Аналогичную конструкцию имеют и регуляризованные методы высших порядков, построенные на основе [1].

Покоординатно подобные методы могут быть использованы и в случае систем уравнений вида (1), а также применены при построении нелинейных разностных схем для параболических уравнений с сохранением в ряде случаев свойства спектральной устойчивости [3] при любом соотношении между шагами сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков В. В.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-матэм. навук, 1967, № 4, с. 27.
2. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем.— М., 1979.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.

Поступила в редакцию 21.06.80

Кафедра вычислительной математики

УДК 513

Л. Д. ДУХВАЛОВ

О НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАД АЛГЕБРОЙ КВАЗИМАТРИЦ

Б. А. Розенфельд [1] ввел в рассмотрение алгебру квазиматриц:

$$M_n^m = \left\{ V = \begin{pmatrix} A & \varepsilon B \\ \varepsilon C & D \end{pmatrix} \right\},$$

где A и D — квадратные вещественные матрицы порядков m и $n-m$ соответственно; B и C — прямоугольные вещественные матрицы; ε — дуальная единица. В этой же работе рассмотрена группа Ли $G(M_n^m)$ указанной алгебры и ее важнейшие подгруппы: ортогональных квазиматриц $O(M_n^m)$, псевдоортогональных квазиматриц ${}^{kl}O(M_n^m)$ и, если $n=2m$, симплектических квазиматриц $S_p(M_n^m)$.

Пусть

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{a} & A & \varepsilon B \\ \varepsilon \bar{b} & \varepsilon C & D \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

подгруппа $G(M_n^m)$, где $V \in O(M_{n-1}^{m-1})$. M_n^m есть G— пространство, относительно φ:

$$\Delta \times M_n^m \to M_n^m : (g, U \to g U g^{-1}). \tag{2}$$

Изучим его однородные симметрические пространства, применяя определение, предложенное в работе [2]: однородное G-пространство над алгеброй M_n^m будем называть симметрическим, если порождающий его элемент $\varkappa \in M_n^m$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \det(\varkappa) \neq 0 \\ \varkappa G \varkappa^{-1} \subset G \\ \varkappa^2 g = g \varkappa^2 \ \forall g \in G. \end{cases} \tag{3}$$

Производя соответствующие вычисления и учитывая $G=\Delta$, получим, с точностью до подобия:

$$\varkappa = \begin{pmatrix} E_{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{p_2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где E_i — единичная матрица порядка i, $k_1+p_1=m$.

Однородное симметрическое пространство, соответствующее набору чисел k_1, k_2 в выражении (4), будем обозначать $X_{k_1 k_2 \varkappa}$. Такое пространство можно определить с точностью до изоморфизма, порожденного отображением $\varkappa \to \varkappa_0 = \frac{1}{2}(E_n + \varkappa)$.

Пространство $X_{10\varkappa_0}$ назовем квазиэллиптическим пространством и обозначим S_{n-1}^{m-1}. Тогда, по определению,

$$S_{n-1}^{m-1} = \left\{ H = g\varkappa_0 g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{x} & 0 & 0 \\ \varepsilon\bar{y} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall g \in \Delta \right\}.$$

Будем говорить, что $\bar{x}$ задает координаты первого рода, а $\bar{y}$ координаты второго рода точки H. Это пространство изучалось Б. А. Розенфельдом и его учениками [3—5].

Отображение φ индуцирует в S_{n-1}^{m-1} структуру G— пространства, т. е. определено φ':

$$\Delta \times S_{n-1}^{m-1} \to S_{n-1}^{m-1} : (g, H) \to H' = g H g^{-1}, \tag{5}$$

если $H \in S_{n-1}^{m-1}$ определено координатными столбцами $\bar{x}$, $\bar{y}$; а H' — $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, то из соотношения (5) получим

$$\begin{cases} \bar{x}' = A\bar{x} + \bar{a} \\ \bar{y}' = C\bar{x} + D\bar{y} + \bar{b}, \end{cases} \tag{6}$$

где A, C, D, $\bar{a}$, $\bar{b}$ определяются заданием $g \in \Delta$.

Любой полиномиальный морфизм $p:(S_{n-1}^{m-1}) \to M_n^m$ первой степени, т. е. $p(H_1, H_2) = H_1 + \lambda H_2$; если $\lambda = -1$, то образом этого морфизма служит векторное квазиэллиптическое пространство:

$$\bar{S}_{n-1}^{m-1} = \left\{ \bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{x} & 0 & 0 \\ \varepsilon\bar{y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{7}$$

а если $\lambda \neq -1$, то образ морфизма есть точка, делящая $[H_1, H_2]$ в отношении λ.

