УДК 62—50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, Л. А. КОЛОБОВА

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Постановка задачи. Большинство практических задач принятия решения, возникающих в экономике, промышленности и военном деле, являются задачами векторной оптимизации [1]. Будем рассматривать задачу векторной оптимизации с двумя критериями качества.

Допустим, требуется изготовить емкость наибольшего объема, вес которой был бы минимальным. Параметры емкости и отпущенный для ее изготовления материал удовлетворяют системе ограничений A. Эта задача имеет следующую математическую модель:

$$\begin{cases} f_1(x) \to \min \\ f_2(x) \to \min \\ x \in A, \ x \in R^n, \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывные, монотонные по любому направлению функции; A — система ограничений, определяющая выпуклое множество.

Заметим, что с математической точки зрения задача векторной оптимизации является некорректной. Обычно в качестве решения задачи векторной оптимизации выбирают множество эффективных точек.

Определение 1. Точку $x^{эф}$ назовем эффективной, если не существует на множестве ограничений задачи (1) таких точек, что $f_i(x) \geqslant f_i(x^{эф})$, $i=1, 2$ и $f_i(x) \neq f_i(x^{эф})$, хотя бы для одного i.

Постановку задачи векторной оптимизации следует уточнить. Правило, в каком смысле понимается решение проблемы, называется принципом выбора решения задачи векторной оптимизации. Принцип выбора заключается в постановке одной или ряда математических корректных задач оптимизации, решение которых и принимается в качестве решения задачи векторной оптимизации. Откорректируем сформулированную выше математическую модель задачи векторной оптимизации следующим образом.

Определение 2. Эффективную точку x^0 назовем решением задачи (1), если она удовлетворяет соотношению

$$\frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} = \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}, \tag{2}$$

где $m_{11} = f_1(\underline{x}_1^0)$, $M_{11} = f_1(\bar{x}_1^0)$, $m_{21} = f_2(\underline{x}_2^0)$, $M_{21} = f_2(\bar{x}_2^0)$, а $\underline{x}_1^0$, $\bar{x}_1^0$, $\underline{x}_2^0$, $\bar{x}_2^0$— решения задач, соответственно (3)—(6).

$$\begin{cases} f_1(x) \to \min \\ x \in A \end{cases} \quad (3), \qquad \begin{cases} f_1(x) \to \max \\ x \in A \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f_2(x) \to \min \\ x \in A \end{cases} \quad (5), \qquad \begin{cases} f_2(x) \to \max \\ x \in A \end{cases} \quad (6)$$

Соотношение (2) является условием, регулирующим относительные потери различных критериев.

При такой постановке задачи дополнительным требованием к изготовителям могут быть следующие: уменьшение объема на одну относительную единицу соответствует уменьшению веса на одну относительную единицу (или на k, или не менее, чем на k единиц). Тогда в качестве корректирующих можно выбрать такия условия:

$$k \cdot \frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} = \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}, \quad \frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} \leqslant k \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}, \quad k = \mathrm{const}.$$

Условие (2) уже использовалось в литературе для определения понятия оптимального решения задачи векторной оптимизации [2]. Числа m_{i1},

M_{i1} $(i=\overline{1,\ 2})$ могут быть выбраны из практических соображений, учитывая смысл задачи (например, исходя из предполагаемого решения задачи).

Определение 3. Функцию $f(x)$, $x \in R^n$ назовем монотонной по любому направлению, если функция $f(x+\varepsilon l)$ является монотонной по ε для любого l и $\varepsilon > 0$.

2. Алгоритм решения. Предлагаемый алгоритм решения задачи вида (1) основан на итеративной процедуре, в ходе которой решаются параллельно две задачи с единственным критерием качества и проводится поэтапное получение информации об отклонении текущего плана от оптимального решения. Отыскание решения задачи основано на методе деления отрезка пополам.

