$\gamma\geqslant0$ остаются произвольными, при $\beta<0$, $\gamma\geqslant0$ представляют собой общее решение системы (14), при $\beta\geqslant0$, $\gamma<0$ — общее решение системы (15), а при $\beta<0$, $\gamma<0$ — общее решение объединенной системы (14), (15). Обозначим r ранг системы (14), если $\alpha>0$, $\beta<0$, $\gamma\geqslant0$, системы (15), если $\alpha>0$, $\beta\geqslant0$, $\gamma<0$, объединенной системы (14), (15), если $\alpha>0$, $\beta<0$, $\gamma<0$; положим $r=0$ в остальных случаях.

Теорема 2. Число линейно независимых решений однородной задачи (2) равно $\max\{0,\alpha\}+\max\{0,\beta\}+\max\{0,\gamma\}-r$.

В самом деле, пусть $f(t)\equiv0$. Если $\Phi(z)\equiv0$, $z\in D^+$, то $\Phi^+(t)\equiv0$ и из краевого условия (8) получим $\Phi_1^-(t)\equiv\Phi_1^+(t)$. В силу теоремы об аналитическом продолжении и теоремы Лиувилля $\Phi_1(z)\equiv0$, тогда из формулы (5) следует, что $P_{\alpha-1}(t)\equiv0$, а затем из формулы (10) получаем $Q_{\beta-1}(t)\equiv0$. Аналогично из предположения $\Phi(z)\equiv0$, $z\in D^-$, получим, что $P_{\alpha-1}(t)\equiv0$, $S_{\gamma-1}(t)\equiv0$. Следовательно, ненулевые коэффициенты многочленов $P_{\alpha-1}(t)$, $Q_{\beta-1}(t)$, $S_{\gamma-1}(t)$ не могут дать линейно зависимые решения однородной задачи (2), что и доказывает теорему 2.

Замечание. Если $\delta(t)$ и $\omega(t)$ — сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы L на себя, то краевая задача

$$\frac{1}{2}b(t)\Phi^+(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{b(\tau)\Phi^+(\tau)\delta'(\tau)\,d\tau}{\delta(\tau)-\delta(t)}=$$

$$=\frac{1}{2}a(t)c(t)\Phi^-(t)-\frac{a(t)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{c(\tau)\Phi^-(\tau)\omega'(\tau)\,d\tau}{\omega(\tau)-\omega(t)}+f(t)$$

аналогично сводится к трем задачам Газемана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крикунов Ю. М.— Уч. зап. Казанского ун-та, 1952, т. 112, № 10, с. 191.
2. Рогожин В. С.— Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 4, с. 791.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
4. Черский Ю. И.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 4, с. 802.

Поступила в редакцию 13.11.80

Кафедра теории функций

УДК 33.083.722

А. А. КОЛЯДА, Ф. С. ПИЛИПОВЕЦ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОПРАВКИ АМЕРБАЕВА К НЕТОЧНОМУ РАНГУ ЧИСЛА В СИСТЕМАХ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

В работе доказана в общем виде теорема о нормированном ранге числа в системах остаточных классов (СОК) $\nu^{(n)}$ и с ее помощью установлена формула для мощности $\mu[M_1]$ подмножества M_1 чисел из диапазона СОК, для которых ранг не совпадает с неточным рангом, введенным В. М. Амербаевым. Программная реализация полученной формулы показала, что M_1 составляет незначительную часть диапазона СОК — в среднем 3—6 %.

Рассмотрим систему остаточных классов (СОК) с n попарно взаимно простыми модулями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и пусть $(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{nn})$ — нормированный остаточный код в этой СОК [1, с. 141] числа $A\in[0, P^{(n)})$, где $P^{(n)}=\prod\limits_{i=1}^{n}p_i$, $\alpha_{in}=|A|P_{in}^{-1}|_{p_i}|_{p_i}$, $P_{in}=\dfrac{P^{(n)}}{p_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$; через $|X|_p$ обозначается остаток от деления числа X на p.

Как известно, нормированный ранг $\nu^{(n)}$ числа A (в дальнейшем он называется просто рангом) определяется соотношением:

$$A = \sum_{i=1}^{n} P_{in} \alpha_{in} - \nu_A^{(n)} P^{(n)} \tag{1}$$

и, следовательно, выражается формулой:

$$\nu_A^{(n)} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{in}}{p_i} \right] \tag{2}$$

$[X]$ — целая часть числа X.

Согласно [1, с. 151] для $\nu_A^{(n)}$ справедлива формула

$$\nu_A^{(n)} = \underline{\nu}_A^{(n)} + \eta(A), \tag{3}$$

где

$$\underline{\nu}_A^{(n)} = \left[\frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right], \tag{4}$$

а $\eta(A)$ равно 0 или 1, если $p_n > \nu_{\max}^{(n-1)}$ ($\nu_{\max}^{(n-1)}$ — максимальное значение $\nu^{(n-1)}$. Формулу (3) назовем формулой Амербаева, а величину $\eta(A)$ — поправкой Амербаева к неточному рангу $\underline{\nu}_A^{(n)}$. В [1, с. 151] также показано, что $\eta(A)$ можно выразить через ранг некоторого числа в укороченной СОК $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. Другими словами, определение ранга с помощью (3) приводит к рекурсивной процедуре, при этом вычисление поправки $\eta(A)$ за минимальное время требует существенно больших аппаратурных затрат, чем вычисление $\underline{\nu}_A^{(n)}$.

Найдем условие, при котором $\nu_A^{(n)} = \underline{\nu}_A^{(n)}$, а также определим распределение поправки Амербаева, т. е. мощности множеств: $M_i = \{A \in [0, P^{(n)}) \mid \eta(A) = i\}$, $i = 0,1$.

Теорема 1. (О ранге числа). Пусть n-ный модуль СОК удовлетворяет условию $p_n > \nu_{\max}^{(n-1)}$. Тогда для произвольного числа $A \in [0, P^{(n)})$ имеет место формула $\nu_A^{(n)} = \bar{\nu}_A^{(n)} - S_{B(A)}$, где

$$\bar{\nu}_H^{(n)} = \left] \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right[; \tag{5}$$

$S_{B(A)}$ — знак числа

$$\left. \begin{aligned} B(A) &= \sum_{i=1}^{n-1} P_{in-1} \alpha_{in-1} - \rho(A) P^{(n-1)}, \\ \rho(A) &= \left| - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in} p_n}{p_i} \right] \right|_{p_n}, \end{aligned} \right| \tag{6}$$

определяемый как $S_{B(A)} = \begin{cases} 0, & \text{если } B(A) \geqslant 0, \\ 1, & \text{если } B(A) < 0. \end{cases}$

Через $]X[$ обозначается наименьшее целое число, не меньшее X.

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{nn})$ — произвольное число из $[0, P^{(n)})$. Рассмотрим последовательность чисел

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} P_{in} \alpha_{in} - j P^{(n)}, \quad j = 0, 1, \ldots, \nu_{\max}^{(n)} \tag{7}$$

$\nu_{\max}^{(n)} = \max\limits_{X \in [0, P^{(n)})} \{\nu_X^{(n)}\}$ и представим A_j в виде:

$$A_j = \sum_{i=1}^{n-1} P_{in-1} \alpha_{in-1} - r_j P^{(n-1)}. \tag{8}$$

С этой целью преобразуем A_j следующим образом:

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} P_{in}\,\alpha_{in} - j\,P^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} P_{in-1}\,(\alpha_{in-1} + [P_n\,\alpha_{in}/p_i]\,p_i) +$$

$$+ P^{(n-1)}\,\alpha_{nn} - j\,P^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} P_{in-1}\ \ \alpha_{in-1} - \Big(j\,p_n - \sum_{i=1}^{n} [\alpha_{in}\,p_n/p_i]\Big)P^{(n-1)}, \quad (9)$$

$$r_j = jp_n - \sum_{i=1}^{n} [\alpha_{in}\,p_n/p_i].$$

По определению (см. формулу (1)) ранг числа равен номеру последнего неотрицательного числа в последовательности (7) и для его нахождения достаточно воспользоваться леммой о знаке числа [2], которая применительно к (8) формулируется в виде.

Лемма 1. (О знаке числа). Если $r_j > \nu_{\max}^{(n-1)}$, то $A_j < 0$, если $z_j \leqslant 0$, то $A_j > 0$.

Из (9) видно, что увеличение j на единицу приводит к увеличению r_j на p_n; и так как по условию теоремы 1 $p_n > \nu_{\max}^{(n-1)}$, то, применяя к (8) лемму 1, устанавливаем, что номер $\nu_A^{(n)}$ искомого элемента последовательности (7) совпадает с целым числом $\bar{\nu}_A^{(n)}$ удовлетворяющим условию

$$0 \leqslant r_{\bar{\nu}_A^{(n)}} < p_n, \quad (10)$$

если только число $B(A) = A_{\bar{\nu}_A^{(n)}}$ неотрицательно, если же $B(A) < 0$, то $\nu_A^{(n)} = \bar{\nu}_A^{(n)} - 1$. Подставляя (9) при $j = \bar{\nu}_A^{(n)}$ в (10), получим $\frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{n} \times$ $\times \left[\frac{\alpha_{in}\,p_n}{p_i}\right] \leqslant \bar{\nu}_A^{(n)} < 1 + \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in}\,p_n}{p_i}\right]$, т. е.

$$\bar{\nu}_A^{(n)} = \left]\frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in}\,p_n}{p_i}\right]\right[. \quad (11)$$

Наконец, из (9) с учетом (11) имеем $\rho(A) = \left]\frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in}\,p_n}{p_i}\right]\right[p_n -$ $- \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in}\,p_n}{p_i}\right] = - \left[\frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in}\,p_n}{p_i}\right]\right] p_n - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in}\,p_n}{p_i}\right] = \left| - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_{in}p_n}{p_i}\right]\right|_{p_n}.$

Теорема доказана. В [3] получен модульный вариант теоремы 1.

Сравнивая (3) с формулой для $\nu_A^{(n)}$ из теоремы 1 заключаем, что поправка Амербаева связана с величиной $S_{B(A)}$ следующим соотношением:

$$\eta(A) = \begin{cases} 1 - S_{B(A)}, & \text{если } \rho(A) \neq 0 \\ 0, & \text{если } \rho(A) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Придание величине $S_{B(A)}$ смысла знака числа позволило разработать алгоритм для $\nu_A^{(n)}$ [3, 4], который не является рекурсивной процедурой. Алгоритм характеризуется максимальным параллелизмом, независимостью вычислений по различным модулям СОК, высоким быстродействием $(2 +]\log_2 n[$ — модульных операций).

Перейдем теперь непосредственно к вопросу о мощности $\mu[M_1]$ множества M_1. Мощность дополнительного множества M_0 выражается через $\mu[M_1]$ соотношением $\mu[M_0] = P^{(n)} - \mu[M_1]$.

Сначала заметим, что лемму 1 можно усилить следующим образом.

Лемма 2. Пусть $n_A\,(1 \leqslant n_A \leqslant n-1)$ — число цифр остаточного кода числа $B = \sum_{i=1}^{n} P_{in-1}\alpha_{in-1} - rP^{(n-1)}$ в СОК с модулями $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ отличны от нуля, а остальные равны нулю. Тогда, если $n_A-1<r$, то $B<0$; если $r\leqslant 0$, то $B\geqslant 0$.

Применяя к числу $B(A)$ из теоремы 1 лемму 2 и учитывая (12), заключаем, что поправка $\eta(A)$ может быть ненулевой лишь для чисел $A\in[0, P^{(n)})$, для которых $1\leqslant\rho(A)\leqslant n_A-1$, $(2\leqslant n_A\leqslant n-1)$.

Теорема 2. Пусть n-ый модуль СОК удовлетворяет условию $p_n\geqslant\geqslant\nu_{\max}^{(n-1)}$. Тогда, $\mu[M_1]=\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n-1}\mu_j$, где μ_j — количество чисел $A\in[0, P^{(n)})$, для которых $n_A=j$ и $1\leqslant\rho(A)\leqslant j-1$.

Доказательство. Пусть A произвольное число из $[0, P^{(n)})$, для которого $n_A=j$ $(2\leqslant j\leqslant n-1)$ и $1\leqslant\rho(A)\leqslant j-1$. Используя (1), представим (6) в виде

$$B(A)=|A|_{P^{(n-1)}}+(\nu^{(n-1)}_{|A|_{P^{(n-1)}}}-\rho(A))\,P^{(n-1)} \tag{13}$$

и найдем выражение для $\rho(A^D)$, где $A^D=|P^{(n)}-A|_{P^{(n)}}$. В соответствии с (6) имеем

$$\rho(A^D)=\left|-\sum_{i=1}^{n}\left[p_n\frac{|p_i-\alpha_{in}|_{p_i}}{p_i}\right]\right|_{p_n}=\left|-\left(j\,p_n+\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\alpha_{in}\,p_n}{p_i}\right]\right)\right|_{p_n}=$$

$$=\left|-\left(-j-\sum_{i=1}^{n}[\alpha_{in}\,p_n/p_i]\right)\right|_{p_n}, \tag{14}$$

т. е. $\rho(A^D)=|j-\rho(A)|_{p_n}=j-\rho(A)$, причем $1\leqslant\rho(A^D)\leqslant j-1$. Из (2) легко получить

$$\nu^{(n-1)}_{|A^D|_{P^{(n-1)}}}=j-1-\nu^{(n-1)}_{|A|_{P^{(n-1)}}}. \tag{15}$$

Применяя (14) и (15), из (13) находим:

$$B(A^D)=|A^D|_{P^{(n-1)}}+(j-1-\nu^{(n-1)}_{|A|_{P^{(n-1)}}}-j+\rho(A))\,P^{(n-1)}$$

или

$$B(A^D)=|A^D|_{P^{(n-1)}}+(\rho(A)-\nu^{(n-1)}_{|A|_{P^{(n-1)}}}-1)\,P^{(n-1)}. \tag{16}$$

Используя (13) и (16), легко проверить, что числа $B(A)$ и $B(A^D)$ в рассматриваемом случае всегда имеют разные знаки. Следовательно, количества чисел $A\in[0, P^{(n)})$, для которых $n_A=j$ и $\eta(A)=1$ составляет $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\mu_j$. Теорема доказана.

На основе теоремы 2 составлена программа для вычисления $\mu[M_1]$, результаты счета по которой показали, что нормированный ранг числа в СОК совпадает с его неточным значением в среднем для 94—97 % чисел из $[0, P^{(n)})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амербаев В. М. Теоретические основы машинной арифметики.— Алма-Ата, 1976.

2. Коляда А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 1, с. 12.

3. Коляда А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 6.

4. Коляда А. А., Ивашкова Л. Ж.— А. с. 800989 СССР. Устройство определения ранга числа.— Опубл. в БИ, 1981, № 4.

Поступила в редакцию
24.04.80

НИИ ПФП