить соответствующую теорию квазигиперболических и квазисимплектических пространств и их пространств плоскостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. и др. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1969, т. 4, с. 62.
2. Ведерников С. В. — Проблемы геометрии, 1975, т. 7, с. 49.
3. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М., 1969.
4. Розенфельд Б. А. — Труды Московского матем. об-ва, 1959, т. 8, с. 49.
5. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М., 1966.

Поступила в редакцию
21.06.80

Кафедра геометрии

УДК 519.852.6

ФАМ ТХЕ ЛОНГ

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО СРАВНЕНИЮ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В заметке приводятся результаты численных экспериментов по сравнению двух методов решения общей задачи ЛП в канонической форме [1]:

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, d_* \leq x \leq d^*, \quad (1)$$

где c, x, d_*, d^* — n -векторы; A — $m \times n$ -матрица; $m < n$.

Для решения задачи (1) в [2] предложен прямой опорный метод с адаптивной нормировкой (метод 1), результаты экспериментального сравнения которого с другими методами приведены в [4]. Цель нашего эксперимента — сравнение эффективности метода 1 и двухшагового прямого опорного метода [3] (метод 2).

Было сформировано 9 серий задач (1), по 5 задач в каждой. Пара-

метры задачи (1) генерировались датчиком случайных чисел, расположенных в интервале $[-100, 100]$. Датчик реализован в виде следующей FORTRAN-подпрограммы:

```
SUBROUTINE GER(Y, Z)
  L=Y*Z
  Y=Y*Z-L
  Y=100*SIN(3.1416*Y+0,5)
  Z=Z+0.4141
  RETURN
END
```

Этот датчик генерирует последовательность чисел y , которая используется для заполнения вектора s и матрицы A . Затем этим же датчиком генерировались тройки чисел, меньшее из которых принималось за d_{*j} , среднее — за x_j (компонента начального плана), большее — за d_j^* . Начальные опорные индексы задавались числами $\{1, 2, \dots, M\}$. Каждая генерированная задача решалась вначале методом 1, затем методом 2. Критерием сравнения служили число итераций и время решения задачи (1). Выбор этого критерия определяется тем, что сравнение по числу итераций важно с точки зрения накопления ошибок округлений, вызываемых преобразованием опор. Из [3] ясно, что число итераций метода 2 меньше числа итераций метода 1, по крайней мере, вдвое, однако каждая итерация в методе 2 сложнее, чем в методе 1, и поэтому методы сравнивались также по времени вычисления.

Номер серии	Размер задач	Среднее число итераций		Среднее время счета	
		Метод 1	Метод 2	Метод 1	Метод 2
1	10×30	23.80	6.80	7.94	4.04
2	10×40	33.80	11.00	14.716	8.184
3	10×50	39.40	11.80	20.828	11.244
4	15×40	18.20	8.50	9.144	6.5
5	15×40	30.00	11.60	19.916	11.668
6	15×50	47.60	20.00	37.68	23.84
7	20×30	14.80	6.00	10.912	6.964
8	20×40	27.60	11.60	25.072	15.852
9	20×50	46.40	17.40	50.164	28.82

Методы 1 и 2 реализованы в виде подпрограммы *SUBROUTINE* на языке *FORTRAN-4*. Как следует из результатов эксперимента (см. таблицу), среднее число итераций в методе 1 больше, чем в методе 2, в 2—3,5 раза, а среднее время — в 1,5—1,8 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования, ч. 1.— Минск, 1977.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. К методам решения общей задачи линейного программирования.— Препринт Ин-та математики АН БССР, 1977, № 14, 30.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.— Докл. АН БССР, 1980, № 10.
4. Глушенков В. С., Гневко С. В., Костюкова О. И.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2, с. 32.

Поступила в редакцию
30.10.80

Кафедра МОУ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Пусть задана n -мерная система

$$x' = (Au(t) + Bv(t))x, \quad (1)$$

где A и B — постоянные квадратные матрицы; $u(t)$ и $v(t)$ — скалярные функции, определенные на R , принимающие значения $-1, 0, 1$ и такие, что $u^2(t) + v^2(t) = 1$ для всех $t \in R$.

Обозначим $R_n = R/0$. Возьмем произвольные x_0 и x^* , принадлежащие R^n , и поставим следующую задачу.

Найти t^* , $u(t)$, $v(t)$, определенные на $[0, t^*]$ такие, что решение $x(t)$ системы (1) удовлетворяет условиям $x(0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

Очевидно, что такая задача не всегда разрешима. Как следует из [1], если матрицы A и B перестановочны, эта задача разрешима лишь в том случае, когда $x^* \in \{x: x = e^{At_1 + Bt_2}x_0, t_1 \in R, t_2 \in R\}$.

В настоящей заметке показано, как найти t^* , $u(t)$ и $v(t)$, когда матрицы A и B имеют определенный вид.

$$1. \text{ Пусть } A = \left\{ \left\| \begin{array}{cc} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{array} \right\|, \dots, \left\| \begin{array}{cc} \mu_k & \nu_k \\ -\nu_k & \mu_k \end{array} \right\| \right\},$$

$$B = \left\{ \lambda_1 \left\| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{array} \right\|, \dots, \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \\ -\beta_{k-1} & \alpha_{k-1} \end{array} \right\|, \lambda_2 \right\}. \text{ Числа } \lambda_1, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \nu_1, \dots, \nu_k \text{ отличны от нуля.}$$

Пусть $x_0 = \{x_{10}, \dots, x_{n0}\}^T$

$$x^* = \{x_{10}^*, \dots, x_{n0}^*\}^T.$$

Выберем t_1 таким, чтобы $-x_{n-10} \sin \nu_k t_1 + x_{n0} \cos \nu_k t_1 = 0$, тогда $e^{At_1}x_0 = x_1 = \{x_{10}^{(1)}, \dots, x_{n-10}^{(1)}, 0\}^T$. Положим $u(t) = 1$ на $[0, t_1]$. Пусть t_2' такое,

что $-x_{n-20}^{(1)} \sin \beta_{k-1} t_2' + x_{n-10}^{(1)} \cos \beta_{k-1} t_2' = 0$, тогда $e^{Bt_2'}x_1 = \{x_{10}^{(2)}, \dots, x_{n-20}^{(2)}, 0, 0\}^T$. Положим $v(t) = 1$ на $[t_1, t_2]$, где $t_2 = t_2' + t_1$.

