## ЛИТЕРАТУРА

1. Сыноров В. Ф. и др. Физические основы надежности интегральных схем / Под ред. Ю. Г. Миллера. М., 1976.

2. Fischer J. S.- In: Proc. 1968 Electron. Compon. Conf., 1968, p. 229.

 Parisi G. I.— Insulation. / Circuits, 1970, v. 16, N 6, p. 27.
 Werner J. K., Worobey W.— In: 22nd E. C. C., Washington, D. C., 1972, New York, 1972, p. 362.

1012, 1012, р. 602. 5. Клоцман С. М. ндр.— ФММ, 1963, т. 16, вып. 6, с. 895. 6. Harrison L. G.— Trans. Faraday Soc., 1961, v. 57, р. 1191. 7. Колешко В. М., Белицкий В. Ф. Массоперенос в тонких пленках.— Минск, 1980. 8. Hall P. M. and Morabito J. M.— Thin Solid Films, 1978, v. 53, N 2, p. 175.

9. Fischer J. S.— J. Appl. Phys., 1951, v. 22, N 1, р. 74. 10. Бокштейн Б. С. Диффузия в металлах. М., 1978.

Поступила в редакцию 05.01.81.

Кафедра раднофизики и электроники СВЧ

УЛК 621.382.82.001

## С. Г. МУЛЯРЧИК. И. И. АБРАМОВ

## АЛГОРИТМ ДВУМЕРНОГО ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА БИПОЛЯРНЫХ ТРАНЗИСТОРОВ

При проектировании полупроводниковых компонентов интегральных схем все большее применение находят физико-топологические модели, в основе которых лежит численное решение уравнений непрерывности для дырок и электронов, а также уравнения Пуассона. Одной из таких задач является двумерный статический анализ биполярных транзисторов, однако затраты машинного времени для ее решения известными методами оказываются достаточно большими [1].

В статье предлагается новый алгоритм двумерного статического анализа биполярных транзисторов, позволяющий значительно сократить затраты машинного времени. Основу алгоритма составляет разработанная методика расчета «хорошего» начального приближения для концентраций дырок и электронов и для электростатического потенциала по всей структуре прибора, которые в дальнейшем уточняются с помощью итераций типа Гуммеля [2].

Математическая модель задачи после нормировки всех переменных [3] имеет вид:

$$\nabla^2 \psi = n - p - C_N,\tag{1}$$

$$\nabla \vec{j}_p = -R_p, \tag{2}$$

$$\nabla i_n = R_n \tag{3}$$

со вспомогательными уравнениями переноса

$$j_p = -\mu_p \cdot p \cdot \nabla \Phi_p, \tag{4}$$

$$\vec{j}_n = -\mu_n \cdot n \cdot \nabla \Phi_n \tag{5}$$

и в случае статистики Больцмана соотношениями

$$n = \exp(\psi - \Phi_n), \ p = \exp(\Phi_p - \psi), \tag{6}$$

где  $\psi$  — электростатический потенциал; n, p — концентрации электронов и дырок; C<sub>N</sub> — концентрация некомпенсированной донорной примеси; j<sub>p</sub>, j<sub>n</sub> — векторы плотностей дырочного и электронного токов; R<sub>p</sub>, R<sub>n</sub> скорости рекомбинации для дырок и электронов; µ<sub>p</sub>, µ<sub>n</sub> — подвижности дырок и электронов; Ф<sub>p</sub>, Ф<sub>n</sub> — квазиуровни Ферми для дырок и электронов.

При этом в качестве модели для подвижностей µ<sub>p</sub> и µ<sub>n</sub> использовалась формула работы [4]. Скорости рекомбинации описывались с помощью модели Шокли — Рида — Холла [5], нормированный вид которой:

$$R = R_{\rho} = R_{n} = \frac{p \cdot n - 1}{\tau_{n} \left( p + 1 \right) + \tau_{\rho} \left( n + 1 \right)},$$
(7)

где  $\tau_p$ ,  $\tau_n$  — времена жизни дырок и электронов.

Рассмотрим предлагаемую методику выбора начального приближения для *n*, *p* и ψ. Прежде всего воспользуемся квазиравновесным предположением [6], которое с учетом уравнений (4) и (5) можем записать

$$\nabla \Phi_p \approx 0, \tag{8}$$

$$\nabla \Phi_n \approx 0. \tag{9}$$

В биполярных приборах это условие хорошо выполняется для основных носителей, поэтому при определении начального приближения для квазиуровней Ферми основных носителей будем пользоваться уравнениями (8) и (9).

Преобразуем теперь уравнение непрерывности, к примеру (2), таким образом, чтобы из него можно было определить приближение для квазиуровня Ферми неосновных носителей, в рассматриваемом случае — дырок. Подставив (4) в (2) и учтя тот факт, что всегда  $\mu_p \cdot p > 0$ , получим:

$$\nabla^2 \Phi_{\rho} = \frac{R}{\mu_{\rho} \cdot \rho} - \nabla \ln \left( \mu_{\rho} \cdot \rho \right) \cdot \nabla \Phi_{\rho}. \tag{10}$$

Будем полагать в (10), что

$$\left|\nabla \ln\left(\mu_{p} \cdot p\right) \cdot \nabla \Phi_{p}\right| \ll \left|\nabla^{2} \Phi_{p}\right|. \tag{11}$$

Условие (11) является более общим по сравнению с (8), так как неравенство в (11) обеспечивается не только малостью  $\nabla \Phi_p$ , но и малостью величины  $\nabla \ln(\mu_p \cdot p)$ .

Тогда уравнение непрерывности для неосновных носителей — дырок, можно аппроксимировать

$$\nabla^2 \Phi_p \approx \frac{R}{\mu_p \cdot p} \tag{12}$$

и аналогично для электронов

$$\nabla^2 \Phi_n \approx -\frac{R}{\mu_n \cdot n}.$$
 (13)

Однако использование (12) и (13) для определения  $\Phi_p$  и  $\Phi_n$  пока затруднено, так как в эти уравнения, как это следует из (6), входит электростатический потенциал. Рассмотрев две предельные ситуации, например, для уравнения (12), нормированный вид которых 1)  $p \cdot n \gg 1$  и  $n \gg p$ , 2)  $p \cdot n \rightarrow 1$  и  $p \rightarrow 0$ , получим с учетом (7) следующую аппроксимацию этого уравнения:

$$\nabla^2 \Phi_{\rho} \approx \frac{1}{\tau_{\rho} \cdot \mu_{\rho o}}.$$
(14)

По аналогии:

$$\nabla^2 \Phi_n \approx -\frac{1}{\tau_n \cdot \mu_{no}}.$$
(15)

В этих уравнениях µ<sub>po</sub>, µ<sub>no</sub> — подвижности дырок и электронов в случае слабых полей.

Теперь начальное приближение для квазиуровней Ферми основных и неосновных носителей определяется путем решения линейных уравнений, соответственно (8), (9) и (14), (15) при стандартных граничных условиях [1]:

1)  $\Phi_n = \Phi_p = V_{mp}$  — на омических контактах;

2) 
$$\frac{d \Phi_n}{d N} = \frac{d \Phi_p}{d N} = 0$$
 — на других границах,

где V<sub>пр</sub> — прикладываемое к контакту внешнее напряжение; *N* — нормаль к соответствующей границе.

Области основных и неосновных носителей определяются при этом по знаку функции  $C_N$ .

Следующий этап методики определения начального приближения для *n*, *p*,  $\psi$  — это расчет начального приближения для  $\psi$  путем решения уравнения Пуассона с нелинейной правой частью:

$$\nabla^2 \psi = f_1 \cdot \exp\left(\psi\right) - f_2 \cdot \exp\left(-\psi\right) - C_N,\tag{16}$$

где  $f_1 = \exp(-\Phi_n)$ ,  $f_2 = \exp(\Phi_p)$  становятся известными после решения задачи определения начального приближения для  $\Phi_n$  и  $\Phi_p$ . Граничные условия при решении (16) имеют следующий вид:

1) 
$$\psi = V_{\Pi P} + \operatorname{sign} \{C_N\} \cdot \ln \left[ \sqrt{\left(\frac{C_N}{2}\right)^2 + 1 + \frac{|C_N|}{2}} \right] -$$
на омических

контактах;

2)  $\frac{d\Psi}{dN} = 0$  — на других границах.

В качестве начального приближения для ψ при решении (16) методом Ньютона используются значения, определяемые из соотношения

$$\psi = \Phi + \operatorname{sign} \{C_N\} \cdot \ln \left[ \sqrt{\left(\frac{C_N}{2}\right)^2 + 1 + \frac{|C_N|}{2}} \right],$$

где  $\Phi = \Phi_n$  для областей, в которых *n* являются основными носителями и  $\Phi = \Phi_p$  для оставшихся областей. Это соотношение получено из предположения квазинейтральности по всей структуре прибора.



И последний этап в расчете начального приближения: по найденным значениям  $\psi$ ,  $\Phi_n$ ,  $\Phi_p$  из (6) определяются приближения для n и p.

Далее осуществляется численное решение полной системы уравнений (1)—(3) относительно переменных  $n, p, \psi$  с использованием итераций Гуммеля в виде:

1) решение конечно-разностных аналогов уравнений (2) и (3) на разностной сетке относительно n и p при фиксированном  $\psi$ ;

2) решение квазилинеаризованного конечно-разностного аналога уравнения (1) на разностной сетке относительно  $\psi$  при фиксированных *n* и *p*.

Эти итерации повторяются до полной сходимости итерационного процесса. В качестве критерия сходимости используется критерий неизменности выходного тока.

C <sub>E</sub>	C <sub>B</sub>	c <sub>C</sub>	Aı	$A_2$	В
см <sup>-3</sup>	см <sup>—3</sup>	см <sup>—3</sup>	мкм <sup>—1</sup>	мкм <sup>—1</sup>	0,1646272
5.10 <sup>20</sup>	5 · 10 <sup>18</sup>	5 · 10 <sup>16</sup>	7,008592	2,298513	

Параметры профиля легирования

13

Изложенный алгоритм реализован в программе двумерного анализа биполярных транзисторов для ЕС ЭВМ на языке ФОРТРАН-IV, названной СОТДАВ. При разностной аппроксимации задачи использовалась интегральная формулировка типа Шарфеттера — Гуммеля [7]. Для решения всех систем линейных алгебраических уравнений использовался циклический метод Чебышева [8].



Рис. З. Рассчитанные вольт-амперные характеристики (1 — ток коллектора, 2 — ток базы) и кривая 3, характеризующая соответствующие вычислительные затраты (Vнб= = 1 B

Приведем некоторые результаты расчета по программе СОТДАВ биполярного транзистора (рис. 1) с профилем легирования  $C_N(x, y) = C_E \cdot \exp(-A_1 \sqrt{x^2 + x^2})$  $+B^2 \overline{y^2} - C_B \exp(-A_2 x) + C_C$ параметры которого приведены в таблице (размеры структуры указаны в мкм). Времена жизни тл и тр полагались равными 50 нс. Bce величины вычислялись B узлах неравномерной сетки с количеством точек 33×26.

На рис. 2 приведены графики максимального изменения потенциала на различных итерациях Гуммеля при трех внешних напряжениях смещения V<sub>эб</sub>. Рассчитанные вольт-амперные характеристики прибора, а также затраты на расчет соответствующих точек ВАХ, оцениваемые количеством N<sub>ит</sub> итераций Гуммеля (кривая 3), приведены на рис. З (распределение электростатического потенциала, концентраций дырок и электронов, плотностей токов по структуре не приводятся ввиду их сложности).

Из рис. 2 следует, что скорость сходимости алгоритма «типа квадратичной» при средних и низких уровнях инжекции, что нехарактерно для алгоритма Гуммеля при использовании традиционно-

го начального приближения. Так, к примеру, в работе [9] указывается, что при смещении  $V_{36} = -0.75$  В и  $V_{\kappa 5} = 0.5$  В требуется около 120 итераций Гуммеля (в этом эксперименте J<sub>к</sub> ≈ 0,3 A/см).

Разработанный алгоритм может быть положен в основу программ анализа более сложных интегрированных структур, так как характеризуется высокой скоростью сходимости и экономичен, как и алгоритм Гуммеля, по требуемым объемам памяти.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Носов Ю. Р., Петросянц К. О., Шилин В. А. Математические модели элементов интегральной электроники.— М., 1976. 2. Gummel H. K.— IEEE Trans., 1964, v. ED-11, № 10, p. 455. 3. Petersen O. G., Rikoski R. A., Cowles W. W.— Solid-State Electronics,

1973, v. 16, № 2, p. 239.

4. Caughey D. M., Thomas R. F.- Proc. IEEE, 1967, v. 55, № 12, p. 2192.

5. Shockley W., Read W.— Phys. Rev., 1952, v. 87, № 9, p. 835.

6. Миддлбрук Р. Введение в теорию транзисторов.— М., 1960. 7. Sharfetter D. L., Gummel H. K.— IEEE Trans., 1969, v. ED-16, № 1, р. 64.

8. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.— М., 1975. 9. Slotboom J. W.— IEEE Trans, 1973, v. ED-20, № 8, р. 669.

Поступила в редакцию 16.03.80 Кафедра радиофизики и электроники СВЧ

14