УДК 620.179.14

Ю. И. ДОРОГОВ, Б. А. ЛУЧЕВСКИЙ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ФЕРРОМАГНИТНОМ ЦИЛИНДРЕ

В сообщении [1] изложена методика приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения, описывающего зависимость напряженности магнитного поля в ферромагнитном полупространстве от параметров ферромагнетика и намагничивающего поля с учетом вихревых токов и петли гистерезиса, на основе которой получены выражения, пригодные для расчета параметров некоторых гармонических составляющих напряженности магнитного поля и магнитной индукции в полупространстве и на его поверхности.

Однако для решения ряда прикладных задач определенный интерес представляет рассмотрение этого вопроса применительно к ферромагнитному цилиндру, поскольку цилиндрическая форма деталей и узлов из ферромагнитных материалов встречается достаточно широко, а в литературе рассмотрены только некоторые частные случаи.

В настоящей работе задача сформулирована следующим образом. На однородный изотропный бесконечный ферромагнитный цилиндр с постоянной электропроводностью σ и переменной магнитной проницаемостью $\mu = f(H)$ действует гармоническое магнитное поле $H = H_m \cos \omega t$. Требуется получить аналитические зависимости параметров основной и некоторых высших гармонических составляющих напряженностей магнитного и электрического полей, магнитной индукции и ЭДС в катушке, намотанной непосредственно (без зазора) на цилиндр, от характеристик ферромагнетика и намагничивающего поля. В качестве исходного применено уравнение, полученное из системы уравнений Максвелла:

$$\Delta H = \sigma \frac{\partial B}{\partial t}. \tag{1}$$

Задача решалась в круговой цилиндрической системе координат. Ось z была совмещена с осью цилиндра, учитывалась его симметрия. В качестве начальных и граничных условий приняты:

$$H(r, t)\,|_{r=R} = H_m \cos \omega t; \; H(r, t)\,|_{r=0} = 0, \tag{2}$$

где r — текущая координата радиуса цилиндра.

С учетом записанного уравнение (1) можно представить в развернутом виде:

$$H''(r) + \frac{1}{r} H'(r) - \sigma \mu_d H'(t) = 0. \tag{3}$$

где $H''(r)$, $H'(r)$, $H'(t)$ — вторая и первые производные соответственно; $\mu_d = \frac{\partial B}{\partial H}$ — дифференциальная магнитная проницаемость по петле гистерезиса.

После подстановки выбранного значения μ_d (формула (3) [2]) в (3) и выполнения необходимых преобразований, согласно принятой методике, получены уравнения для 1-й и 3-й гармоник напряженности магнитного поля в 1-ом приближении:

$$H_1'(r) + \frac{1}{r} H_1'(r) - i\omega \delta \mu_d^0 H_1(r) = 0; \tag{4}$$

$$H_3''(r) + \frac{1}{r} H_3'(r) - 3i\omega \delta \mu_d^0 H_3(r) + \frac{1}{q}\left[H_1''(r) + \frac{1}{r} H_1'(r) - \right.$$

$\left. - i\omega \delta \mu_r H_1(r)\right] H_1^2(r) = 0$, μ_d^0, q, μ_r — см. [2]; вводятся обозначения:

$$\omega \delta \mu_d^0 = k^2; \; \omega \delta \mu_r = k_1^2.$$

Выражение для 1-й гармоники напряженности магнитного поля представляет собой известное уравнение Бесселя первого рода нулевого порядка от аргумента вида $(i^{3/2}kr)$. Решение такого уравнения с учетом граничного условия (2) имеет вид:

$$H_1(r) = \frac{H_m j_0(i^{3/2}kr)}{2j_0(i^{3/2}kR)}, \qquad (5)$$

где $J_0(i^{3/2}kr)$, $J_0(i^{3/2}kR)$ — функции Бесселя.

Уравнение для 3-й гармоники напряженности магнитного поля (4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, для которого известно решение соответствующего однородного уравнения.

Методом вариации постоянных [3] из уравнения (4) получена формула для $H_3(r)$ в общем виде:

$$H_3(r) = \frac{H_m^3 J_0(i^{3/2}kr)}{8_q J_0^3(i^{3/2}kR)} \int_r^R \frac{J_0^2(i^{3/2}k\varphi)}{J_0'(i^{3/2}3k\varphi)} [J_0''(i^{3/2}k\varphi) + \frac{1}{r} J_0'(i^{3/2}k\varphi) -$$

$$- ik_1^2 J_0(i^{3/2}k\varphi)]\, d\varphi, \qquad (6)$$

где φ — переменная интегрирования.

Согласно принятой методике, в 1-ом приближении учитывалось только действие низших гармоник на высшие, т. е. 1-й на 3-ю. Во втором приближении учитывалось взаимодействие 1-й и 3-й гармоник. При этом получается следующая система уравнений:

$$H_{12}''(r) + \frac{1}{r} H_{12}'(r) - ik^2 H_{12}(r) + \frac{1}{q}\Big\{2H_{-1}(r)H_1(r)[H_1''(r) + \frac{1}{r}H_1'(r) -$$

$$- ik_1^2 H_1(r)] + H_1^2(r)[H_{-1}''(r) + \frac{1}{r}H_{-1}'(r) + ik_1^2 H_{-1}(r)] + H_{-1}^2(r)[H_3''(r) +$$

$$+ \frac{1}{r}H_3'(r) - 3ik_1^2 H_3(r)] + 2H_{-1}(r)[H_{-1}''(r) + \frac{1}{r}H_{-1}(r) + ik_1^2 H_{-1}(r)]\Big\} = 0.$$

$$H_{32}''(r) + \frac{1}{r}H_{32}'(r) - 3ik^2 H_3(r) + \frac{1}{q}\Big\{H_1^2(r)[H_1''(r) + \frac{1}{r}H_1'(r) - ik_1^2 H_1(r)] + \qquad (7)$$

$$+ H_3^2(r)[H_{-3}''(r) + \frac{1}{r}H_{-3}'(r) + 3ik_1^2 H_{-3}(r)] + 2H_{-1}(r)H_1(r)[H_3''(r) +$$

$$+ \frac{1}{r}H_3'(r) - 3ik_1^2 H_3(r)] + 2H_{-1}(r)H_3(r)[H_1''(r) + \frac{1}{r}H_1'(r) - ik_1^2 H_1(r)] +$$

$$+ 2H_{-3}(r)H_3(r)[H_3''(r) + \frac{1}{r}H_3'(r) - 3ik_1^2 H_3(r)]\Big\} = 0,$$

где $H_1(r)$, $H_{-1}(r)$, $H_3(r)$, $H_{-3}(r)$ — значения соответствующих гармоник в 1-ом приближении.

Уравнения (7) решаются тем же методом вариации постоянных. В общем виде эти решения в работе не приводятся, поскольку они чрезвычайно громоздки и непосредственно не интегрируются. Ниже рассматривается наиболее существенный для прикладных целей, по нашему мнению, частный случай, когда аргумент функции Бесселя $|kr|$ очень велик, т. е. имеет место ярко выраженный скин-эффект. При этом условии функции Бесселя и их производные могут быть аппроксимированы известным образом [4]. После замены функций Бесселя и их производных в решениях уравнений (7) и выполнения необходимых преобразований и упрощений, которые внесли ошибку менее 5 %, получены следующие выражения для гармоник напряженности магнитного поля в ферромагнитном цилиндре:

$$H_{11}(r, t) = H_m \exp[k/\sqrt{2}(r - R)] \cos[\omega t + k/\sqrt{2}(r - R)];$$

$$H_{31}(r, t) \approx -\frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} c(\mu) \Big\{\exp[\sqrt{3}k/\sqrt{2}(r - R)] \cos[3\omega t + \sqrt{3}k/\sqrt{2} \times$$

$$\times (r-R) - \frac{R}{r}\exp[3k/\sqrt{2}(r-R)]\cos[3\omega t + 3k/\sqrt{2}(r-R)];$$

$$H_{12}(r,\ t) \approx H_m \left\{ \left[1 - \frac{H_m^2}{2H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^4}{16H_{cm}^4} c^2(\mu) \right] \exp[k/\sqrt{2}(r-R)] + \right.$$

$$\left. + \frac{H_m^2}{2H_{cm}^2} c(\mu) \frac{R}{r} \exp[3k/\sqrt{2}(r-R)] \right\} \cos[\omega t + k/\sqrt{2}(r-R)] -$$

$$- H_m \left\{ \left[\frac{H_m^2}{4H_{cm}^2} c(\mu) - \frac{H_m^4}{7H_{cm}^4} c^2(\mu) \exp[k/\sqrt{2}(r-R)] - \frac{H_m^2}{4H_{cm}^2} c(\mu) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \frac{R}{r} \exp[3k/\sqrt{2}(r-R)] \right\} \sin[\omega t + k/\sqrt{2}(r-R)]; \qquad (8)$$

$$H_{32}(r,\ t) \approx - \frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} c(\mu) \left\{ \left[1 + \frac{H_m^2}{3H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^6}{9H_{cm}^6} c^3(\mu) \right] \exp[\sqrt{3}k/\sqrt{2} \times \right.$$

$$\times (r-R)] + \frac{H_m^6}{64H_{cm}^6} c^3(\mu) \frac{R}{r} \exp[3\sqrt{3}k/\sqrt{2}(r-R)] + \frac{H_m^2}{H_{cm}^2} c(\mu) \frac{R}{r} \times$$

$$\left. \times \exp[(\sqrt{3}+2)k/\sqrt{2}(r-R)] \right\} \cos[3\omega t + \sqrt{3}k/\sqrt{2}(r-R)] - \frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} \times$$

$$\times c(\mu) \left\{ \frac{H_m^6}{16H_{cm}^6} c^3(\mu) \exp[\sqrt{3}k/\sqrt{2}(r-R)] + \frac{H_m^6}{64H_{cm}^6} c^3(\mu) \exp[3\sqrt{3}k/\sqrt{2} \times \right.$$

$$\left. \times (r-R)] \right\} \sin[3\omega t + \sqrt{3}k/\sqrt{2}(r-R)] + \frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} c(\mu) \left\{ \frac{R}{r} \exp[3k/\sqrt{2}(r - \right.$$

$$- R)] + \frac{H_m^2}{H_{cm}^2} c(\mu) \frac{R^2}{r^2} \exp[5k/\sqrt{2}(r-R)] + \frac{H_m^6}{64H_{cm}^6} c^3(\mu) \frac{R^2}{r^2} \exp[(3 +$$

$$\left. + 2\sqrt{3})k/\sqrt{2}(r-R)] \right\} \cos[3\omega t + 3k/\sqrt{2}(r-R)] + \frac{H_m^3}{4H_{cm}^2} c(\mu) \times$$

$$\times \left\{ \frac{H_m^6}{64H_{cm}^6} c^3(\mu) \exp[(\sqrt{3}+2)k/\sqrt{2}(r-R)] + \frac{H_m^6}{21H_{cm}^6} c^3(\mu) \frac{R^4}{r^4} \times \right.$$

$$\left. \times \exp[9k/\sqrt{2}(r-R)] \right\} \sin[3\omega t + 3k/\sqrt{2}(r-R)].$$

Из (8) можно, используя известные уравнения Максвелла, вывести формулы соответствующих гармонических составляющих электрического поля, магнитной индукции и индуктированной ЭДС как внутри цилиндра, так и на его поверхности. Ниже, для примера, приведены выражения для амплитуд гармоник магнитной индукции и индуктированной ЭДС во 2-ом приближении:

$$B_{12m} \approx H_m \mu_d^0 \left[1 - \frac{H_m^2}{2H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^4}{2H_{cm}^4} c^2(\mu) - \frac{H_m^6}{16H_{cm}^6} c^3(\mu) + \ldots \right];$$

$$B_{32m} \approx \frac{H_m^3}{2H_{cm}^2} c(\mu) \mu_d^0 \left[1 + \frac{H_m^2}{6H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^4}{64H_{cm}^4} c^2(\mu) + \frac{H_m^6}{32H_{cm}^6} c^3(\mu) + \ldots \right];$$

$$Э_{12m} \approx 2\pi RWH_m \sqrt{\omega\rho\mu_d^0} \left[1 - \frac{H_m^2}{2H_{cm}^2} c(\mu) - \frac{H_m^4}{32H_{cm}^4} c^2(\mu) - \ldots \right]; \qquad (9)$$

$$Э_{32m} \approx \pi RW \frac{H_m^3}{H_{cm}^2} c(\mu) \sqrt{\omega\rho\mu_d^0} \left[1 + \frac{H_m^2}{4H_{cm}^2} c(\mu) + \frac{H_m^4}{24H_{cm}^4} c^2(\mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{H_m^6}{24H_{cm}^6} c^3(\mu) + \frac{H_m^8}{26H_{cm}^8} c^4(\mu) + \ldots \right];$$

где W — постоянная обмотки.

Сравнительный анализ выражений для гармонических составляющих напряженности магнитного поля, магнитной индукции и индуктированной ЭДС в ферромагнитных бесконечном цилиндре и полупространстве показывает, что при наличии ярко выраженного скин-эффекта эти выражения имеют идентичную структуру и совпадают с точностью до постоянных множителей. Этот факт дает серьезные основания для того, чтобы считать принятую в работе методику пригодной для проведения соответствующих расчетов как для ферромагнитного полупространства, так и для бесконечного ферромагнитного цилиндра.

Полученные результаты имеют и практическое значение. Так, из уравнений (9), используя известное выражение В. К. Аркадьева, описывающее связь между магнитными проницаемостями тела и вещества, можно получить формулы для гармоник, например, ЭДС для случая, когда длина и диаметр цилиндра одного порядка. При этом, с учетом только первых слагаемых, выражения для амплитуд 1-й и 3-й гармоник имеет вид:

$$Э_{12m} \approx 2\pi RWH_m \sqrt{\omega\rho \frac{1}{N}}; \quad Э_{32m} \in \pi RW \frac{H_m^3}{H_{cm}^2} c(\mu) \sqrt{\omega\rho \frac{1}{N}}. \qquad (10)$$

Анализ уравнений (10) показывает, что магнитные свойства ферромагнетика влияют только на амплитуды 3-й (и более высоких) гармоник (коэффициенты $l_n(\mu)$), что позволяет с помощью гармонического анализа осуществлять многопараметровый контроль качества. Эксперименты подтвердили справедливость этого вывода для деталей цилиндрической [5] и плоской [6] формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 1, с. 3.
2. Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 2, с. 29.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике.— М.—Л., 1945.
4. Двайт Т. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы.— М., 1948.
5. Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А.— Промышленность Белоруссии, 1975, № 2, с. 93.
6. Лучевский Б. А., Писаренко Л. З., Русаков И. А.— Литейное производство, 1979, № 3, с. 8, 9.

Поступила в редакцию
12.05.80

Кафедра радиотехники, радиофизики и физической электроники