

ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 1
ЯНВАРЬ

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Громенко Г. И., Лойко В. И. Привлечение задачи Герца для анализа распределения напряжений в плоском твердом теле при деформации сферическими иглами	3
Гайсенко В. А., Коява В. Т., Попечиц В. И., Саржевский А. М. Расчет функции флуктуационного распределения флуоресцентных центров в полярном растворе по частотам чисто электронного перехода	5
Некрашевич И. Г., Смирнов А. В., Баринов В. Н. Приэлектродные явления в импульсном вакуумном разряде	9
Кухто Т. В., Шумейко Н. М. Электромагнитные поправки к поляризационной асимметрии в глубококонепругом IN -рассеянии	14
Абдулин А. З., Безбородов В. С., Бубель О. Н., Минько А. А., Рачкевич В. С. Мезоморфные свойства некоторых производных бензойной и коричной кислот	22
Рудницкий А. С. Расчет объемных калейдоскопических резонаторов методом разделения переменных с учетом свойств симметрии	29
Прокошин В. И., Шепелевич В. Г. Термоэлектрический коэффициент мощности деформированных сплавов $Bi-12 \text{ ат.}\% \text{ Sb}$	35
Емельяненко В. И. О нониусном преобразовании сигналов	37

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Воюш В. И., Дравица В. И., Змитрович А. И., Мелешко Ю. П., Сабаная Н. В. Автоматизация проектирования процедур работы с базами данных	40
Леваков А. А. Некоторые свойства многозначных отображений и одна теорема существования решений дифференциальных включений	45
Садовский А. П. Существование голоморфного преобразования специального вида в случае центра	48
Люлькин А. Е. Один подход к вычислению подмножеств эквивалентных не-исправностей логической схемы	49
Калитин Б. С. Некоторые признаки ограниченности решений	53
Веремчук И. А. Стационарная фильтрация в многослойной анизотропной области с точечным стоком	55
Новиков Я. А. Алгебраическое построение имплективной нормальной формы	57
Гахович А. С. Оригиналы Лапласа — Эйлера со степенной особенностью нецелого типа в нуле	60
Кравцов М. К., Кашинский Ю. И. О структуре множества допустимых решений транспортной задачи с запретами	64

ХРОНИКА

Иосиф Степанович Пятосин (К 100-летию со дня рождения)	69
Аннотации депонированных статей	70

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<u>Владимир Васильевич Изох</u>	77
---	----

Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО (главный редактор),
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (ответственный секретарь), В. С. ГРИГОРЬЕВ, И. И. ЖБАНКОВА, В. Г. ИВАШИН, В. Г. РУДЬ
(зам. главного редактора), А. М. САРЖЕВСКИЙ, А. Е. СУПРУН, И. Г. ТИЩЕНКО

Редакционная коллегия серии:

А. М. САРЖЕВСКИЙ (ответственный редактор),
Ю. С. БОГДАНОВ (зам. ответственного редактора), В. И. ВЕДЕРНИКОВ, Е. С. ВОРОПАЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Е. А. ИВАНОВ, В. В. ИЗОХ, Л. И. КОМАРОВ, А. И. КОМЯК,
Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ,
Б. Ю. ХАНОХ (ответственный секретарь), А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, С. С. ШУШКЕВИЧ

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия 1, Физ., мат. и мех., 1982, № 1

Редактор И. П. Стрельченко
Художественный редактор Л. Г. Медведева
Технический редактор и корректор Г. И. Хмарун

Сдано в набор 21.10.81. Подписано в печать 06.01.82. АТ 14601. Формат 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 7,51. Тираж 855 экз. Заказ 547.

Издательство Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. 220018, Минск, проспект Машерова, 11.

Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, ул. Бобруйская, 7, телефон 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

© Вестник БГУ имени В. И. Ленина, 1982.

УДК 621.382.23

Г. И. ГРОМЕНКО, В. И. ЛОЙКО

ПРИВЛЕЧЕНИЕ ЗАДАЧИ ГЕРЦА ДЛЯ АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ СФЕРИЧЕСКИМИ ИГЛАМИ

Зависимость электрических свойств твердых тел от анизотропной деформации обычно объясняют влиянием давления на исследуемый образец [1—3]. Однако при этом не принимается во внимание изменение распределения напряжений при изменении условий деформирования на поверхности и в объеме исследуемого тела, вызванных этим давлением. Отсутствие такого учета, по нашему мнению, является одной из причин несоответствия экспериментальных результатов теоретическим моделям.