Рассмотрим ${}^T\bar{S}_{n-1}^{m-1} = \{\bar{H}^T \mid \bar{H} \in \bar{S}_{n-1}^{m-1}\}$ (T — знак транспонирования). Указанное множество есть $\Delta^T = \{g^T \mid g \in \Delta\}$ — пространство относительно ψ:

$$(g^T, \bar{H}^T) \to (g^T)^{-1} \bar{H}^T g^T. \tag{8}$$

Рассмотрим полиноминальные морфизмы $p: \bar{S}_{n-1}^{m-1} \times {}^T\bar{S}_{n-1}^{m-1} \to M_n^m$. Все они не выше второй степени. Важнейшими из них будут:

1) $p_0:(\bar{H}_1, \bar{H}_2^T) \to \bar{H}_2^T \cdot \bar{H}_1 = (\bar{x}_2^T \bar{x}_1) \cdot \varkappa_0$,

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ координаты первого рода $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$. Числовой инвариант $\bar{x}_2^T \bar{x}_1$ называется скалярным произведением первого рода

$$(\bar{H}_1 \bar{H}_2)_1 \tag{9}$$

2) $p_1:(\bar{H}_1 \bar{H}_2^T) \to \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2^T$,

$$\bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & \varepsilon B \\ 0 & \varepsilon C & D \end{pmatrix},$$

где $B \cdot C = (\bar{y}_1^T \bar{y}_2) A$; $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$— координаты второго рода $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$. Инвариант $\bar{y}_1^T \bar{y}_2$ назовем скалярным произведением второго рода

$$(\bar{H}_1, \bar{H}_2)_2. \tag{10}$$

Рассмотрим сейчас все другие наборы k_1, k_2 и построим для них симметрические однородные пространства $X_{k_1k_2}$, исходя из начального элемента $\varkappa_0$, определенного в (4). Получим:

$$X_{k_1, k_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{x} & P_1 & \varepsilon V^T \\ \varepsilon \bar{y} & \varepsilon V & P_2 \end{pmatrix} \right\},$$

где

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1 = A E^0_{k_1} A^T, & \\ P_2 = D E^0_{k_2} D^T, & \bar{x} = \bar{a} - P_1 \bar{a}. \\ V = (C A^T) P_1 - P_2 (C A^T), & \bar{y} = (\bar{b} - P_2 \bar{b}) - V \bar{a}. \end{array} \right. \quad (11)$$

E^0_i матрица с i единицами по диагонали и остальными нулями есть G — пространство, и под действием преобразования g матричная координата V, проектирующие операторы P_1, P_2 и координаты начальной точки $\bar{x}$, $\bar{y}$ преобразуются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1' = A P_1 A^T, & \bar{x}' = A\bar{x} - (P_1' \bar{a} - \bar{a}), \\ P_2' = D P_2 D^T, & \bar{y}' = D\bar{y} + C\bar{x} - V\bar{a} - \\ V' = D V A^T + C P_1 A^T + D P_2 B^T, & - (P_2' \bar{b} - \bar{b}). \end{array} \right. \quad (12)$$

Формулы (12) обобщают формулы Б. А. Розенфельда [4], рассмотренные для частного случая $P_1 = E_{m-1}$, $P_2 = 0$.

Рассматривая морфизмы, заданные на $X_{k_1k_2}$, называемом пространством (k_1, k_2)-плоскостей, легко классифицировать эти плоскости, указать их уравнения и направляющие пространства, а также найти все основные инварианты, пользуясь инвариантами (9), (10).

Заменив в определении группы Δ группу $O(M^{m-1}_{n-1})$ на ${}^{kl}O(M^{m-1}_{n-1})$, либо на $Sp(M^{m-1}_{n-1})$, можно получить соответствующую теорию квазигиперболических и квазисимплектических пространств и их пространств плоскостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. и др.— Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1969, т. 4, с. 62.
2. Ведерников С. В.— Проблемы геометрии, 1975, т. 7, с. 49.
3. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства.— М., 1969.
4. Розенфельд Б. А.— Труды Московского матем. об-ва, 1959, т. 8, с. 49.
5. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства.— М., 1966.

Поступила в редакцию 21.06.80

Кафедра геометрии

УДК 519.852.6

ФАМ ТХЕ ЛОНГ

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО СРАВНЕНИЮ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В заметке приводятся результаты численных экспериментов по сравнению двух методов решения общей задачи ЛП в канонической форме [1]:

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \quad (1)$$

где c, x, d_*, d^* — n-векторы; A — $m \times n$-матрица; $m < n$.

Для решения задачи (1) в [2] предложен прямой опорный метод с адаптивной нормировкой (метод 1), результаты экспериментального сравнения которого с другими методами приведены в [4]. Цель нашего эксперимента — сравнение эффективности метода 1 и двухшагового прямого опорного метода [3] (метод 2).

Было сформировано 9 серий задач (1), по 5 задач в каждой. Пара-