

$$P_{k,j} = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_{k-j}^T] = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_{k-1-(j-1)}^T] = (I - K_k C_k)(A_{k-1} P_{k-1, j-1} + \bar{A}_{k-1} P_{k-1, N, j-1}) - \sum_{i=1}^N L_{k,i} C_{k-i} (A_{k-1-i} P_{k-1, i, j-1} + \bar{A}_{k-1-i} P_{k-1, N+i, j-1}). \quad (24)$$

Начальные условия:

$$P_{0,j} = 0, \quad j = \overline{0, N}; \quad (25)$$

граничные условия:

$$P_{k,0} = P_k^0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (26)$$

где матрица  $P_k^0$  определяется из уравнения (22) с нулевыми начальными условиями.

Соотношение для  $P_{k,j,i}$  очевидно:

$$P_{k,j,i} = M[\tilde{x}_{k-j} \tilde{x}_{k-i}^T] = M[\tilde{x}_{k-1-(j-1)} \tilde{x}_{k-1-(i-1)}^T] = P_{k-1, j-1, i-1}. \quad (27)$$

Начальные условия:

$$P_{0,j,i} = X_j \delta_j(j-i), \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, N}, \quad X_0 = 0; \quad (28)$$

граничные условия задаются матрицей  $P_{k,i}$ :

$$P_{k,0,i} = P_{k,i}, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Соотношения (5), (6), (9)–(11), (20)–(29) образуют оптимальный дискретный фильтр Калмана для системы (1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E., Bucy R. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory.— Trans. ASME, J. Basic Eng., 1961.

2. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства.— М., 1976.

3. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М., 1976.

Поступила в редакцию  
30.06.80.

Кафедра МОУ

УДК 517.948.32

А. П. ШИЛИН

#### КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, СВОДЯЩАЯСЯ К ТРЕМ ЗАДАЧАМ РИМАНА

Краевая задача типа задачи Римана

$$\sum_{k=0}^l \left[ a_k(t) \frac{d^k \Phi^+(t)}{dt^k} + \int_L A_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] - \sum_{k=0}^p \left[ b_k(t) \frac{d^k \Phi^-(t)}{dt^k} + \int_L B_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^-(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] = f(t), \quad (1)$$

где  $A_k(t, \tau)$  и  $B_k(t, \tau)$  — фредгольмовы ядра, изучена в [1–3]. В указанных работах с помощью различных интегральных представлений искомой функции установлена равносильность задачи (1) интегральному уравнению (полному сингулярному или уравнению Фредгольма), а также дана нижняя оценка числа произвольных постоянных, входящих в решение. Естествен вопрос о выделении частных случаев задачи (1), для которых картина разрешимости была бы более точной, чем в общем случае. Ниже рассмотрен один такой частный случай, сводящийся к трем задачам Римана; решение дается в замкнутой форме. На возможность

выделения этого случая автора натолкнула на мысль работа Ю. И. Черского [4], в которой некоторые интегральные уравнения сводятся к двум задачам Римана. Приведем формулировку задачи.

Пусть  $L$  — простой гладкий замкнутый контур на комплексной плоскости,  $D^+$  и  $D^-$  — его внутренность и внешность соответственно. Считаем, что положительная ориентация контура оставляет  $D^+$  слева и что начало координат принадлежит  $D^+$ . Зададим на контуре  $H$ -непрерывные функции  $a(t) \neq 0$ ,  $b(t) \neq 0$ ,  $c(t) \neq 0$ ,  $f(t)$ . Требуется найти все кусочно-аналитические функции  $\Phi(z)$  по краевому условию (1) на  $L$  при  $l=0$ ,  $p=0$ ,  $a_0(t) = b(t)$ ,  $b_0(t) = -a(t)c(t)$ ,  $A_0(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t}$ ,  $B_0(t, \tau) = \frac{a(t)}{2\pi i} \frac{c(\tau) - c(t)}{\tau - t}$ .

Решение ищется в классе функций, исчезающих на бесконечности. Краевое условие (1) в указанном случае после несложных преобразований может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b(t) \Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Phi^+(\tau) d\tau}{\tau - t} = \\ & = -\frac{1}{2} a(t) c(t) \Phi^-(t) + \frac{a(t)}{2\pi i} \int_L \frac{c(\tau) \Phi^-(\tau) d\tau}{\tau - t} + f(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Введем новые неизвестные кусочно-аналитические функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Phi_2(z)$  по формулам

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Phi^+(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{c(\tau) \Phi^-(\tau) d\tau}{\tau - z}. \quad (3)$$

