

$$F_k(\xi) = B_k(\xi) + \text{голоморфная функция при } \xi \rightarrow 0, \quad (21)$$

$$\text{где } B_0(\xi) = \frac{R\bar{\Gamma}'}{\xi^2} + \frac{m_\infty}{\xi},$$

$$B_1(\xi) = R \left[\frac{1}{\xi^2} \left(\Gamma + l\Gamma + \frac{n_0 \bar{m}_\infty}{R} + l a_{-2}^{(0)} \right) + \frac{2}{\xi^3} \left(n_0 \Gamma + \frac{1}{R} l_0 \bar{m}_\infty \right) + \frac{3}{\xi^4} l_0 \Gamma \right], \quad (22)$$

$$B_k(\xi) = R l_0 \bar{a}_{-2}^{(k)} \xi^{-2} \quad (k \geq 2),$$

где $a_{-2}^{(k)}$, $a_{-3}^{(k)}$ — произвольные постоянные коэффициенты.

Зная выражения функций $F_k(\xi)$ и $\Omega_k(\xi, \bar{\xi})$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$), значения компонентов напряжения на контуре L найдем по формулам (14), считая

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k F_k(\xi) [\omega'(\xi)]^{-1}, \quad \Omega = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \Omega^{(k)}. \quad (23)$$

Преобразуя формулы (14), как указано выше, можно найти компоненты напряжения $M_p^{(k)}, \dots, N_\theta^{(k)}$ на L для каждого из приближений F_k и $\Omega^{(k)}$ функций $F(\xi)$ и $\Omega(\xi, \bar{\xi})$. Аналогично решается задача при заданных на контуре L функциях w, u_p, u_θ .

Другим методом решение аналогичной задачи, основанное на общих формулах Э. Рейсснера [8] и некоторых родственных ей задач моментной теории упругости дано в работах [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М., 1966.
2. Савин Г. Н., Прусов И. А.— ПМ, 1969, т. 5, вып. 6.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М., 1973.
4. Угодников А. Г., Соболева В. А. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в плитах по теории Рейсснера.— ПМ, 1972, т. 8, вып. 6.
5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит.— Минск, 1975.
6. Карцивадзе И. Н.— Сообщ. АН Груз. ССР, 1946, т. 7, № 8.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1963.
8. Reissner E.— J. Math. and Phys., 1944, v. 23, № 1.

Поступила в редакцию
06.03.80

Кафедра теоретической механики

УДК 518:517(944)947

П. А. ВАКУЛЬЧИК

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим смешанную задачу для системы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varphi \left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где $U = \{u^1, u^2, \dots, u^n\}$, $\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$ — векторы, а матрица $A =$

$$= A \left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \left\| \frac{\partial \varphi^i \left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial \left(\frac{\partial u^j}{\partial x} \right)} \right\|, \quad i, j = \overline{1, n} \quad \text{удовлетворя-$$

ет условию гиперболичности [1]. Пусть, не ограничивая общности, собственные значения $\xi^i = \xi^i\left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$ матрицы A занумерованы так, что $\xi^i \leq 0$, $i = \overline{1, n_0}$, $n_0 \leq n$; $\xi^i > 0$, $i = \overline{n_0 + 1, n}$. При $t = 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассмотрим начальные условия

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad (2)$$

где $U_0 = \{u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n\}$ — вектор. Граничные условия пусть заданы на отрезке $0 \leq t \leq T$ прямых $x = 0$, $x = 1$ и имеют вид

$$L(x, t)U(x, t) = \psi(x, t), \quad (3)$$

где $\psi = \{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n\}$ — вектор, а матрица $L(x, t)$ порядка $n \times n$ удовлетворяет требованиям корректности [1]—[3] граничных условий (3) для системы (1). Это позволяет систему граничных условий (3) на каждой из границ представить следующим образом:

$$\begin{aligned} u^i(0, t) &= \sum_{j=n_0+1}^n \alpha^{ij}(0, t) u^j(0, t) + \beta^i(0, t), \quad i = \overline{1, n_0}, \\ u^i(1, t) &= \sum_{j=1}^{n_0} \alpha^{ij}(1, t) u^j(1, t) + \beta^i(1, t), \quad i = \overline{n_0 + 1, n}, \end{aligned} \quad (3')$$

где α^{ij} , β^i ($i, j = \overline{1, n}$) — некоторые функции, определяемые через элементы матрицы L и компоненты вектора ψ . Предположим, что в прямоугольнике $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ существует достаточно гладкое решение задачи (1) — (3').

На сетке $\omega_{h\tau}$ рассмотрим регуляризованную [4] разностную схему

$$\bar{Y}_t - \tau A(\bar{Y}, Y_x) Y_{tx} = \varphi(\bar{Y}, Y_x) \quad (4), \quad Y(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}^i|_{x=0} &= \sum_{j=n_0+1}^n \hat{\alpha}^{ij} \hat{y}^j + \hat{\beta}^i|_{x=0}, \quad i = \overline{1, n_0}, \\ \hat{y}^i|_{x=1} &= \sum_{j=1}^{n_0} \hat{\alpha}^{ij} \hat{y}^j + \hat{\beta}^i|_{x=1}, \quad i = \overline{n_0 + 1, n}, \end{aligned} \quad (6)$$

которая аппроксимирует исходную задачу с погрешностью $O(h^2 + \tau)$.

Для исследования сходимости разностной схемы (4) — (6) рассмотрим ее погрешность $Z = U - Y$, которая удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t - \tau A\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) Z_{tx} &= \left[\varphi\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \varphi(\bar{Y}, Y_x) \right] - \tau \left[A\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \right. \\ &\quad \left. - A(\bar{Y}, Y_x) \right] Z_{tx} + \tau \left[A\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) - A(\bar{Y}, Y_x) \right] U_{tx} + r, \end{aligned} \quad (7)$$

$$Z(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad (8)$$

$$\hat{z}^i|_{x=0} = \sum_{j=n_0+1}^n \hat{\alpha}^{ij} \hat{z}^j|_{x=0}, \quad i = \overline{1, n_0}; \quad \hat{z}^i|_{x=1} = \sum_{j=1}^{n_0} \hat{\alpha}^{ij} \hat{z}^j|_{x=1}, \quad i = \overline{n_0 + 1, n}. \quad (9)$$

Здесь $r = O(h^2 + \tau)$ — погрешность аппроксимации разностной схемы (4). Умножив обе части (7) на матрицу $M = \{\{l^{ij}\}\}$ левых собственных векторов A , придем к инвариантной форме записи задачи (7) — (9) для погрешности. Рассмотрим систему положительно определенных в Ω функций $\mu_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Уравнения с номером i каждой из инвариантных систем (7) — (9) умножим на функцию $\mu_i(x)$. Тогда для $v^i = \mu_i(x) \sum_{j=1}^n l^{ij} \left(U, \frac{\partial U}{\partial x} \right) z^j(x, t)$, $x, t \in \omega_{h\tau}$ получим следующую разностную задачу:

$$\bar{v}_t^i - \tau \xi^i\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) v_{tx}^i = \xi^i\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) v_x^i +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{\mu_i}{\mu_j} b^{ij} \bar{v}^j + 0(\bar{V}) 0(V_x) + r^i,$$

$$\bar{v}^i(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad i = \overline{1, n}, \quad \hat{v}^i|_{x=0} = \sum_{j=n_0+1}^n \hat{\alpha}^{*ij} \frac{\mu^i}{\mu_j} \hat{v}^j|_{x=0}, \quad i = \overline{1, n_0},$$

$$\hat{v}^i|_{x=1} = \sum_{j=1}^{n_0} \hat{\alpha}^{*ij} \frac{\mu^i}{\mu_j} \hat{v}^j|_{x=1}, \quad i = \overline{n_0+1, n}.$$

Здесь $\{\{b^{ij}\}\} = \{\{l^{ij}\}\} \{\{b^{ij}\}\}$, $\{\{b^{ij} = \left\{\left\{\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}\right\}\right\}; \quad i, j = 1, n; \quad 0(\bar{V})$ и $0(V_x)$ указывают на величины порядка малости $\bar{V}$ и V_x соответственно, элементы $\{\{\alpha^{*ij}\}\}$ легко определяются через элементы $\{\{l^{ij}\}\}$ и $\{\{\alpha^{ij}\}\}$. Доказательство сходимости разностной схемы будем проводить, используя метод энергетических неравенств и теоремы вложения [5, 6]. Справедлива

Лемма. Систему функций $\mu_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ можно выбрать так, что в граничных точках сетки ω_h будут справедливы неравенства:

$$\sum_{i=1}^n \xi^i (v^i)^2|_{x=0} \geq C_1 \sum_{i=1}^{n_0} (v^i)^2|_{x=0}, \quad C_1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \xi^i (v^i)^2|_{x=1} \geq C_1 \sum_{i=n_0+1}^n (v^i)^2|_{x=1},$$

$$\sum_{i=1}^n \xi^i (v_i^i)^2|_{x=0} \geq C_2 \sum_{i=1}^{n_0} (v_i^i)^2|_{x=0}, \quad C_2 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \xi^i (v_i^i)^2|_{x=1} \geq C_2 \sum_{i=n_0+1}^n (v_i^i)^2|_{x=1}.$$

Из-за громоздкости выкладок доказательство леммы мы опускаем. Учитывая полученные неравенства, а также используя оценки, аналогичные [4], можно доказать следующую теорему о сходимости разностной схемы (4) — (6).

Теорема. Пусть решение исходной задачи в Ω существует, единственно и обладает гладкостью, которая обеспечивает погрешность аппроксимации порядка $0(\tau + h^2)$. Кроме того, элементы матриц $A\left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$ и $\xi\left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$ дважды непрерывно дифференцируемы по компонентам $\{u^i\}$, $\left\{\frac{\partial u^i}{\partial x}\right\}$ ($i = \overline{1, n}$) и непрерывно дифференцируемы по x и t . Тогда при достаточно малых h и τ и таких, что $(\tau + h^2)^2 \tau^{-1} h^{-1} \rightarrow 0$, решение, полученное по разностной схеме /4/ — /6/, сходится к решению исходной задачи, при этом порядок сходимости совпадает с порядком погрешности аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. — М., 1978.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М., 1971.
3. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М., 1972.
4. Абрашин В. Н., Вакульчик П. А. — Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1975, № 5, с. 125.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М., 1977.
6. Абрашин В. Н. — Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 2.

Поступила в редакцию
17.06.80

Кафедра вычислительной
математики