Продолжая этот процесс, через $n-1$ шагов построим функции $u(t)$ и $v(t)$ на $[0, t_{n-1}]$ такие, что решение системы (1) в точке $t = t_{n-1}$ примет значение $x(t_{n-1}) = \{x_{10}^{(n-1)}, 0, \dots, 0\}$.

Возьмем точку x^* и построим функции $u_1(t)$ и $v(t)$ на $[0, t_{n-1}^*]$ такие, что решение $x^*(t)$ ($x^*(0) = x^*$) системы (1) в точке $t = t_{n-1}^*$ примет значение $x^*(t_{n-1}^*) = \{y_{10}^{(n-1)}, 0, \dots, 0\}$; при этом всегда можно построить t_{n-1}^* такое, что $x_{10}^{(n-1)} y_{10}^{(n-1)} > 0$.

Положим $v(t) = \operatorname{sgn} \lambda_1 (y_{10}^{(n-1)} - x_{10}^{(n-1)})$ на $[t_{n-1}, t_n]$, где $t_n - t_{n-1} = \frac{1}{|\lambda_1|} \ln |y_{10}^{(n-1)} - x_{10}^{(n-1)}|$ и $u(t) = -u_1(t^* - t)$, $v(t) = -v_1(t^* - t)$ на $[t_n, t^*]$, где $t^* = t_n + t_{n-1}^*$.

2. Аналогично строятся функции $u(t)$ и $v(t)$ для системы, где

$$A = \left\{ \left\| \begin{array}{cc} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{array} \right\|, \dots, \left\| \begin{array}{cc} \mu_k & \nu_k \\ -\nu_k & \mu_k \end{array} \right\| \right\}, B = \left\{ \left\| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{array} \right\|, \dots, \left\| \begin{array}{cc} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{array} \right\|, \lambda_2 \right\}.$$

З а м е ч а н и е. Нетрудно убедиться, что аналогично можно построить функции $u(t)$ и $v(t)$ в случае, когда у матриц A и B вместо блоков

$$\left\| \begin{array}{cc} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{array} \right\| \text{ стоят блоки } \left\| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right\|, \text{ где } (a-d)^2 + cb < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Белявский С. С. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1, с. 69.

Поступила в редакцию
14.05.81

Кафедра высшей математики
и математической физики

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ *

УДК 681.306

Г. И. Шпаковский, Б. А. Кап. Анализ некоторых систем коммутации параллельных ЭВМ с одиночным потоком команд. № 3513-80. Деп. от 07.08.80.

Приведены результаты машинного моделирования коммутационных систем для ЭВМ с одиночным потоком команд и множественным потоком данных. Анализировались различные варианты каскадных коммутационных систем и сред для пакетов связей различного размера со случайным распределением адресов связей внутри пакета. Приводятся аппроксимирующие формулы. Показано, что наибольшим быстродействием обладает ω -сеть с коммутацией сообщений.

УДК 534.1: 535.33: 541.49

В. Г. Попов, И. В. Липницкий, А. Б. Ковриков, Н. М. Ксенофонтова, Р. М. Оришева, Д. С. Умрейко. Колебательные спектры и структура смешанных галогенидгидроxoкомплексов четырехвалентной платины. № 3807-80. Деп. от 07.08.80.

Проведено экспериментальное и теоретическое исследование колебательных спектров комплексов $K_2PtCl_4(OH)_2$, $K_2PtBr_4(OH)_2$, $(NH_4)_2PtCl_2(OH)_4$ и их дейтероаналогов. Получены теоретические частоты нормальных колебаний анионов $[PtCl_3(OH)_3]^{2-}$ и $[PtCl_3(OD_3)]^{2-}$.

УДК 518: 517.91/94

А. И. Азаров, В. А. Басик, П. И. Монастырный. О численном решении асимптотической задачи Холта, возникающей в теории пограничного слоя. № 3808-80. Деп. от 21.08.80.

Дано численное решение асимптотической задачи Холта, описывающей движение сферических оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа или жидкости. Метод прямой пристрелки для этой задачи не проходит из-за весьма жестких условий, налагаемых на локализацию отсутствующих в начальный момент двух компонент искомого решения граничной задачи, что отмечалось еще автором этой задачи Д. Ф. Холтом. Неблагоприятные свойства метода прямой пристрелки можно существенно ослабить, комбинируя метод инвариантного погружения с методом множественной двусторонней пристрелки. Выполненные на этой основе численные эксперименты показали эффективность такой процедуры. В работе результаты поданы в виде таблиц и комментариев к ним.

УДК 621.375.82

М. И. Демчук, В. Н. Вишневский, В. П. Михайлов, К. В. Юмашев. Установка для исследования кинетики ультракоротких световых процессов. № 3809-80. Деп. от 21.08.80.

Описана установка для исследования кинетики пикосекундных световых процессов, построенная на базе ОКГ с пассивной синхронизацией мод и промышленного многоканального амплитудного анализатора (м. а. а.), работающего в режиме поканального заполнения с возможностью вывода информации на внешние устройства. Приведены принципиальные схемы согласования электронных стандартных узлов установки.