Теперь краевое условие (2) можно записать в виде задачи Римана

$$\Phi_1^+(t) = a(t) \Phi_2^-(t) + f(t), \quad (4)$$

откуда на основании теории задачи Римана [3]

$$\frac{\Phi_1^+(t)}{b(t)} = \frac{f(t)}{2b(t)} = \frac{X^+(t)}{2\pi i b(t)} \int_L \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{X^+(t) P_{\alpha-1}(t)}{b(t)}, \quad (5)$$

$$\Phi_2^-(t) = -\frac{f(t)}{2a(t)} + \frac{X^+(t)}{2\pi i a(t)} \int_L \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{X^+(t) P_{\alpha-1}(t)}{a(t)}, \quad (6)$$

где  $2\pi\alpha = [\arg a(t)]_L$ ,  $P_{\alpha-1}(t)$  — многочлен степени не выше  $\alpha-1$  с произвольными комплексными коэффициентами,  $P_{\alpha-1}(t) \equiv 0$  при  $\alpha \leq 0$ ,

$$X^+(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln [t^{-\alpha} a(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln [\tau^{-\alpha} a(\tau)]}{\tau - t} d\tau \right\}.$$

При  $\alpha < 0$  для разрешимости задачи (4) необходимы и достаточны условия

$$\int_L \frac{f(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, \dots, -\alpha. \quad (7)$$

Записав по формулам Сохоцкого выражения для плотностей интегралов типа Коши (3), придем еще к двум задачам Римана:

$$\Phi^+(t) = -\frac{1}{b(t)} \Phi_1^-(t) + \frac{\Phi_1^+(t)}{b(t)} \quad (8), \quad \Phi_2^+(t) = c(t) \Phi^-(t) + \Phi_2^-(t), \quad (9)$$

свободные члены которых даются формулами (5) и (6).

Из задачи (8) находим

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_1^+(\tau)}{b(\tau) Y^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + Y(z) Q_{\beta-1}(z), \quad z \in D^+, \quad (10)$$

где  $2\pi\beta = -[\arg b(t)]_L$ ,  $Q_{\beta-1}(z)$  — многочлен степени не выше  $\beta-1$  с произвольными комплексными коэффициентами,  $Q_{\beta-1}(z) \equiv 0$  при  $\beta \leq 0$ ,

$$Y(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \left[ -\frac{\tau^{-\beta}}{b(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau-z} \right\}, \quad z \in D^+.$$

При  $\beta < 0$  для разрешимости задачи (8) необходимы и достаточны условия

$$\int_L \frac{\Phi_1^+(t) t^{m-1} dt}{b(t) Y^+(t)} = 0, \quad m = 1, \dots, -\beta. \quad (11)$$

Из задачи (9) находим

$$\Phi(z) = \frac{z^{-1} Z(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_2^-(\tau)}{Z_2^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} + Z(z) S_{\gamma-1}(z), \quad z \in D^-, \quad (12)$$

где  $2\pi\gamma = [\arg c(t)]_L$ ;  $S_{\gamma-1}(z)$  — многочлен степени не выше  $\gamma-1$  с произвольными комплексными коэффициентами,  $S_{\gamma-1}(z) \equiv 0$  при  $\gamma \leq 0$ ,

$$Z(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln [\tau^{-1} c(\tau)] d\tau}{\tau-z} \right\}, \quad z \in D^+ \cup D^-.$$

При  $\gamma < 0$  для разрешимости задачи (9) необходимы и достаточны условия

$$\int_L \frac{\Phi_2^-(t)}{Z^+(t)} t^{n-1} dt = 0, \quad n = 1, \dots, -\gamma. \quad (13)$$

При  $\alpha > 0$  условия (11), (13) будут представлять собой системы линейных алгебраических уравнений, соответственно

$$\sum_{j=1}^{\alpha} g_{mj} \lambda_j = g_m, \quad m = 1, \dots, -\beta, \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{\alpha} h_{nj} \lambda_j = h_n, \quad n = 1, \dots, -\gamma, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} g_{mj} &= \int_L \frac{X^+(t) t^{m+j-2} dt}{b(t) Y^+(t)}, \quad h_{nj} = \int_L \frac{X^+(t) t^{n+j-2} dt}{a(t) Z^+(t)}, \\ g_m &= - \int_L \frac{f(t) t^{m-1} dt}{2b(t) Y^+(t)} - \int_L \frac{X^+(t) t^{m-1} dt}{2\pi i b(t) Y^+(t)} \int_L \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t}, \\ h_n &= \int_L \frac{f(t) t^{n-1} dt}{2a(t) Z^+(t)} - \int_L \frac{X^+(t) t^{n-1} dt}{2\pi i a(t) Z^+(t)} \int_L \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t}. \end{aligned}$$

Условия разрешимости задачи (2) соберем в следующей теореме.