Рассмотрим наиболее распространенный случай деформации тел сферическими иглами (инденторами), когда микротвердость иглы $H_{\text{и}}$ равна или несколько больше микротвердости твердого тела $H_{\text{п}}$. Расчет распределения давления на поверхности соприкасающихся изотропных тел может быть выполнен по известной из теории упругости [4] формуле

$$F(x) = \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{1 - \frac{2x^2}{a^2}} \quad \text{при } 2x^2 < a^2, \quad (1)$$

где a — радиус поверхности давления,

$$a = (PR)^{1/3} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{1 - \nu_{\text{п}}^2}{E_{\text{п}}} + \frac{1 - \nu_{\text{и}}^2}{E_{\text{и}}} \right) \right]^{1/3}; \quad (2)$$

P — нагрузка на иглу; x — текущая координата, совпадающая по направлению с радиусом поверхности давления; R — радиус закругления иглы; $E_{\text{п}}$ и $E_{\text{и}}$ — модули Юнга плоского тела и иглы $\nu_{\text{п}}$ и $\nu_{\text{и}}$ коэффициенты Пуассона.

Из уравнения (1) следует, что максимальное давление возникает в центре поверхности давления (при $x \rightarrow 0$):

$$F_0 = 3P/2\pi a^2. \quad (3)$$

Если приравнять максимальное давление F_0 к величине микротвердости плоского твердого тела $H_{\text{п}}$ и определить допустимую нагрузку на иглу $P_{\text{кр}}$, то в области нагрузок $P < P_{\text{кр}}$ справедливо уравнение (1), которое отражает зависимость распределения давления на границе соприкасающихся тел, т. е. поверхности тела. Однако в большинстве случаев исследуемая активная область расположена в объеме полупроводника на определенной глубине z (считая от поверхности). Рассмотрим полубесконечное тело, ограниченное плоскостью XOY , на которое действует давление $F(x)$. В результате давления сферической иглы на плоскость XOY в теле возникнут нормальные σ_z и касательные τ_{rz} напряжения, описываемые следующими зависимостями [5]:

$$\sigma_z = F(x) \left[-1 + \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right], \quad (4)$$

$$\tau_{rz} = \frac{F(x)}{2} \left[\frac{1-2\nu_{\Pi}}{2} + \frac{z(1+\nu_{\Pi})}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)^3 \right]. \quad (5)$$

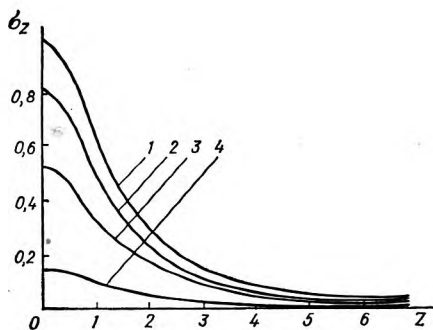


Рис. 1. Распределение нормальных σ_z напряжений:

1 — $x=0$; 2 — $x=0,4$; 3 — $x=0,6$; 4 — $x=0,7$

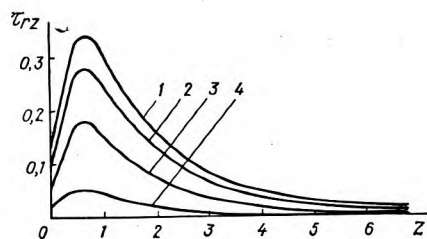


Рис. 2. Распределение касательных τ_{rz} напряжений. Пояснение то же, что и к рис. 1

Распределение напряжений σ_z (рис. 1) по глубине тела и радиусу области давления построено с помощью уравнения (4). За единицу измерения σ_z принято максимальное давление, равное F_0 . За единицу измерения z принимается значение a . Из рис. 1 следует, что распределение нормальных напряжений в изотропном полубесконечном теле убывает по глубине в интервале значений $0 \leq z < \infty$ и в направлении радиуса поверхности давления в интервале $0 \leq x \leq 0,71a$. Наибольшее нормальное напряжение $\sigma_{\max}$ в рассматриваемом случае возникает в центре области давления (кривая 1) и резко убывает при удалении от границы раздела соприкасающихся тел, принимая на глубине $z=6a$ значение $0,04F_0$.

Аналогичным образом построим распределение касательных напряжений, используя уравнение (5), в котором положим, например, для кремния $\nu_{\Pi}=0,26$ [6]. Из приведенной на рис. 2 зависимости видно, что максимальное касательное напряжение для точки $z=0,64a$ достигает значения

$$\tau_{\max} \cong F_0/2,9. \quad (6)$$

Если учесть, что модуль сдвига G для твердых тел связан с модулем упругости E соотношением

$$G = E/2(1+\nu) \quad (7)$$

и положить $\nu_{\Pi} = 0,26$, то получим

$$G_{\Pi} = E_{\Pi}/2,5. \quad (8)$$

Из выражений (3), (6) и (8) следует, что пластическая деформация скольжением слоев в плоском деформируемом теле на глубине $z=0,64a$, может протекать при давлении $F_0 \geq H_{\Pi}$. Геометрические размеры плоского тела и радиус закругления иглы существенно влияют на расхождение теоретических и экспериментальных результатов. Приведенное на рис. 1,2 распределение напряжений справедливо только для полубесконечных кристаллов. Однако, как следует из рисунков, для образцов конечной толщины можно выбрать радиус деформирующей иглы таким образом, чтобы отношение толщины плоского тела h к радиусу поверхности давления a имело значение

$$h_{\Pi}/a > 6.$$

В этом случае экспериментальное значение распределения нормальных напряжений по глубине тела будет отличаться от теоретического менее чем на 5%, а отклонение экспериментальных и теоретических значений касательных напряжений будет не хуже 3,0%.

Таким образом, для согласования экспериментальных и теоретических результатов при изучении деформации плоского твердого тела сферическими иглами следует учитывать распределение максимальных нормальных и касательных напряжений, которое существенно зависит от упругих свойств и геометрических размеров деформирующей иглы.

Авторы выражают благодарность Ю. В. Василевичу за консультацию по теории упругости и В. Ф. Стельмаху за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полякова А. Л., Шкловская-Корди В. В.—ФТТ, 1966, т. 8, № 1, с. 208.
2. Султанов Н. А., Усманов К. У.—ФТП, 1975, т. 9, № 8, с. 1544.
3. Горюнова О. Ф.—Электронная техника. Сер. 2, 1969, № 4/471, с. 15.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости.—М.—Л, 1947, с. 464.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.—М., 1975, с. 576.
6. Воронкова Е. М., Гречушников Б. Н., Дистлер Г. И., Петров И. П. Оптические материалы для инфракрасной техники.—М., 1965, с. 336.

Поступила в редакцию
10.11.78.

НИИ ПФП

УДК 535.372

В. А. ГАЙСЕНКО, В. Т. КОЯВА,
В. И. ПОПЕЧИЦ, А. М. САРЖЕВСКИЙ

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ ФЛУКТУАЦИОННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЛУОРЕСЦЕНТНЫХ ЦЕНТРОВ В ПОЛЯРНОМ РАСТВОРЕ ПО ЧАСТОТАМ ЧИСТО ЭЛЕКТРОННОГО ПЕРЕХОДА

Спектрально-люминесцентные свойства полярных растворов дипольных молекул во многом определяются функцией $\rho(\nu)$ распределения примесных центров, поглощающих или излучающих свет, по частотам чисто электронного перехода. При расчетах спектральных характеристик $\rho(\nu)$ выбирается достаточно произвольно [1—3], в связи с чем такие расчеты носят обычно иллюстративный характер и возникают трудности при сопоставлении их с экспериментом.

В работе [4] для измерения функции $\rho(\nu)$ предложен так называемый метод двойного сканирования спектров. Одним из основных недостатков его является необходимость проведения измерений при температурах жидкого гелия для уменьшения однородного уширения спектров, а также обязательная флуоресцентная способность растворов.

В общем случае задача нахождения функции распределения $\rho(\nu)$ решена в [5]. Однако и эта методика не нашла практического применения при исследованиях люминесценции полярных растворов, что связано с решением некорректной задачи [6] или с необходимостью измерения большого количества параметров.

В данной работе предлагается более простой приближенный метод нахождения функции распределения $\rho(\nu)$ для жестких растворов.

Будем исходить из предположения, что форма «элементарного» спектра поглощения известна и не меняется от центра к центру. Тогда суммарный спектр поглощения раствора $B(\nu)$, представляющий собой суперпозицию «элементарных» спектров, определяется выражением:

$$B(\nu) = \int_0^{\infty} \rho(\nu_0) b(\nu - \nu_0) d\nu_0, \quad (1)$$

где $\rho(\nu_0)$ — функция распределения частот центров тяжести «элементарных» спектров поглощения $b(\nu - \nu_0)$.

Найдем связь между моментами суммарного спектра поглощения и функции распределения. Предположим, что нулевой момент (площадь) «элементарного» спектра нормирован на единицу. Так как $\rho(\nu_0)$ по опре-

делению нормирована таким же образом, то и суммарный спектр раствора $B(\nu)$ будет нормирован на единицу.

Для первого момента спектра поглощения B_1 по определению можно записать:

$$B_1 = \int_0^{\infty} \nu d\nu \int_0^{\infty} \rho(\nu_0) b(\nu - \nu_0) d\nu_0. \quad (2)$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} \nu b(\nu - \nu_0) d\nu = \nu_0, \quad (3)$$

и так как ν_0 есть первый момент (центр тяжести) нормированного «элементарного» спектра, то

$$B_1 = \rho_1, \quad (4)$$

где ρ_1 — момент первого порядка функции $\rho(\nu_0)$.

Рассмотрим далее центральные моменты $\bar{B}_k$ ($k=2, 3, \dots$) спектра поглощения раствора. По определению

$$\bar{B}_k = \int_0^{\infty} (\nu - \rho_1)^k d\nu \int_0^{\infty} \rho(\nu_0) b(\nu - \nu_0) d\nu_0. \quad (5)$$

Представим (5) в виде

$$\bar{B}_k = \sum_{i=0}^k C_k^i \int_0^{\infty} (\nu - \nu_0)^i (\nu_0 - \rho_1)^{k-i} d\nu \int_0^{\infty} \rho(\nu_0) b(\nu - \nu_0) d\nu_0, \quad (6)$$

где C_k^i — коэффициенты бинома, и выполним интегрирование вначале по ν , а затем по ν_0 . В результате получим:

$$\bar{B}_k = \sum_{i=0}^k C_k^i \bar{b}_i \bar{\rho}_{k-i}, \quad (7)$$

где $\bar{b}_i$, $\bar{\rho}_i$ — центральные моменты «элементарного» спектра и функции распределения, соответственно.

Таким образом, зная моменты суммарного спектра и центральные моменты «элементарного» спектра поглощения, по формулам (4) и (7) можно вычислить моменты функции распределения. Вид самой функции далее определяется по формуле Эджворта, которая использовалась в следующем представлении:

$$\rho(\nu_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left[1 + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad (8)$$

где

$$x = \frac{\nu_0 - \rho_1}{\sigma}, \quad (9)$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{\rho}_2}, \quad (10)$$

$H_n(x)$ — полиномы Эрмита порядка n , а коэффициенты α_n определяют из условия:

$$\bar{\rho}_k = \frac{\sigma^{k-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left[1 + \sum_{n=3}^k \alpha_n H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] dx. \quad (11)$$

На практике при изучении неоднородно уширенных спектров растворов сложных дипольных молекул для вычисления функции $\rho(\nu_0)$ достаточно ограничиться пятью-шестью моментами, так как более высокие моменты описывают положение локальных экстремумов (структуру) определяемой функции, которых функция $\rho(\nu_0)$, по-видимому, не имеет. Кроме того, за счет ошибок измерений моменты высших порядков опре-

деляются с весьма невысокой точностью, так что их использование может привести не к улучшению, а к ухудшению точности расчетов.

Основная трудность в определении функции $\rho(\nu_0)$ по описанному методу заключается в определении формы «элементарного» спектра. Приближенно ее можно определить через «элементарный» спектр флуоресценции, предполагая, что он зеркально симметричен «элементарному» спектру поглощения [7].

Исследования положения и формы спектров флуоресценции в зависимости от температуры и частоты возбуждающего света для полярных растворов флуоресцентных молекул показали, что в случае возбуждения флуоресценции на низкочастотном краю суммарного спектра поглощения в охлажденных растворах спектр испускания имеет минимальную полуширину [8, 9], т. е. можно считать, что при таком возбуждении затрагиваются центры, у которых ν_0 меняется в небольших пределах. Использование лазерного возбуждения еще в большей степени снимает неоднородное уширение спектров [10, 11]. Полученные таким способом спектры флуоресценции можно считать, с некоторой степенью приближения, «элементарными». Аналогичные экспериментальные данные, получаемые для спектров возбуждения [8, 9, 12], позволяют сделать вывод, что при определенных условиях эксперимента их можно отождествить с «элементарными» спектрами поглощения. Основным недостатком определения формы «элементарного» спектра поглощения указанным способом, так же как и методом двойного сканирования [4], является необходимость работы с низкотемпературными растворами и наличие у них флуоресценции.

Второй, более предпочтительный путь — считать, что спектры поглощения в неполярных растворителях, где ориентационное уширение практически отсутствует [13], являются «элементарными». В этом случае снимаются ограничения, накладываемые на рассмотренный метод нахождения формы «элементарного» спектра. Но при этом возникают трудности, связанные с растворимостью дипольных молекул в неполярных растворителях. Тем не менее, для большинства объектов исследования, которые используются для проверок теорий неоднородно уширенных спектров, данный подход, как нам кажется, вполне оправдан.

На рис. 1 представлены спектры поглощения растворов 3-амино-N-метилфталимида в некоторых жидких растворителях, а на рис. 2 — в твердой матрице поливинилового спирта ПВС. Концентрация красителя не превышала 10^{-5} моль/л, что исключало концентрационные эффекты, связанные с ассоциацией молекул. На этих же рисунках изображены

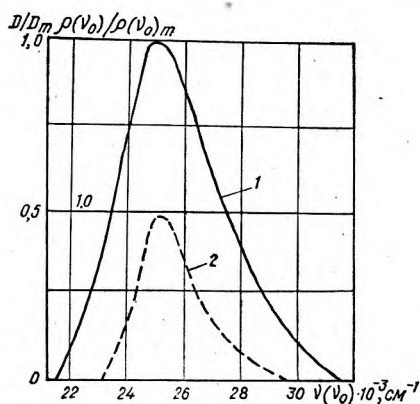
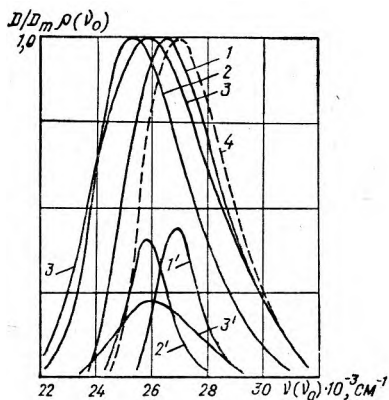


Рис. 1. Спектры поглощения D/D_m (1—4) и нормированные по площади функции распределения $\rho(\nu_0)$ (1'—3') жидких растворов 3-амино-N-метилфталимида в толуоле (1, 1'), этиловом спирте (2, 2'), воде (3, 3') и гексане (4) при температуре 20°C

Рис. 2. Спектр поглощения D/D_m (1) и функция распределения $\rho(\nu_0)/\rho(\nu_0)_m$ (2) для твердого раствора 3-амино-N-метилфталимида в ПВС

Характеристики исследованных растворов

Растворитель	ΔD , см ⁻¹	$\frac{\Delta D_{\Pi}-\Delta D_{\Pi'}}{\Delta D_{\Pi'}}$, см ⁻¹	$\Delta \rho(v_0)$, см ⁻¹
Гексан	3460	—	0
p-Ксилол	3680	220	1350
Этиловый спирт	3800	340	1400
П В С	4400	940	2400
Дистиллированная вода	4700	1240	3000

рассчитанные по формулам (4), (7) и (8) функции флукутационного распределения флуоресцентных центров по частотам центра тяжести спектра поглощения $\rho(v_0)$. В качестве «элементарного» спектра поглощения использован спектр поглощения исследуемого люминофора в гексане. Расчет функции $\rho(v_0)$ проводился по ее первым четырем моментам на ЭВМ ЕС-1022.

Как видно из рисунков (см. также таблицу), увеличение полярности растворителя приводит к более значительному неоднородному уширению спектров поглощения, что проявляется в увеличении полуширины функций распределения $\Delta\rho(v_0)$. При этом следует отметить корреляцию в характере изменения полуширины функции распределения $\Delta\rho(v_0)$ и разности полуширин спектров поглощения соответствующих растворов относительно спектров в гексане $\Delta D_{\Pi}-\Delta D_{\Pi'}$ в зависимости от полярности растворителя.

Из результатов расчета следует, что функция распределения флуоресцентных центров по частотам центра тяжести спектра поглощения обладает максимумом и некоторой асимметрией (низкочастотный край функции $\rho(v_0)$ более крутой).

Зная форму «элементарного» спектра и вид функции распределения, нетрудно рассчитать, например, форму и положение спектра флуоресценции в зависимости от частоты возбуждения. Если считать, что форма «элементарного» спектра испускания также не меняется от центра к центру, так что сам «элементарный» спектр можно определить функцией $Q(v_0 - v_f)$, где v_f , где v_0 — центр тяжести данного спектра, v_f — частота флуоресценции, то наблюдаемый спектр испускания $A(v_f)$ определится формулой:

$$A(v_f) = B^{-1}(v) \int_0^{\infty} \rho(v_0) b(v - v_0) a(v_0 - \Delta - v_f) dv_0. \quad (12)$$

Здесь через Δ обозначена величина $\Delta = v_0 - v_0'$, представляющая стоксов сдвиг спектров.

Так как частота 0—0 перехода отдельного флуоресцентного центра находится на пересечении контуров «элементарных» спектров поглощения и испускания, она будет отличаться от положения центра тяжести последних на величину $\Delta/2$. Таким образом, функция распределения $\rho(v_0')$ может быть просто выражена через функцию распределения $\rho(v_0)$:

$$\rho(v_0') = \rho\left(v_0 + \frac{\Delta}{2}\right).$$

Рассмотренный в данной работе метод нахождения функции распределения $\rho(v)$, основанный на знании суммарного и «элементарного» спектров поглощения, может быть использован для определения распределения $\rho(v)$ флуоресцентных центров, находящихся не только в основном, но и в возбужденном состоянии. Для этого за основу необходимо брать суммарный спектр флуоресценции, а не поглощения, считая, что «элементарные» спектры поглощения и флуоресценции зеркально симметричны. Кроме того, использование «мгновенных» спектров флуоресценции открывает возможность изучения кинетики трансформации функции распределения в процессе изменения межмолекулярных взаимодействий и в результате переноса энергии возбуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов В. С., Пикулик Л. Г.— ЖПС, 1972, т. 16, с. 1017.
2. Рубинов А. Н., Томин В. И. Спектрально-люминесцентные и генерационные свойства красителей при ориентационном уширении электронно-колебательных уровней. / Препринт № 101 ИФ АН БССР.— Минск, 1976.
3. Гулис И. М., Комяк А. И., Томин В. И.— Изв. АН СССР, 1978, т. 42, с. 307.
4. Тамм Т. Б., Кикас Я. В., Сирк А. Э.— ЖПС, 1976, т. 24, с. 315.
5. Кикас Я. В.— Изв. АН Эст. ССР. Физ., мат., 1976, т. 25, с. 374.
6. Бахвалов Н. С. Численные методы.— М., 1975, т. 1.
7. Степанов Б. И., Грибковский В. П. Введение в теорию люминесценции.— Минск, 1963.
8. Мелищук М. В., Тихонов Е. А., Шпак М. Т.— Укр. физ. журнал, 1975, т. 20, с. 448.
9. Коява В. Т., Попечниц В. И., Саржевский А. М., Севченко А. Н.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, с. 66; 1979, т. 246, с. 1095.
10. Szabo A.— Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 924.
11. Персонов Р. И., Альшиц Е. И., Быковская А. А.— Письма в ЖЭТФ, 1972, т. 15, с. 609.
12. Персонов Р. И., Альшиц Е. И., Быковская А. А., Харламов Б. М.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 1825.
13. Бахшиев Н. Г. Спектроскопия межмолекулярных взаимодействий.— Л., 1972.

Поступила в редакцию
13.10.79.

Кафедра общей физики

УДК 621.362

И. Г. НЕКРАШЕВИЧ, А. В. СМЕРНОВ, В. Н. БАРИНОВ

ПРИЭЛЕКТРОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОМ ВАКУУМНОМ РАЗРЯДЕ

До недавнего времени процессам на аноде в вакуумных дугах уделялось недостаточное внимание. Такое положение оправдано для небольших значений разрядных токов, когда дуга содержит преимущественно катодную область [1], в которой развиваются основные процессы, определяющие существование разряда. При увеличении тока существенно возрастает роль анодных явлений в результате появления анодных пятен (АП) и интенсификации электроэрозионных процессов на аноде. Эти явления зачастую ограничивают область применения разного рода вакуумных приборов, действие которых связано с возникновением дугового разряда (управляемые вакуумные разрядники, вакуумные выключатели и др.).

Согласно [2—5], образование АП стационарной вакуумной дуги и переход разряда из диффузной формы в контрагированную происходят при следующих условиях: 1) наличие на поверхности анода участков с температурой T , превышающей температуру плавления $T_{пл}$ материала; 2) образование положительного анодного падения потенциала. Исследования [4, 5] показали, что разогрев поверхности анода осуществляется потоком электронов, поступающих из катодных пятен дуги. Выполнение второго условия возможно при наличии нескомпенсированного пространственного заряда вблизи анода, появляющегося вследствие нехватки положительных ионов, генерируемых в прикатодной области. Исходя из этого, можно предположить, что на образование АП должны существенно влиять процессы, протекающие в прикатодной области и прежде всего способность катода поставлять в разряд необходимое количество нейтральных частиц и носителей заряда.

Данная работа посвящена изучению влияния эмиссионных процессов на катоде и в прикатодной области, а также теплофизических свойств материала анода на величину порогового тока образования АП вакуумной дуги.

Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Исследуемые электроды 1 и 2 закрепляются в электрододержателях разрядного устройства, помещенного внутрь герметизированной рабочей камеры, которая откачивается до давления $\sim 10^{-3}$ Па. Источником пита-

ния вакуумной дуги служит ($L - C$) контур с изменяющимися параметрами, позволяющий получать аperiodические импульсы разрядного тока с амплитудой $I_{\max}$ от 10 А до 16 кА, длительностью τ_d от 1 до 600 мс при напряжении на батарее конденсаторов $U_c = 310$ В. Скорость нарастания тока на переднем фронте импульса изменялась в пределах $(5 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^8)$ А/с. Зарядка конденсаторной батареи осуществляется с постоянной скоростью при помощи блока зарядки (БЗ), который поддерживает также напряжение U_c на заданном уровне с точностью 0,1%.

Пробой основного разрядного промежутка осуществляется при помощи внешнего иницирующего устройства, состоящего из поджигающего электрода (вольфрамовая проволока диаметром 0,3 мм), помещенного в непосредственной близости от катода 2, разрядного контура

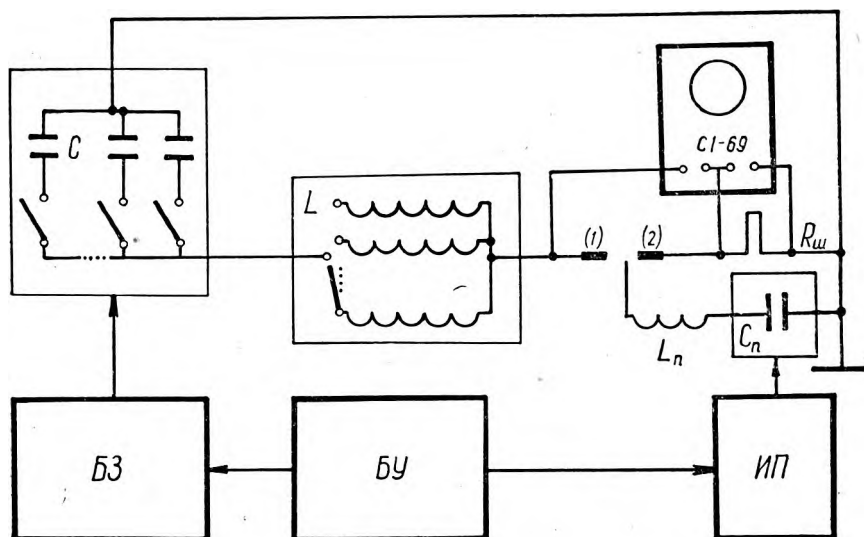


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки

($L_n - C_n$) и источника питания (ИП). При поступлении командного сигнала с блока управления (БУ) происходит отключение блока зарядки и источника питания от накопительных элементов схемы. Одновременно с этим поджигающий электрод кратковременно замыкается с катодом 2, в результате чего между ними возникает маломощный разряд, инициирующий пробой разрядного промежутка между электродами 1 и 2. Для исключения влияния магнитных полей на процессы, протекающие в плазме импульсной вакуумной дуги, все элементы разрядного устройства и сильноточные тоководы выполнены в коаксиальном виде.

Для регистрации электрических характеристик разряда (напряжения на электродах и тока в цепи) использовались осциллографы С1-54 и С1-69. В отдельных случаях проводилось скоростное фотографирование канала дуги камерой СКС-1 со скоростью $2 \cdot 10^3$ кадр/с.

При изучении влияния теплофизических характеристик материала анода на процесс образования АП применялись электроды цилиндрической формы диаметром 20 мм, выполненные из различных металлов (Мо, Cu, Al, Ti и Zn). Катодом при этом служил стержень из монокристаллического вольфрама диаметром 18 мм.

В тех исследованиях, задачей которых являлось изучение влияния эмиссионной активности катода* на прианодные процессы вакуумной дуги, вызывающие появление АП, в качестве катодов использовались электроды из различных материалов, а анод изготавливался из алюми-

* Под эмиссионной активностью катода в данном случае подразумевается его способность поставлять в плазму дугового разряда нейтральные частицы (атомы) и носители заряда (ионы).

ния. Эксперименты проводились в условиях протекания разрядных импульсов тока, характеризующихся одинаковой скоростью нарастания $\frac{dl}{dt} \sim 2 \cdot 10^6$ А/с. Одновременно с этим методом точного взвешивания оценивались значения эрозии G_k различных катодов в расчете на один разряд. При эрозионных исследованиях параметры импульса тока выбирались такими, чтобы в процессе горения дуги АП не возникало ($I_{\max} = 1,2$ кА, $\tau_d = 3,5$ мс).

Известно, что начальный момент образования АП в вакуумных дугах можно определить тремя способами: 1) по исчезновению высокочастотной шумовой компоненты на осциллограммах напряжения горения дуги [2, 3]; 2) с помощью скоростной киносъемки [3]; 3) по началу плавления анода [6].

Как выяснилось, при небольших межэлектродных расстояниях d (величина d составляла 2,5 и 5 мм) и описанных условиях эксперимента наиболее приемлемым является третий способ определения момента образования АП, заключающийся в том, что после проведения серии разрядов поверхность анода исследуется металлографическими методами с целью определения на ней количества оплавленных участков, являющихся местом привязки АП. На основании результатов этих исследований строились зависимости вероятности Φ образования АП от амплитуды $I_{\max}$ импульсов тока. Величина Φ для каждого конкретного случая бралась равной отношению количества импульсов N_1 , при которых фиксировались АП к суммарному количеству N_2 произведенных разрядов ($N_2 = 50$).