Решение задачи (1) заменяем решением задач

$$\begin{cases} f_1(x) \to \min \\ f_2(x) \leqslant \dfrac{m_{2j}+M_{2j}}{2} \\ x \in A \end{cases} \qquad (7), \qquad \begin{cases} f_2(x) \to \min \\ f_1(x) \leqslant \dfrac{m_{1j}+M_{1j}}{2}, \\ x \in A \end{cases} \qquad (8)$$

где $j=\overline{1,\ N}$ — номер итерации. Пусть x^0_{1j}, x^0_{2j} — соответственно решения задач (7) и (8). Введем обозначения:

$$\Delta(x) = \frac{f_2(x)-m_{11}}{M_{11}-m_{11}} - \frac{f_2(x)-m_{21}}{M_{21}-m_{21}}, \qquad (9)$$

$$\overline{\Delta}_{11} = \Delta(\overline{x}^0_1),\ \underline{\Delta}_{11} = \Delta(\underline{x}^0_1),\ \overline{\Delta}_{21} = \Delta(\overline{x}^0_2),\ \underline{\Delta}_{21} = \Delta(\underline{x}^0_2), \qquad (10)$$

$$\Delta_{1j} = \Delta(x^0_{1j}),\ \Delta_{2j} = \Delta(x^0_{2j}). \qquad (11)$$

Из всех подсчитанных оценок выбираем для каждого i минимальную по абсолютной величине:

$$\min\{|\overline{\Delta}_{ij}|,\ |\underline{\Delta}_{ij}|,\ |\Delta_{ij}|\} = \Delta^0_{ij},\quad i=\overline{1,\ 2} \qquad (12)$$

Возможны следующие случаи. 1) $\Delta^0_{ij} \neq \Delta_{ij}$. В задаче (7) (или (8)) знак в дополнительном ограничении меняем на противоположный и вновь решаем полученную задачу.

2) $\Delta^0_{ij} = \Delta_{ij}$. Определяем знак текущей оценки Δ_{ij}, $i=\overline{1,\ 2}$ и в зависимости от него пересчитываем верхнюю $(\overline{\Delta}_{ij})$ и нижнюю $(\underline{\Delta}_{ij})$ оценки, наибольшее (M_{ij}) и наименьшее (m_{ij}) значения функции на данной итерации j. Новые значения вычисляются по формулам (13) и (14):

$$\operatorname{sgn}\Delta_{ij} = \operatorname{sgn}\overline{\Delta}_{ij},\ \text{тогда}\ \overline{\Delta}^{\text{H}}_{ij+1} = \Delta_{ij},\ M^{\text{H}}_{ij+1} = f_i(x^0_{ij}),$$

$$\underline{\Delta}^{\text{H}}_{ij+1} = \underline{\Delta}_{ij},\ m^{\text{H}}_{ij+1} = m_{ij}, \qquad (13)$$

$$\operatorname{sgn}\Delta_{ij} \neq \operatorname{sgn}\overline{\Delta}_{ij},\ \text{тогда}\ \overline{\Delta}^{\text{H}}_{ij+1} = \overline{\Delta}_{ij},\ M^{\text{H}}_{ij+1} = M_{ij},$$

$$\underline{\Delta}^{\text{H}}_{ij+1} = \Delta_{ij},\ m^{\text{H}}_{ij+1} = f_i(x^0_{ij}), \qquad (14)$$

переходя к следующей итерации, решаем задачи

$$\begin{cases} f_1(x) \to \min \\ f_2(x) \leqslant \dfrac{m^{\text{H}}_{2j}+M^{\text{H}}_{2j}}{2} \\ x \in A \end{cases} \qquad (15), \qquad \begin{cases} f_2(x) \to \min \\ f_1(x) \leqslant \dfrac{m^{\text{H}}_{1j}+M^{\text{H}}_{1j}}{2} \\ x \in A \end{cases} \qquad (16)$$

Решение задач вида (15), (16) продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено соотношение (2) или условие субоптимальности (17):

$$|\Delta_{ij}| \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ i=\overline{1,\ 2},\ j=\overline{1,\ N}. \qquad (17)$$

Вектор x^0, на котором выполняется условие (2) или (17), назовем условно эффективной точкой.