**Теорема 1.** Для разрешимости задачи (2) необходимо: выполнение условий (7), если  $\alpha < 0$ ; выполнение условий (11), если  $\beta < 0$ , что при  $\alpha > 0$  равносильно совместности системы (14); выполнение условий (13), если  $\gamma < 0$ , что при  $\alpha > 0$  равносильно совместности системы (15); совместность объединенной системы, состоящей из систем (14) и (15), если  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma < 0$ . Одновременное выполнение этих условий при указанных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  является достаточным для разрешимости задачи (2); при  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$  задача (2) разрешима безусловно.

В случае разрешимости задачи (2) формулы (10), (12) дают ее общее решение. При  $\alpha > 0$  через посредство формул (5), (6) в это решение входит многочлен  $P_{\alpha-1}(t) = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j t^{j-1}$ , коэффициенты которого при  $\beta \geq 0$ ,

$\gamma \geq 0$  остаются произвольными, при  $\beta < 0, \gamma \geq 0$  представляют собой общее решение системы (14), при  $\beta \geq 0, \gamma < 0$  — общее решение системы (15), а при  $\beta < 0, \gamma < 0$  — общее решение объединенной системы (14), (15). Обозначим  $r$  ранг системы (14), если  $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma \geq 0$ , системы (15), если  $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma < 0$ , объединенной системы (14), (15), если  $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0$ ; положим  $r = 0$  в остальных случаях.

**Теорема 2.** Число линейно независимых решений однородной задачи (2) равно  $\max\{0, \alpha\} + \max\{0, \beta\} + \max\{0, \gamma\} - r$ .

В самом деле, пусть  $f(t) \equiv 0$ . Если  $\Phi(z) \equiv 0, z \in D^+$ , то  $\Phi^+(t) \equiv 0$  и из краевого условия (8) получим  $\Phi_1^-(t) \equiv \Phi_1^+(t)$ . В силу теоремы об аналитическом продолжении и теоремы Лиувилля  $\Phi_1(z) \equiv 0$ , тогда из формулы (5) следует, что  $P_{\alpha-1}(t) \equiv 0$ , а затем из формулы (10) получаем  $Q_{\beta-1}(t) \equiv 0$ . Аналогично из предположения  $\Phi(z) \equiv 0, z \in D^-$ , получим, что  $P_{\alpha-1}(t) \equiv 0, S_{\gamma-1}(t) \equiv 0$ . Следовательно, ненулевые коэффициенты многочленов  $P_{\alpha-1}(t), Q_{\beta-1}(t), S_{\gamma-1}(t)$  не могут дать линейно зависящие решения однородной задачи (2), что и доказывает теорему 2.

**З а м е ч а н и е.** Если  $\delta(t)$  и  $\omega(t)$  — сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы  $L$  на себя, то краевая задача

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b(t) \Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Phi^+(\tau) \delta'(\tau) d\tau}{\delta(\tau) - \delta(t)} = \\ & = \frac{1}{2} a(t) c(t) \Phi^-(t) - \frac{a(t)}{2\pi i} \int_L \frac{c(\tau) \Phi^-(\tau) \omega'(\tau) d\tau}{\omega(\tau) - \omega(t)} + f(t) \end{aligned}$$

аналогично сводится к трем задачам Газемана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крикунов Ю. М. — Уч. зап. Казанского ун-та, 1952, т. 112, № 10, с. 191.
2. Рогожин В. С. — Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 4, с. 797.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М., 1977.
4. Черский Ю. И. — Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 4, с. 802.

Поступила в редакцию  
13.11.80

Кафедра теории функций

УДК 33.083.722

А. А. КОЛЯДА, Ф. С. ПИЛИПОВЕЦ

#### О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОПРАВКИ АМЕРБАЕВА К НЕТОЧНОМУ РАНГУ ЧИСЛА В СИСТЕМАХ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

В работе доказана в общем виде теорема о нормированном ранге числа в системах остаточных классов (СОК)  $v^{(n)}$  и с ее помощью установлена формула для мощности  $\mu[M_1]$  подмножества  $M_1$  чисел из диапазона СОК, для которых ранг не совпадает с неточным рангом, введенным В. М. Амербаевым. Программная реализация полученной формулы показала, что  $M_1$  составляет незначительную часть диапазона СОК — в среднем 3–6 %.

Рассмотрим систему остаточных классов (СОК) с  $n$  попарно взаимно простыми модулями  $p_1, p_2, \dots, p_n$  и пусть  $(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn})$  — нормированный остаточный код в этой СОК [1, с. 141] числа  $A \in [0, P^{(n)})$ , где

$P^{(n)} = \prod_{i=1}^n p_i, \alpha_{in} = |A| P_{in}^{-1} |p_i| p_i, P_{in} = \frac{P^{(n)}}{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ ; через  $|X|_p$  обозначается остаток от деления числа  $X$  на  $p$ .

Как известно, нормированный ранг  $v^{(n)}$  числа  $A$  (в дальнейшем он называется просто рангом) определяется соотношением: