УДК 517.94

С. С. БЕЛЯВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Пусть задана n-мерная система

$$x' = (Au(t) + Bv(t))x, \tag{1}$$

где A и B — постоянные квадратные матрицы; $u(t)$ и $v(t)$ — скалярные функции, определенные на R, принимающие значения -1, 0, 1 и такие, что $u^2(t) + v^2(t) = 1$ для всех $t \in R$.

Обозначим $\bar{R}_n = R/0$. Возьмем произвольные x_0 и x^*, принадлежащие $\bar{R}^n$, и поставим следующую задачу.

Найти t^*, $u(t)$, $v(t)$, определенные на $[0, t^*]$ такие, что решение $x(t)$ системы (1) удовлетворяет условиям $x(0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

Очевидно, что такая задача не всегда разрешима. Как следует из [1], если матрицы A и B перестановочны, эта задача разрешима лишь в том случае, когда $x^* \in \{x : x = e^{At_1 + \overline{B}t_2} x_0,\ t_1 \in R,\ t_2 \in R\}$.

В настоящей заметке показано, как найти t^*, $u(t)$ и $v(t)$, когда матрицы A и B имеют определенный вид.

1. Пусть $A = \left\{ \left\| \begin{matrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} \mu_k & \nu_k \\ -\nu_k & \mu_k \end{matrix} \right\| \right\}$,

$B = \left\{ \lambda_1 \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \\ -\beta_{k-1}, & \alpha_{k-1} \end{matrix} \right\|, \lambda_2 \right\}$. Числа λ_1, $\beta_1, \ldots \beta_{k-1}$, $\nu_1, \ldots \nu_k$ отличны от нуля.

Пусть $x_0 = \{x_{1\,0}, \ldots, x_{n\,0}\}^T$

$x^* = \{x^*_{1\,0}, \ldots, x^*_{n0}\}^T$.

Выберем t_1 таким, чтобы $-x_{n-1\,0} \sin \nu_k t_1 + x_{n\,0} \cos \nu_k t_1 = 0$, тогда $e^{At_1} x_0 = x_1 = \{x^{(1)}_{1\,0}, \ldots, x^{(1)}_{n-1\,0}, 0\}^T$. Положим $u(t) = 1$ на $[0, t_1[$. Пусть t'_2 такое, что $-x^{(1)}_{n-2\,0} \sin \beta_{k-1} t'_2 + x^{(1)}_{n-1\,0} \cos \beta_{k-1} t'_2 = 0$, тогда $e^{Bt'_2} x_1 = \{x^{(2)}_{1\,0}, \ldots, x^{(2)}_{n-2\,0}, 0, 0\}$. Положим $v(t) = 1$ на $[t_1 t_2[$, где $t_2 = t'_2 + t_1$.

Продолжая этот процесс, через $n-1$ шагов построим функции $u(t)$ и $v(t)$ на $[0, t_{n-1}[$ такие, что решение системы (1) в точке $t = t_{n-1}$ примет значение $x(t_{n-1}) = \{x^{n-1}_{1\,0}, 0, \ldots, 0\}$.

Возьмем точку x^* и построим функции $u_1(t)$ и $v(t)$ на $[0, t^*_{n-1}]$ такие, что решение $x^*(t)$ $(x^*(0) = x^*)$ системы (1) в точке $t = t^*_{n-1}$ примет значение $x^*(t^*_{n-1}) = \{y^{(n-1)}_{1\,0}, 0, \ldots, 0\}$; при этом всегда можно построить t^*_{n-1} такое, что $x^{(n-1)}_{1\,0}\, y^{(n-1)}_{1\,0} > 0$.

Положим $v(t) = \operatorname{sgn} \lambda_1 (y^{(n-1)}_{1\,0} - x^{(n-1)}_{1\,0})$ на $[t_{n-1}, t_n]$, где $t_n - t_{n-1} = \frac{1}{|\lambda_1|} \ln \left| y^{(n-1)}_{1\,0} - x^{(n-1)}_{1\,0} \right|$ и $u(t) = -u_1(t^* - t)$, $v(t) = -v_1(t^* - t)$ на $[t_n, t^*]$, где $t^* = t_n + t^*_{n-1}$.

2. Аналогично строятся функции $u(t)$ и $v(t)$ для системы, где

$$A = \left\{ \lambda_1 \left\| \begin{matrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} \mu_k & \nu_k \\ -\nu_k & \mu_k \end{matrix} \right\| \right\}, \quad B = \left\{ \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{matrix} \right\|, \lambda_2 \right\}.$$

Замечание. Нетрудно убедиться, что аналогично можно построить функции $u(t)$ и $v(t)$ в случае, когда у матриц A и B вместо блоков вида $\left\| \begin{matrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{matrix} \right\|$ стоят блоки $\left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|$, где $(a-d)^2 + cb < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белявский С. С.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1, с. 69.

Поступила в редакцию
14.05.81

*Кафедра высшей математики
и математической физики*