Для того, чтобы определить, является ли условно эффективная точка решением задачи (1), необходимо проверить, является ли эта точка оптимальной (эффективной) по Парето. Для этого достаточно, чтобы точка x^0 совпадала с решением задачи (18) или (19)

$$\begin{cases} f_1(x^0) \to \min \\ f_2(x^0) \leqslant f_2(x) \end{cases} \quad (18), \qquad \begin{cases} f_2(x^0) \to \min \\ f_1(x^0 \leqslant f_1(x). \end{cases} \quad (19)$$

3. Доказательство существования решения. Мы полагали функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывными, монотонными по любому направлению. Тогда функция $\Delta(x) = \frac{f_1(x) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_2(x) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}}$ также будет непрерывной, как разность двух непрерывных функций. Кроме того, на значениях $\bar{x}_i^0$ и $\underline{x}_i^0$ оценка Δ имеет противоположные знаки. Покажем это. Пусть $i=1$.

$$\Delta(\underline{x}_1^0) = \frac{f_1(\underline{x}_1^0) - m_{11}}{M_1 - m_{11}} - \frac{f_2(\underline{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} = -\frac{f_2(\underline{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} \leqslant 0,$$

$$\Delta(\bar{x}_1^0) = \frac{f_1(\bar{x}_1^0) - m_{11}}{M_{11} - m_{11}} - \frac{f_2(\bar{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} = 1 - \frac{f_2(\bar{x}_1^0) - m_{21}}{M_{21} - m_{21}} \geqslant 0.$$

Итак, функция $\Delta(x)$ — непрерывная, на границах односвязного множества принимает значения с противоположными знаками. Следовательно, она принимает значение 0 внутри рассматриваемого множества, т. е. существует такая точка x^0, что $\Delta(x^0)=0$. Покажем, что предложенный алгоритм сходится именно к решению задачи (1). Для этого, необходимо доказать, что $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n$, что $\forall\, m \geqslant n$, $|\Delta_{im}| \leqslant \varepsilon$, $i=1, 2$. Согласно самому алгоритму, на каждом шаге отрезок, на котором находится минимальное значение рассматриваемой функции, уменьшается вдвое. Причем, каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему. Согласно лемме о вложенных отрезках, все они имеют одну общую точку. Абсцисса этой точки будет доставлять решение уравнению $\Delta(x)=0$. Так как на каждом последующем отрезке оценка $|\Delta|$ заведомо меньше, чем на предыдущем (см. алгоритм).

Предложенный алгоритм применим на множестве выпуклых функций. При разработке алгоритма для этого класса функций использован тот факт, что каждую выпуклую функцию можно заменить двумя монотонными.

Алгоритм распространен также на случай конечного числа критериев качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.— М., 1964.
2. Волкович В. Л., Даргейко Л. Ф.— Кибернетика, 1972, № 5.

Поступила в редакцию 30.06.80.

Кафедра МОУ

УДК 62—50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, А. Л. ЛЕБЕДЕВ

ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Постановка задачи. Рассмотрим дискретную систему, состояние которой описывается линейным разностным уравнением с переменными коэффициентами

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + \bar{A}_{k-1}x_{k-1-N} + G_{k-1}w_{k-1}, \quad (1)$$

где x_k — n-вектор системы; w_{k-1} — m-вектор случайных внешних воздействий; A_{k-1}, $\bar{A}_{k-1}$, G_{k-1} — матрицы соответствующих размерностей; N — число точек на отрезке запаздывания.

w_{k-1} представляет собой дискретный белый шум с нулевым средним значением и известной ковариационной матрицей Q_k, т. е. $M[w_k]=0\ \forall\, k$