

мальной (эффективной) по Парето. Для этого достаточно, чтобы точка x^0 совпадала с решением задачи (18) или (19)

$$\begin{cases} f_1(x^0) \rightarrow \min \\ f_2(x^0) \leq f_2(x) \end{cases} \quad (18), \quad \begin{cases} f_2(x^0) \rightarrow \min \\ f_1(x^0) \leq f_1(x) \end{cases} \quad (19)$$

3. Доказательство существования решения. Мы полагали функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывными, монотонными по любому направлению. Тогда функция $\Delta(x) = \frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}$ также будет непрерывной, как разность двух непрерывных функций. Кроме того, на значениях $\bar{x}_i^0$ и $\underline{x}_i^0$ оценка Δ имеет противоположные знаки. Покажем это. Пусть $i=1$.

$$\Delta(\underline{x}_1^0) = \frac{f_1(\underline{x}_1^0) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_2(\underline{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} = - \frac{f_2(\underline{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} \leq 0,$$

$$\Delta(\bar{x}_1^0) = \frac{f_1(\bar{x}_1^0) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_2(\bar{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} = 1 - \frac{f_2(\bar{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} \geq 0.$$

Итак, функция $\Delta(x)$ — непрерывная, на границах односвязного множества принимает значения с противоположными знаками. Следовательно, она принимает значение 0 внутри рассматриваемого множества, т. е. существует такая точка x^0 , что $\Delta(x^0) = 0$. Покажем, что предложенный алгоритм сходится именно к решению задачи (1). Для этого, необходимо доказать, что $\forall \varepsilon > 0, \exists n$, что $\forall m \geq n, |\Delta_{im}| \leq \varepsilon, i=1, 2$. Согласно самому алгоритму, на каждом шаге отрезок, на котором находится минимальное значение рассматриваемой функции, уменьшается вдвое. Причем, каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему. Согласно лемме о вложенных отрезках, все они имеют одну общую точку. Абсцисса этой точки будет доставлять решение уравнению $\Delta(x) = 0$. Так как на каждом последующем отрезке оценка $|\Delta|$ заведомо меньше, чем на предыдущем (см. алгоритм).

Предложенный алгоритм применим на множестве выпуклых функций. При разработке алгоритма для этого класса функций использован тот факт, что каждую выпуклую функцию можно заменить двумя монотонными.

Алгоритм распространен также на случай конечного числа критериев качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М., 1964.
2. Волкович В. Л., Даргейко Л. Ф. — Кибернетика, 1972, № 5.

Поступила в редакцию
30.06.80.

Кафедра МОУ

УДК 62—50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, А. Л. ЛЕБЕДЕВ

ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Постановка задачи. Рассмотрим дискретную систему, состояние которой описывается линейным разностным уравнением с переменными коэффициентами

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + \bar{A}_{k-1}x_{k-1-N} + G_{k-1}\omega_{k-1}, \quad (1)$$

где x_k — n -вектор системы; ω_{k-1} — m -вектор случайных внешних воздействий; A_{k-1} , $\bar{A}_{k-1}$, G_{k-1} — матрицы соответствующих размерностей; N — число точек на отрезке запаздывания.

ω_{k-1} представляет собой дискретный белый шум с нулевым средним значением и известной ковариационной матрицей Q_k , т. е. $M[\omega_k] = 0 \forall k$

и $M[\omega_k \omega_j^T] = Q_k \delta_k(k-j)$, где $\delta_k(k-j) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$, функция Кронекера, а матрица Q_k неотрицательно определена (т. е. допускается $\omega_k \equiv 0$.)

Начальное состояние системы

$$x_0(\cdot) = \{x(t_0) = x_0, x_\mu = \varphi_\mu, \mu = \overline{1, N}\}, \quad (2)$$

где $x_\mu = x(t_0 - \mu\theta)$, а θ — шаг дискретизации, т. е. $\theta = t_k - t_{k-1} \forall k$. В (2) x_0 — случайный вектор с известными статистическими свойствами $M[x_0] = \mu_0$, $M[x_0 x_0^T] = P_{x_0}$, а φ_μ — дискретный белый шум с нулевым средним значением и неотрицательно определенной матрицей X_k .

Пусть в любой момент времени t_k имеется в распоряжении r -мерный выходной сигнал

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (3)$$

где C_k — $(r \times n)$ — матрица наблюдения, которая считается известной, а измерительный шум v_k предполагается белым с нулевым средним значением и положительно определенной ковариационной матрицей R_k .

Случайные помехи в системе, в начальных условиях и в измерительном устройстве считаем независимыми между собой, а также от вектора начального состояния x_0 .

Для описанной математической модели системы ставится задача: найти оценку $\hat{x}_k$ вектора состояния системы в момент t_k в классе линейных оценок. Эта оценка должна быть наилучшей в том смысле, что математическое ожидание суммы квадратов ошибок оценивания принимает минимальное значение. Если под ошибкой оценивания понимать вектор $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$, то оптимальность оценки достигается минимизацией функционала

$$e_k = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N M[\tilde{x}_{k-i}^T \tilde{x}_{k-j}] \rightarrow \min. \quad (4)$$

Поставленная задача является задачей фильтрации (см. [1, 2]).

Вывод уравнения оценивания. В качестве линейной структуры уравнения оценивания возьмем структуру уравнения (1).

Сначала оценку $\hat{x}_k$ будем прогнозировать лишь на основе знания оценок в моменты t_{k-1} и t_{k-1-N} , т. е. без привлечения результатов измерений. Так как шумовая помеха ω_{k-1} не зависит от вектора состояния в моменты t_{k-1} и t_{k-1-N} и имеет нулевое среднее значение, то можно считать, что она не влияет на оценку $\hat{x}_k$. Это означает, что при фильтрации и предсказании наилучшая оценка белого шума с нулевым средним тождественно равна нулю. Тогда оценку естественно прогнозировать в виде

$$\hat{x}'_k = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \bar{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1-N}. \quad (5)$$

Результаты измерения выходного сигнала можно использовать для корректирования данной оценки. Действительно, ожидаемое значение

выходного сигнала равно $\hat{y}_k = C_k \hat{x}'_k$ в момент t_k и $\hat{y}_{k-j} = C_{k-j} \hat{x}'_{k-j}$ в моменты t_{k-j} , $j = \overline{1, N}$. Действительное же значение выходных сигналов в эти моменты равно y_k и y_{k-j} . Теперь введем последовательность «обновляющих» величин (по аналогии с [3]):

$$\tilde{y}_k = y_k - C_k \hat{x}'_k, \quad \tilde{y}_{k-j} = y_{k-j} - C_{k-j} \hat{x}'_{k-j}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Таким образом, можно скорректировать оценку (5), добавляя к ней «обновляющие» величины с соответствующими весовыми коэффициентами. Тогда можно принять окончательную форму уравнения оценивания

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k \tilde{y}_k + \sum_{j=1}^N L_{k,j} \tilde{y}_{k-j}. \quad (6)$$

Матричные коэффициенты усиления K_k и $L_{k,j}$ выбираются из условия минимума функционала (4). Такие матрицы K_k и $L_{k,j}$, при которых функционал (4) принимает минимальное значение, назовем оптимальными коэффициентами усиления.

Анализ соотношений (5), (6) показывает, что в фильтре Калмана реализуется идея предсказания — коррекции. Предыдущие оценки $\hat{x}_{k-1}$, $\hat{x}_{k-1-N}$ экстраполируются на один шаг вперед и затем используются для получения наилучшей оценки нового наблюдения, т. е. для построения $\hat{y}_k$ и $\hat{y}_{k-j}$. Ошибки между наилучшей оценкой текущего наблюдения и фактическими наблюдениями составляют последовательность «обновляющихся» величин. Эти ошибки взвешиваются с весами K_k и $L_{k,j}$ для формирования сигналов коррекции, которые складываются с предсказанной оценкой (5), в результате чего получается новая оценка.

Вывод соотношений для оптимальных коэффициентов усиления. Поскольку очевидным образом выполняется соотношение

$$M[\tilde{x}_k^T \tilde{x}_k] = Sp M[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T], \quad (7)$$

качество оценивания будем характеризовать ковариационной матрицей ошибок оценивания $P_k = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]$. Для вычисления P_k сформируем вектор ошибок $\tilde{x}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k = & A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \bar{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1-N} + K_k (C_k x_k + v_k - C_k A_{k-1} \hat{x}_{k-1} - \\ & - C_k \bar{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1-N}) + \sum_{j=1}^N L_{k,j} [C_{k-j} x_{k-j} + v_{k-j} - C_{k-j} (A_{k-j-1} \hat{x}_{k-j-1} + \\ & + \bar{A}_{k-j-1} \hat{x}_{k-j-N-1})] - A_{k-1} x_{k-1} - \bar{A}_{k-1} x_{k-1-N} = (I - K_k C_k) (A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + \\ & + \bar{A}_{k-1} \tilde{x}_{k-1-N} - G_{k-1} \omega_{k-1}) + K_k v_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} [C_{k-j} (A_{k-j-1} \tilde{x}_{k-j-1} + \\ & + \bar{A}_{k-j-1} \tilde{x}_{k-j-N-1} - G_{k-j-1} \omega_{k-j-1}) - v_{k-j}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее формируем матрицу P_k . Для этого подставим (8) в формулу $P_k = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]$ и воспользуемся тем, что все случайные воздействия, действующие на систему, некоррелированы. Если при этом ввести следующие обозначения:

$$P_{k-1,j} = M[\tilde{x}_{k-1} \tilde{x}_{k-1-j}^T], \quad P_{k-1,j,i} = M[\tilde{x}_{k-1-j} \tilde{x}_{k-1-i}^T], \\ R_{k-j} \delta_j(j-i) = M[v_{k-j} v_{k-i}^T], \quad Q_{k-1-j} \delta_j(j-i) = M[\omega_{k-1-j} \omega_{k-1-i}^T],$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_k = & A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + A_{k-1} P_{k-1,N} \bar{A}_{k-1}^T + \bar{A}_{k-1} P_{k-1,N}^T A_{k-1}^T + \\ & + \bar{A}_{k-1} P_{k-1,N,N} \bar{A}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k,j} = & A_{k-1-j} P_{k-1,j}^T A_{k-1}^T + A_{k-1-j} P_{k-1,N}^T \bar{A}_{k-1}^T + \bar{A}_{k-1-j} P_{k-1,N+j}^T A_{k-1}^T + \\ & + \bar{A}_{k-1-j} P_{k-1,N,N+j}^T \bar{A}_{k-1}^T, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k,j,i} = & A_{k-1-j} P_{k-1,j,i}^T A_{k-1-i}^T + A_{k-1-j} P_{k-1,j,N+i}^T \bar{A}_{k-1-i}^T + \\ & + \bar{A}_{k-1-j} P_{k-1,N+j,i}^T A_{k-1-i}^T + \bar{A}_{k-1-j} P_{k-1,N+j,N+i}^T \bar{A}_{k-1-i}^T + \\ & + G_{k-1-j} Q_{k-1-j} \delta_j(j-i) G_{k-1-i}^T, \end{aligned} \quad (11)$$

то после соответствующих преобразований можно получить следующее соотношение:

$$P_k = \bar{P}_k - K_k C_k \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T L_{k,j}^T \right) - \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} \right) C_k^T K_k^T +$$

$$+ K_k (C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k) K_k^T + \sum_{j=1}^N [L_{k,j} (C_{k-j} \bar{P}_{k,j} C_{k-j}^T + R_{k-j}) L_{k,j}^T - L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} - \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T L_{k,j}^T] + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j,i} C_{k-i}^T L_{k,i}^T. \quad (12)$$

Матрицы $(C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k)$ и $(C_{k-j} \bar{P}_{k,j} C_{k-j}^T + R_{k-j})$ неотрицательно определены и симметричны, что выражается соотношениями

$$S_k S_k^T = C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k, \quad (13)$$

$$S_{k,j} S_{k,j}^T = C_{k-j} \bar{P}_{k,j} C_{k-j}^T + R_{k-j}. \quad (14)$$

В (12) второе — четвертое и пятое слагаемые образуют квадратичные матричные полиномы относительно неизвестных матриц K_k и $L_{k,j}$. Предположим, что существуют такие матрицы D_k и $D_{k,j}$, что возможно следующее дополнение указанных полиномов до полного квадрата:

$$P_k = \bar{P}_k + (K_k S_k - D_k) (K_k S_k - D_k)^T - D_k D_k^T + \sum_{j=1}^N [(L_{k,j} S_{k,j} - D_{k,j}) \times \\ \times (L_{k,j} S_{k,j} - D_{k,j})^T - D_{k,j} D_{k,j}^T] + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j,i} C_{k-i}^T L_{k,i}^T. \quad (15)$$

Раскрыв скобки в (15) и приравняв соответствующие члены членам (12), можно определить матрицы $D_k, D_{k,j}$:

$$D_k = \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} \right) C_k^T (S_k^T)^{-1}, \quad (16)$$

$$D_{k,j} = \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T (S_{k,j}^T)^{-1}. \quad (17)$$

Второе и четвертое слагаемые в (15) — неотрицательно определенные матрицы и, значит, след матрицы P_k принимает минимальное значение, когда они равны нулю, т. е. при

$$K_k S_k = \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} \right) C_k^T (S_k^T)^{-1}, \quad (18)$$

$$L_{k,j} S_{k,j} = \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T (S_{k,j}^T)^{-1}. \quad (19)$$

Учтя (13), (14), будем иметь

$$K_k = \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j} \right) C_k^T (C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k)^{-1}, \quad (20)$$

$$L_{k,j} = \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T (C_{k-j} \bar{P}_{k,j} C_{k-j}^T + R_{k-j})^{-1}. \quad (21)$$

Получение уравнений для матриц $P_k, P_{k,j}, P_{k,j,i}$. Уравнение для P_k получается подстановкой (16) и (17) в (15). В результате несложных преобразований можно получить

$$P_k = (I - K_k C_k) \left(\bar{P}_k - \sum_{j=1}^N \bar{P}_{k,j}^T C_{k-j}^T L_{k,j} \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N L_{k,j} C_{k-j} \bar{P}_{k,j,i} C_{k-i}^T L_{k,i}^T. \quad (22)$$

При выводе (22) следует учесть соотношения (13), (14), (20), (21), а также перестановочность операций транспонирования и обращения матриц. Начальное условие для (22)

$$P_0 = P_\infty. \quad (23)$$

Теперь формируем матрицу $P_{k,j}$, для чего воспользуемся соотношением (8)

$$P_{k,j} = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_{k-j}^T] = M[\tilde{x}_k \tilde{x}_{k-1-(j-1)}^T] = (I - K_k C_k)(A_{k-1} P_{k-1, j-1} + \bar{A}_{k-1} P_{k-1, N, j-1}) - \sum_{i=1}^N L_{k,i} C_{k-i} (A_{k-1-i} P_{k-1, i, j-1} + \bar{A}_{k-1-i} P_{k-1, N+i, j-1}). \quad (24)$$

Начальные условия:

$$P_{0,j} = 0, \quad j = \overline{0, N}; \quad (25)$$

граничные условия:

$$P_{k,0} = P_k^0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (26)$$

где матрица P_k^0 определяется из уравнения (22) с нулевыми начальными условиями.

Соотношение для $P_{k,j,i}$ очевидно:

$$P_{k,j,i} = M[\tilde{x}_{k-j} \tilde{x}_{k-i}^T] = M[\tilde{x}_{k-1-(j-1)} \tilde{x}_{k-1-(i-1)}^T] = P_{k-1, j-1, i-1}. \quad (27)$$

Начальные условия:

$$P_{0,j,i} = X_j \delta_j(j-i), \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, N}, \quad X_0 = 0; \quad (28)$$

граничные условия задаются матрицей $P_{k,i}$:

$$P_{k,0,i} = P_{k,i}, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Соотношения (5), (6), (9)–(11), (20)–(29) образуют оптимальный дискретный фильтр Калмана для системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E., Bucy R. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory.— Trans. ASME, J. Basic Eng., 1961.

2. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства.— М., 1976.

3. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М., 1976.

Поступила в редакцию
30.06.80.

Кафедра МОУ

УДК 517.948.32

А. П. ШИЛИН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, СВОДЯЩАЯСЯ К ТРЕМ ЗАДАЧАМ РИМАНА

Краевая задача типа задачи Римана

$$\sum_{k=0}^l \left[a_k(t) \frac{d^k \Phi^+(t)}{dt^k} + \int_L A_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] - \sum_{k=0}^p \left[b_k(t) \frac{d^k \Phi^-(t)}{dt^k} + \int_L B_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^-(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] = f(t), \quad (1)$$

где $A_k(t, \tau)$ и $B_k(t, \tau)$ — фредгольмовы ядра, изучена в [1–3]. В указанных работах с помощью различных интегральных представлений искомой функции установлена равносильность задачи (1) интегральному уравнению (полному сингулярному или уравнению Фредгольма), а также дана нижняя оценка числа произвольных постоянных, входящих в решение. Естествен вопрос о выделении частных случаев задачи (1), для которых картина разрешимости была бы более точной, чем в общем случае. Ниже рассмотрен один такой частный случай, сводящийся к трем задачам Римана; решение дается в замкнутой форме. На возможность