УДК 621.317

В. В. Данилевич, Е. В. Новиков, С. К. Товмасян, А. Ф. Чернявский, В. А. Чудовский. Двухшкальная система широкодиапазонного временного анализа. № 3809-80. Деп. от 21.08.80.

Рассматривается двухшкальная система широкодиапазонного временного анализа, позволяющая регистрировать распределения временных интервалов в диапазоне $5 \cdot 10^{-8}$ — 10^{-2} с с шагом квантования $(1/64) \cdot 10^{-8}$ с. Описаны общие принципы структурной организации системы, приведены принципиальные схемы ее основных узлов, методика и результаты исследований метрологических характеристик прибора.

УДК 621.375.826

И. А. Кобак, А. М. Лисенкова, И. С. Манак. Пороговые и энергетические характеристики ДГС-лазеров наносекундного диапазона. № 4191-80. Деп. от 24.09.80.

Исследованы пороговые, энергетические и тепловые характеристики ДГС-лазеров полосковой геометрии на основе тройных соединений в системе GaAlAs при возбуждении их импульсами тока длительностью $\tau_n = 2$ —100 нс и частотах повторения мегагерцевого диапазона.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

УДК 546.23+621.034

А. В. Шибеева, Г. И. Попко. Пленочные пьезоэлектрические преобразователи ультразвука на основе поликристаллического текстурированного селена. 1. Преобразователи объемных волн. № 4298-80. Деп. от 08.10.80.

Предложена методика изготовления и исследована эффективность селеновых пленочных преобразователей продольных ультразвуковых волн. Величина коэффициента электромеханической связи селеновых преобразователей достигает 0,21, что превышает соответствующие значения для пленочных преобразователей на основе сульфида кадмия и окиси цинка.

УДК 546.23+621.034

А. В. Шибеева, Г. И. Попко. Пленочные пьезоэлектрические преобразователи ультразвука на основе поликристаллического текстурированного селена. 2. Преобразователи поверхностных волн. № 4298-80. Деп. от 08.10.80.

Экспериментально показано, что текстурированные пленки селена могут быть использованы для генерации и приема упругих поверхностных волн в ультразвуковом диапазоне частот. Проведен анализ работы преобразователей.

УДК 518.5

В. В. Бобков, Л. М. Городецкий. Некоторые результаты экспериментального сравнения итерационных алгоритмов решения систем нелинейных алгебраических уравнений. № 1351-81. Деп. от 25.03.81.

На примере 10 тестовых задач проводится сравнение некоторых итерационных алгоритмов решения систем нелинейных уравнений и предлагаются рекомендации к их практическому применению.

УДК 517.977.52

Э. А. Салиев. Условия оптимальности для особых экстремалей. № 1350-81. Деп. от 25.03.81.

Доказаны необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в задаче управления с неразделенными краевыми условиями.

УДК 517.948.32

А. П. Шилин. Две краевые задачи типа задачи Римана с интегральными членами в краевом условии. № 1342-81. Деп. от 25.03.81.

Рассмотрены два случая краевой задачи типа задачи Римана с интегральными членами специального вида. В обоих случаях задача сведена к краевым задачам без интегральных членов: в первом — к трем задачам Римана, втором — к нескольким задачам со сдвигом; возникающие задачи исследуются в определенной последовательности. В первом случае дано решение в замкнутой форме, во втором выяснена картина разрешимости исходной задачи.

УДК 681.3.06

И. Л. Дорошкевич, В. Б. Таранчук, А. Ф. Чернявский. Архитектура программного обеспечения АСУ, ориентированного на использование мини-ЭВМ. № 1348-81. Деп. от 25.03.81.

Описаны архитектура и методика создания программного обеспечения АСУ, которая, основываясь на эффективном использовании системного математического обеспечения СМ ЭВМ, позволяет значительно снизить затраты на разработку, отладку и сопровождение необходимого комплекса программ.

УДК 517.968.23

А. П. Шилин. Сингулярное интегральное уравнение, сводящееся к задачам Карлемана для многосвязных областей. № 1341-81. Деп. от 25.03.81.

Рассмотрено одно полное сингулярное интегральное уравнение на конечном числе кривых Ляпунова. Уравнение сведено к краевым задачам Карлемана для многосвязных областей, исследуемых в определенной последовательности методом локально-конформного склеивания. Получена картина разрешимости уравнения.

УДК 518:517.91/94

В. А. Басик. О модификациях и особенностях реализации метода ортогональной прогонки решения разностных граничных задач для уравнений второго порядка. № 1340-81. Деп. от 25.03.81.

Излагается алгоритм решения разностных граничных задач, основанный на сочетании методов разностной и ортогональной прогонки. Алгоритм применим, если граничная задача имеет единственное решение, и устойчив к погрешностям округлений. Приводится пример, в котором сравниваются решения разностной граничной задачи, полученные по предлагаемому алгоритму, методами разностной и ортогональной прогонки.

УДК 621.372

В. В. Корнейчик, А. П. Хапалюк. Собственные типы колебаний нового класса двумерных резонаторов. № 1339-81. Деп. от 25.03.81.

Получены в замкнутой аналитической форме выражения для полей трех бесконечных однопараметрических серий E -поляризованных собственных типов колебаний идеальных двумерных резонаторов, по форме близких к квадратному. Эти поля представляются в виде суперпозиции полей, смещенных относительно друг друга квадратных резонаторов.

УДК 621.315.592

Л. А. Казакевич, П. Ф. Лугаков. Влияние дислокаций на образование и отжиг точечных и групповых радиационных дефектов в кремнии. № 1338-81. Деп. от 25.03.81.

Исследовано влияние дислокаций ($N_D = 1 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2}$) на процессы образования и отжига компенсирующих и рассеивающих радиационных дефектов (РД) в кремнии n и p -типа ($\rho = 20 - 1500 \text{ Ом} \cdot \text{см}$), облученном гамма-квантами ^{60}Co и протонами 640 МэВ. Показано, что с ростом плотности дислокаций скорость введения одних РД (A -, E -центры, междоузельный углерод) уменьшается, других (комплексы кислород — углерод — дивакансия) увеличивается, а третьих (дивакансии) не изменяется. Математически описано накопление некоторых точечных РД в дислокационном кремнии. Проанализированы особенности образования областей скопления дефектов в кремнии с повышенной плотностью дислокаций. Обсуждается природа дефектов, образующихся в результате перестроек при отжиге точечных и групповых РД.

УДК 517.988 : 519.853.4

А. Я. Кругер. Необходимые условия экстремума в задачах негладкой оптимизации. № 1333-81. Деп. от 25.03.81.

Работа посвящена выводу необходимых условий оптимальности в негладких и невыпуклых экстремальных задачах в банаховом пространстве. Условия формулируются в терминах обобщенных дифференциалов негладких функций и обобщенных нормальных конусов к невыпуклым множествам, которые строятся непосредственно по параметрам задачи без использования каких-либо локальных аппроксимаций множеств и функций.

Вводится общее понятие экстремальности, охватывающее различные понятия решения в экстремальных задачах, и устанавливаются необходимые условия экстремальности. В основе доказательства указанного результата лежит обобщенное уравнение Эйлера, представляющее собой некоторое обобщение теоремы отделимости на случай невыпуклых множеств. Полученные условия затем конкретизируются для задач математического программирования со скалярным, векторным и минимальным критериями. При этом получаются обобщения и усиления результатов Ф. Кларка (РЖМат, 1977, 6В572) и других авторов. Формулируются условия нормальности задач. Приводятся приложения к задачам оптимального управления с дискретным и непрерывным временем.

УДК 517.988

А. Я. Кругер. Обобщенные дифференциалы негладких функций. № 1332-81. Деп. от 25.03.81.

Изучаются новые конструкции обобщенных дифференциалов негладких функций на банаховом пространстве. Устанавливается их связь с понятием субдифференциала выпуклой функции, а также с обобщенным градиентом Ф. Дларка (РЖМат, 1976, 2В496) и производным множеством Дж. Варги (РЖМат, 1977, 7В666К). Получены соотношения для обобщенных дифференциалов суммы, максимума, суперпозиции негладких функций, а также обобщение теоремы о среднем значении. При доказательстве указанных результатов используется обобщенное уравнение Эйлера (теоремы 2.1 и 2.2), которое можно рассматривать как некоторое обобщение теоремы отделимости на случай невыпуклых множеств. Результаты данной работы применяются при выводе необходимых условий экстремума в негладких и невыпуклых задачах оптимизации.

УДК 517.988

А. Я. Кругер. ϵ -полудифференциалы и ϵ -нормальные элементы. № 1331-81. Деп. от 25.03.81.

Работа посвящена развитию и исследованию введенных (РЖМат, 1977, 12В981) понятий субдифференциала (полудифференциала) невыпуклой функции и нормального конуса к невыпуклому множеству, представляющих собой обобщения соответствующих понятий классического и выпуклого анализа.

Вводятся нижние и верхние ϵ -полудифференциалы. Устанавливаются формулы исчисления ϵ -полудифференциалов, а также их связь с соответствующими локальными характеристиками множеств (множествами ϵ -нормальных элементов). Приводятся некоторые условия экстремума, применимые для вывода необходимых условий оптимальности в задачах вариационного исчисления и оптимального управления.

Работа содержит материал, необходимый для построения в последующих статьях теории обобщенных дифференциалов и соответствующих необходимых условий экстремума в задачах негладкой оптимизации.

УДК 535.31 : 621.384

И. Д. Бондаренко. Применение уголкового отражателя для измерения угла скручивания. № 361-81. Деп. от 28.01.81.

Теоретически получено общее условие применимости уголкового отражателя с отклонениями двугранных углов между отражающими гранями от прямого угла, в автоколлимационных устройствах для измерения угла скручивания. Показана возможность обеспечения независимости угловых координат световых пучков, отраженных уголковым отражателем, от углов коллимации путем выбора исходной ориентации отражателя относительно направления падающих лучей.

УДК 621.317.714

П. Ю. Гаврилюк, М. В. Комар. Измеритель токов. № 360-81. Деп. от 28.01.81.

Описаны особенности построения измерителя слабых постоянных и импульсных токов в диапазоне $3 \cdot 10^{-9} - 10^{-6}$ А. С целью уменьшения напряжения дрейфа нуля измерительного усилителя используется параллельный канал стабилизации, представляющий собой усилитель постоянного тока типа М-Д-М.

УДК 518.61

В. В. Бобков, В. Н. Шалима. О некоторых методах численного решения систем квазилинейных уравнений второго порядка специального вида. № 358-81. Деп. от 28.01.81.

Предлагаются численные методы решения задачи Коши в случае систем квазилинейных уравнений второго порядка, основанные на информации о точном решении исходной задачи. Приводятся результаты численных экспериментов.

УДК 681.322.01

Г. И. Шпаковский, Б. А. Кац. Одноярусная коммутационная сеть для параллельных ЭВМ с одиночным потоком команд. № 359-81. Деп. от 28.01.81.

Рассматривается одноярусная коммутационная сеть для параллельных ЭВМ, предназначенная для реализации пакетов связей со случайным распределением адресов. Для оценки быстродействия используются методы машинного моделирования. Предлагается алгоритм функционирования сети. Показано, что для систем среднего быстродействия и размера одноярусная сеть требует в несколько раз меньше оборудования, чем эквивалентная ей по быстродействию каскадная сеть, например, ω -сеть.

УДК 519.21

В. В. Казаченок. О существовании стационарных квазипериодических решений линейных стохастических дифференциальных уравнений. № 315-81. Деп. от 27.01.81.

Для систем линейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами исследуются необходимые условия существования стационарных квазипериодических решений.

УДК 621.382.82.001

И. И. Абрамов. О некоторых «физических» способах повышения эффективности алгоритмов численного анализа полупроводниковых приборов. № 197-81. Деп. от 14.01.81.

Рассматриваются и предлагаются некоторые «физические» способы повышения эффективности алгоритмов численного решения фундаментальной системы уравнений теории полупроводниковых приборов в одномерном и двумерном случаях.

УДК 539.376-378-388

В. Г. Шепелевич. Разработка лабораторной работы «Ползучесть металлов». № 153-81. Деп. от 13.01.81.

В разработке приведены методические указания по постановке лабораторной работы «Ползучесть металлов». Дано описание установки для исследования явления ползучести металлов и методики определения энергии активации ползучести.

УДК 517.926.4

С. А. Мазаник. О достаточных условиях асимптотической эквивалентности линейных дифференциальных систем. № 152-81. Деп. от 13.01.81.

Для линейных дифференциальных систем с ограниченными и интегрируемыми на любом ограниченном промежутке положительной полуоси коэффициентами доказываются достаточные признаки асимптотической эквивалентности.

УДК 535.338.334 : 535.36

С. Е. Яковенко, В. И. Науменко. Метод изучения молекулярного движения в нематических жидких кристаллах по спектрам комбинационного рассеяния. № 151-81. Деп. от 13.01.81.

Изучена возможность исследования динамики молекулярного движения в нематических жидких кристаллах по спектрам комбинационного рассеяния. Приведены формулы расчета временных функций корреляции колебательного и вращательного движения молекул одноосных жидких кристаллов. Возможности метода обсуждаются на примере п-(транс-4-амилциклогексил)бензонитрила.

УДК 519.21

П. М. Лаппо. Оценка смешанных семинвариантов для процессов с ψ -перемешиванием. № 1353-81. Деп. от 25.03.81.

Получена оценка сверху для модуля смешанных семинвариантов, зависящая от функции ψ -перемешивания («плавно» перемешивания) и доказана асимптотическая неулучшаемость приведенной оценки по функции ψ -перемешивания $\psi(\tau)$. Для стационарных в узком смысле действительных случайных процессов, удовлетворяющих условию ψ -перемешивания, приводится оценка для сумм $\sum |t_i - t_n|^\alpha |S_n(t_1, \dots, t_n)|$ в случае дискретного времени и для интегралов $\int |t_i - t_n|^\alpha \times |S_n(t_1, \dots, t_n)| dt_1 \dots dt_{n-1}$ в случае непрерывного времени.

УДК 534.1 : 535.33 : 541.49

И. А. Хартоник, Г. Г. Новицкий, Т. М. Буслаева, Д. С. Умрейко, Н. М. Сеницын. Расчет и интерпретация колебательных спектров гексахлорокомплексов платины (IV) с первичными аминами. № 1347-81. Деп. от 25.03.81.

Исследованы колебательные спектры гексахлороплатинатов (IV) с первичными аминами. Проведен теоретический расчет частот и форм нормальных колебаний комплексов и на этой основе произведено отнесение частот спектров.

УДК 681.3.06 : 51

М. К. Буза, Л. В. Певзнер, И. В. Седова. Автоматическое построение иерархической структуры последовательных программ. № 1637-81. Деп. от 13.04.81.

Предлагается метод построения графа информационных и управляющих связей синтаксически правильной последовательной программы на процедурно-ориентированном языке. Рассматривается реализация этого метода для программ на ПЛ/I в ОС ЕС ЭВМ.

УДК 261.391.161

Л. Н. Данилевский, Ю. А. Доманов, О. В. Коробко. Исследование адаптивной антенной решетки с обработкой сигналов на выходах парциальных лучей. № 2040-81. Деп. от 07.05.81.

Рассмотрен алгоритм обработки сигналов в адаптивных антенных решетках на выходах парциальных лучей. Выведена аналитическая зависимость подавления помеховых источников и взаимного расположения парциальных диаграмм направленности.

УДК 517.9 : 535.4

А. Н. Крючков. Рассеяние плоской электромагнитной волны на плоско-параллельном диэлектрическом слое с шаровой неоднородностью. № 2038-81. Деп. от 07.05.81.

Получено точное аналитическое решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны, нормально падающей на слой, содержащий шаровую неоднородность. На основании теорем сложения решение задачи сведено к решению алгебраической системы линейных уравнений. Параллельно рассматривается вопрос о получении приближенного решения при некотором удалении шара от плоских границ раздела сред, а также возможность реализации алгоритма предлагаемой задачи на ЭВМ, как в случае точного решения, так и при указанных допущениях. Получено аналитическое выражение полей в волновой зоне. Задача может иметь широкое приложение, например, в геологии.

УДК 519.2/681.321

В. В. Апанасович, В. В. Ревинский, О. М. Тихоненко. Влияние совмещения приема и передачи на распределение суммарной длины сообщений в памяти ЦКС. № 2037-81. Деп. от 07.05.81.

С учетом совмещения процессов приема и передачи получены аналитические выражения для преобразования Лапласа — Стильгеса суммарной длины сообщений, хранящихся в памяти ЦКС в период их обработки. Входной поток полагается простейшим, функция распределения длины сообщений произвольна, время обработки пропорционально длине.

УДК 681:3.06:51

М. К. Буза, Л. В. Певзнер. **Об одной системе автоматического распараллеливания программ некоторого класса.** № 2318-81. Деп. от 18.05.81.

Описывается система автоматического распараллеливания последовательных программ на процедурно-ориентированном языке. Рассматривается реализация этой системы для программ на ПЛ/I в ОС ЕС ЭВМ.

УДК 517.977.52

Э. А. Салиев. **Необходимые условия оптимальности особых управлений в системах с запаздыванием.** № 2400-81. Деп. от 25.05.81.

Доказаны необходимые условия оптимальности особых управлений в системах с запаздыванием при наличии смешанных ограничений на траекторию. Окончательный результат выражен через матричные импульсы.

УДК 681.3

А. Н. Курбацкий. **О некоторых преобразованиях стандартных схем программ.** № 2399-81. Деп. от 25.05.81.

Рассматриваются эквивалентные преобразования стандартных схем программ, существенно упрощающие процесс построения параллельных схем. Приводится алгоритм таких преобразований и некоторые количественные оценки работы алгоритма.

УДК 537.322-378.147-388

В. Г. Шепелевич. **Разработка лабораторной работы «Термоэлектрические явления».** № 2398-81. Деп. от 25.05.81.

Приведены методические указания по постановке лабораторной работы «Термоэлектрические явления». Дано описание установки и методики измерения дифференциальной термо-э. д. с.

УДК 517.948.32

В. В. Кашевский. **Обобщенная нелинейная краевая задача на торе.** № 2523-81. Деп. от 28.05.81.

Изучается нелинейная задача типа задачи Римана на абстрактной римановой поверхности первого рода для неразделяющего контура. Задача рассмотрена в различных подклассах семейства ограниченных кусочно-аналитических функций.

УДК 62-50

Л. А. Филиппук. **Мультипоток минимальной стоимости с дополнительными ограничениями на частичные суммы дуговых потоков.** № 2522-81. Деп. от 28.05.81.

Предложен метод решения двухпродуктовой транспортной задачи линейного программирования с дополнительными ограничениями на частичные суммы дуговых потоков.

УДК 681.34

И. А. Малевич, В. А. Дьяков, В. И. Иванов, Б. П. Устинов, С. И. Чубаров, Л. Н. Чирковская, Г. И. Шпаковский, А. Н. Шатило. **Методы построения быстродействующих аналоговых ЗУ на накопителях емкостного типа.** № 2521-81. Деп. от 28.05.81.

Рассмотрены основные направления развития аналоговых запоминающих устройств на накопительных элементах емкостного типа с одно- и многоканальной функциональной структурой. Предложены пути повышения точности ЗУ, основанные на принципе многопетлевых нелинейных обратных связей и принудительной стабилизации циклов хранения ЗУ.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Апанасович В. В., Чернявский А. Ф. Об одном методе моделирования пуассоновского потока случайных событий	3
Егоров А. С., Крот В. И. Влияние параметров среды на структурное состояние конденсированных ДНП-систем	5
Борздов В. М. О тепловом старении поликристаллических резистивных пленок	8
Мулярчик С. Г., Абрамов И. И. Алгоритм двумерного численного анализа биполярных транзисторов	11
Личко Г. П. Об оценке быстродействия различных способов цифровой фильтрации с помощью КИХ-фильтров при антенных измерениях	15
Курейчик К. П., Макаров В. Л. Таймер электротермического атомизатора	17
Фурс С. Н. Алгоритм вычисления двоичного логарифма	21
Данейко И. К., Лесников В. И., Фираго В. А. Цифро-аналоговое устройство для измерения условных средних	24
Некрашевич И. Г., Лапшин В. А. Взаимосвязь между электрическими, эрозийными и энергетическими характеристиками вакуумной дуги	27
Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А. О распространении переменного магнитного поля в ферромагнитном цилиндре	29

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Глушенков В. С., Гневко С. В., Костюкова О. И. Численный эксперимент по методам решения общей задачи линейного программирования	33
Костюкова О. И., Тятюшкин А. И. Численный эксперимент по одному методу решения общей задачи линейного программирования	35
Прусов И. А., Селявко В. В. Об одном решении задачи изгиба бесконечной трансверсально-изотропной пластинки с отверстием в уточненной постановке	38
Вакульчик П. А. Исследование сходимости неявных разностных схем решения смешанной задачи для нелинейных гиперболических систем	41
Забелло Л. Е., Колобова Л. А. Об одном алгоритме решения задачи векторной оптимизации	44
Забелло Л. Е., Лебедев А. Л. Фильтр Калмана для линейных дискретных систем с запаздыванием	46
Шилин А. П. Краевая задача, сводящаяся к трем задачам Римана	50
Коляда А. А., Пилиповец Ф. С. Распределение поправки Американа к неточному рангу числа в системах остаточных классов	53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Пряхин А. Е. Измеритель индукции магнитного поля с цифровым отсчетом в системе СИ	57
Калинин Ю. М. Определение энергии активации релаксационных процессов в сплавах GaAs и Ge туннельных диодах	59
Гуляев А. Д., Емельяненко В. И., <u>Изох В. В.</u> К вопросу о стробоскопическом преобразовании	60
Мещерская М. Б. О зависимости множества линейных элементов от параметризации кривой	62
Бобков В. В. Об одном семействе численных методов с улучшенными свойствами устойчивости	63
Духвалов Л. Д. О некоторых однородных пространствах над алгеброй квадратичных матриц	65
Фам Тхе Лонг. Численный эксперимент по сравнению методов решения общей задачи линейного программирования	67
Белявский С. С. Об одной задаче для систем с переключением	69
Аннотации депонированных статей	70

РЕФЕРАТЫ

УДК 518:519.2

Апанасович В. В., Чернявский А. Ф. Об одном методе моделирования пуассоновского потока случайных событий.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Излагается метод получения реализации пуассоновского потока случайных событий с интенсивностью $\beta(t)$ по реализации пуассоновского потока случайных событий с интенсивностью $\lambda(t) \geq \beta(t)$, основанный на использовании операции прореживания исходного потока.

Библ. 3 назв.

УДК 577.3

Егоров А. С., Крот В. И. Влияние параметров среды на структурное состояние конденсированных ДНП-систем.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Показано, что изменение ионной силы и рН среды вызывает структурные перестройки в надмолекулярных ДНП-системах. Дана количественная характеристика наблюдаемых структурных превращений. Выявлена корреляция в поведении изучаемых систем и реальных генетических структур клетки. Обнаружен структурный переход в модельных ДНП-системах в диапазоне значений рН, близких к физиологическим.

Библ. 9 назв., ил. 2.

УДК 621.396.69-181.48

Борздов В. М. О тепловом старении поликристаллических резистивных пленок.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Дается простая численная оценка момента времени, соответствующего переходу от зернограничной диффузии к объемной в поликристаллических резистивных пленках. Предполагается, что основным механизмом деградации в процессе их теплового старения является термоактивированная диффузия кислорода или иных примесей.

Библ. 10 назв.

УДК 621.382.82.001

Мулярчик С. Г., Абрамов И. И. Алгоритм двумерного численного анализа биполярных транзисторов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Предлагается эффективный алгоритм численного анализа биполярных полупроводниковых приборов. Основу алгоритма составляет разработанная методика расчета «достаточно хорошего» начального приближения для концентраций дырок и электронов и для электростатического потенциала по всей структуре прибора, которое в дальнейшем улучшается с помощью итераций Гуммеля.

Библ. 9 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 681.32:621.372

Личко Г. П. Об оценке быстродействия различных способов цифровой фильтрации с помощью КИХ-фильтров при антенных измерениях.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Приводятся оценки быстродействия способов цифровой фильтрации, позволяющие избрать способ реализации КИХ-фильтров при антенных измерениях.

Библ. 5 назв., табл. 1.

УДК 681.118.1

Курейчик К. П., Макаров В. Л. Таймер электротермического атомизатора.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Предложено и описано устройство управления многоступенчатым нагревом электротермического анализатора, предназначенного для работы в составе атомно-абсорбционных спектрофотометров. Устройство обеспечивает нагрев испарителя атомизатора в четырех независимых интервалах от 30 до 3500 °С с шагом 3—5 °С, при длительности 0,2—100 с.

Библ. 6 назв., ил. 2.

УДК 681.325.5

Фурс С. Н. Алгоритм вычисления двоичного логарифма.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Предложен алгоритм вычисления двоичного логарифма, отличающийся от ранее опубликованных большей скоростью сходимости итерационного процесса. Алгоритм использует знакопеременные многозначные приращения. Моделирование алгоритма на ЦВМ подтвердило эффективность его применения: количество итерационных шагов в среднем сокращено в 2,5 раза.

Библ. 2 назв., табл. 2.

УДК 620.179.14

Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А. О распространении переменного магнитного поля в ферромагнитном цилиндре.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Получены уравнения для первой и третьей гармонических составляющих напряженности магнитного поля, магнитной индукции и индуцированной ЭДС при воздействии переменного магнитного поля на бесконечный ферромагнитный цилиндр с учетом влияния вихревых токов и петли гистерезиса. Показано, что в случае значительного скин-эффекта полученные уравнения хорошо согласуются с аналогичными уравнениями для ферромагнитного полупространства.

Библ. 6 назв.

УДК 534.611

Данейко И. К., Лесников В. И., Фираго В. А. Цифро-аналоговое устройство для измерения условных средних.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Описано цифро-аналоговое устройство для измерения условных средних стационарных и стационарно связанных эргодических процессов. Отличительной особенностью этого устройства является его простота и достаточно малая погрешность.

Библ. 5 назв., ил. 2.

УДК 621.793.184

Некрашевич И. Г., Лапшин В. А. Взаимосвязь между электрическими, эрозионными и энергетическими характеристиками вакуумной дуги.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Приводятся результаты исследований электрической дуги, горящей в вакууме, при изменении тока дуги — от единиц до сотен ампер. В качестве материала катода использовались металлы с различными теплофизическими, эмиссионными и ионизационными характеристиками. Определена зависимость катодного падения потенциала в вакуумной дуге от скорости эрозии, коэффициента электропереноса материала катода, тока дуги. Установленные зависимости объясняются на основании современных представлений о физических процессах, протекающих в катодных пятнах электрической дуги.

Библ. 8 назв.

УДК 519.852.6

Глушенок В. С., Гневко С. В., Костюкова О. И. Численный эксперимент по методам решения общей задачи линейного программирования.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Приведены результаты эксперимента по сравнению эффективности шести методов решения общей задачи линейного программирования.

Библ. 5 назв., табл. 2.

УДК 62-50

Костюкова О. И., Тятюшкин А. И. Численный эксперимент по одному методу решения общей задачи линейного программирования.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Рассмотрены результаты численного эксперимента, проведенного с целью сравнения эффективности двух методов решения общих задач линейного программирования.

Библ. 3 назв., табл. 2, ил. 3.

УДК 539.3

Прусов И. А., Селявко В. В. Об одном решении задачи изгиба бесконечной трансверсально-изотропной пластинки с отверстием в уточненной постановке.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

На основании метода линейного сопряжения и метода малого параметра в уточнен-

ной постановке дается общее решение задачи об изгибе бесконечной трансверсально-изотропной пластинки с отверстием некруговой формы с гладкой границей.

Библ. 8 назв.

УДК 518:517(944)947

Вакульчик П. А. Исследование сходимости неявных разностных схем решения смешанной задачи для нелинейных гиперболических систем.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Исследованы на сходимость регуляризованные разностные схемы порядка аппроксимации $O(\tau+h^2)$ решения смешанной задачи общего вида для нелинейной гиперболической системы первого порядка.

Библ. 6 назв.

УДК 62-50

Забелло Л. Е., Колобова Л. А. Об одном алгоритме решения задачи векторной оптимизации.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Предлагается метод решения задачи векторной оптимизации для класса выпуклых функций. Указывается на некоторые возможные обобщения полученных результатов.

Библ. 2 назв.

УДК 62-50

Забелло Л. Е., Лебедев А. Л. Фильтр Калмана для линейных дискретных систем с запаздыванием.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Для линейной дискретной системы с запаздыванием и линейным законом наблюдения при случайных помехах типа «белый шум» в системе и наблюдающем устройстве исследуется одна из основных задач теории оценивания — задача фильтрации. Построен фильтр Калмана в виде рекуррентных соотношений.

Библ. 3 назв.

УДК 517.948.32

Шилин А. П. Красевая задача, сводящаяся к трем задачам Римана.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Рассмотрена одна красевая задача типа задачи Римана с интегральными членами в краевом условии. Задача сведена к трем задачам Римана и решена в замкнутой форме.

Библ. 4 назв.

УДК 33.083.722

Коляда А. А., Пилиповец Ф. С. Распределение поправки Американа к неточному рангу числа в системах остаточных классов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Доказана в общем виде теорема о нормированном ранге числа в системах остаточных классов (СОК); с ее помощью определяется мощность подмножества чисел из диапазона СОК, для которых ранг не совпадает с неточным рангом, введенным В. М. Американом.

Библ. 4 назв.

УДК 621.374.32:621.317.421

Пряхин А. Е. Измеритель индукции магнитного поля с цифровым отсчетом в системе СИ.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Рассматриваются методы измерения индукции магнитного поля с получением результатов в системе СИ. Описана приставка к цифровому частотомеру, выполненная на микросхемах серии 155.

Библ. 2 назв., ил. 2.

УДК 621.382.2.029.64

Калинин Ю. М. Определение энергии активации релаксационных процессов в сплавных GaAs и Ge туннельных диодах.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Изучены температурная зависимость процессов релаксации пикового тока Ge и GaAs сплавных туннельных диодов, а также энергия активации процессов релаксации.

Библ. 5 назв., ил. 2.

УДК 621.317.08

Гуляев А. Д., Емельяненко В. И., [Изох В. В.] К вопросу о стробоскопическом преобразовании.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Рассматриваются закономерности расположения выборок при несинхронном стробировании периодического сигнала.

Библ. 2 назв., ил. 1.

УДК 517-920

Мещерская М. Б. О зависимости множества линейных элементов от параметризации кривой.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Приведен пример кривой, у которой множество линейных элементов зависит от параметризации.

Библ. 1 назв., ил. 1.

УДК 518.32:33

Бобков В. В. Об одном семействе численных методов с улучшенными свойствами устойчивости.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

На примере задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка приведены примеры новых нелинейных методов третьего порядка точности с улучшенными свойствами согласованности в поведении решений разностного и дифференциального уравнений. Указывается на возможность использования подобного подхода при конструировании разностных схем в случае уравнений с частными производными.

Библ. 3 назв.

УДК 513

Духвалов Л. Д. О некоторых однородных пространствах над алгеброй квазиматриц.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

С помощью общих методов исследования симметрических G -пространств и их морфизмов строятся и изучаются некоторые симметрические однородные пространства над алгеброй квазиматриц. В частности, задается квазиэллиптическое пространство и пространства плоскостей в нем, а также приводятся общие формулы движений в указанных пространствах.

Библ. 5 назв.

УДК 519.852.6

Фам Тхе Лонг. Численный эксперимент по сравнению методов решения общей задачи линейного программирования.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Приводятся результаты численного эксперимента по сравнению двух методов решения общей задачи линейного программирования.

Библ. 4 назв., табл. 1.

УДК 517.94

Белявский С. С. Об одной задаче для систем с переключением.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., № 2.

Рассматривается задача о нахождении точек переключения для линейных систем специального вида таких, что при некотором t^* краевая задача $x(0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$ имеет решение при произвольных x_0 и x^* , отличных от нуля.

Библ. 1 назв.

*В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ
БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА имени В. И. Ленина
В 1982 г.
ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ:*

Б. Ю. Хапох. ОПТИЧЕСКИЕ ОТРАЖАТЕЛИ ТЕТРАЭДРИЧЕСКОГО ТИПА В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ. (160 с., цена 1 р. 30 к.)

В книге рассматриваются принципы действия, лучевые и поляризационные свойства оптических отражателей тетраэдрического типа, а также методики энергетического расчета активных систем, прикладного анализа и синтеза лучевых свойств отражателей, применяемых в автоколлимационных системах. Полученные результаты дают возможность выполнять энергетические и точностные расчеты оптических и оптико-электронных систем, в которых используются эти отражатели.

Рассчитана на разработчиков и проектировщиков оптических и оптико-электронных приборов, а также на студентов соответствующих специальностей.

А. М. Бельский, Т. М. Корнейчик, А. П. Хапалюк. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. (198 с., цена 2 р. 90 к.)

В монографии обобщены последние достижения теории распространения и генерации гауссово-эрмитовых световых пучков, которые лучше всего моделируют излучение оптических квантовых генераторов. Полученные теоретические результаты базируются на оригинальных исследованиях и наиболее приближаются к известным экспериментальным.

Рекомендуется научным и инженерно-техническим работникам, специализирующимся в области квантовой оптики, электроники, лазерной техники, аспирантам и студентам соответствующих специальностей.

95 коп.

Индекс 74851