Анализ полученных зависимостей Φ ($I_{\max}$) показал, что процесс образования АП носит вероятностный характер и описывается распределением Пуассона. На основании этих зависимостей определялись значения пороговых токов $I_{\text{ап}}$ образования АП из следующих условий: $I_{\text{ап}} = \bar{I}_{\max}$; $\Phi(\bar{I}_{\max}) = 0,5$ (где $\bar{I}_{\max}$ — математическое ожидание величины $I_{\max}$).

Для выявления взаимосвязи пороговых токов образования АП вакуумных дуг с теплофизическими характеристиками материала анода в работе [3] дается решение следующего уравнения:

$$T(0, t) = \left(\frac{1}{\pi h \rho c} \right)^{1/2} \cdot \int_0^t \frac{q(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{1/2}}, \quad (1)$$

где $T(0, t)$ — температура поверхности анода; q — мощность теплового потока на анод; k, ρ, c — соответственно коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость материала анода.

Исследуя процесс образования АП, авторы [3] использовали импульсы тока в виде полуволны синусоиды с постоянной длительностью. В связи с этим они положили, что

$$q(t) = q_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) с учетом (2) показало, что величина $I_{\text{ап}}$ должна находиться в прямой пропорциональной зависимости от параметра $\alpha = T_{\text{пл}}(k\rho c)^{1/2}$. Однако, сравнивая расчетные и экспериментальные данные, они указали лишь на существование монотонной зависимости $I_{\text{ап}}(\alpha)$, что объясняется, вероятнее всего, применением ими в качестве катода и анода однотипных электродов и изменением величины dl/dt в процессе эксперимента.

Следует отметить, что эти расчеты можно применить и для случая аperiодических импульсов тока, характеризующихся относительно большой длительностью τ_d , когда задний фронт импульсов существенно влияет на временную зависимость температуры на поверхности анода [3]. Как показали результаты скоростной киносъемки канала дуги, при переходе к коротким импульсам тока (значения $dl/dt > 10^6$ А/с) образование АП происходит, как правило, до прохождения максимума тока или близ-

ко к нему, т. е. в той части импульса, где скорость изменения тока в первом приближении является постоянной величиной. Для этого случая справедливо соотношение

$$q(t) = \delta_e \frac{dI}{dt} \cdot V_a^e \cdot t, \quad (3)$$

где δ_e — доля электронного тока; V_a^e — эффективное значение анодного падения потенциала.

Совместное решение (1) и (3) позволяет получить выражение для порогового тока образования АП:

$$I_{ан} = \left[\frac{9\pi}{16} \left(\frac{dI}{dt} \right) (\delta_e \cdot V_a^e)^{-2} \right]^{1/3} (T_{пл}^2 \cdot k \rho c)^{1/3}. \quad (4)$$

Из уравнения (4) видно, что величина $I_{ан}$ находится в прямо пропорциональной зависимости от параметра $\beta = (T_{пл}^2 \cdot k \rho c)^{1/3}$.

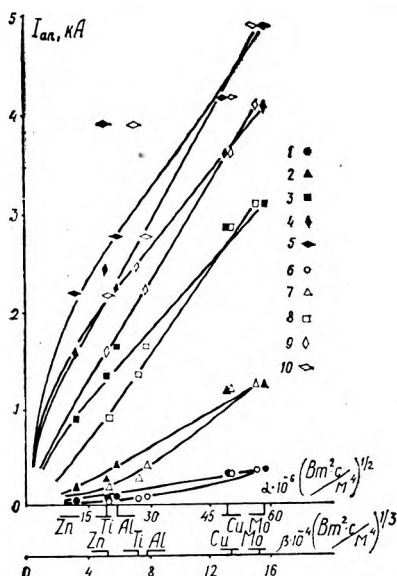
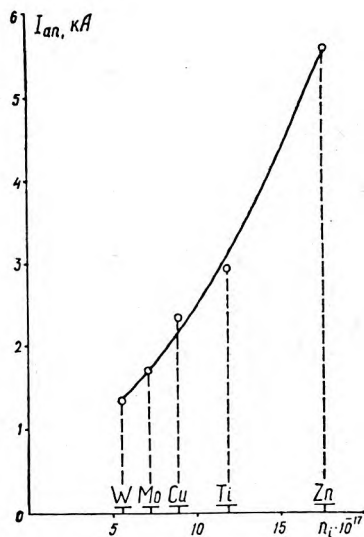


Рис. 2. Зависимости пороговых токов $I_{ан}$ образования анодного пятна от параметров α (1—5) и β (6—10) для $d=2,5$ мм и различных скоростей нарастания тока в импульсе:

1, 6 — 10^4 А/с; 2, 7 — 10^5 А/с; 3, 8 — 10^6 А/с; 4, 9 — 10^7 А/с; 5, 10 — 10^8 А/с

Рис. 3. Зависимость порогового тока $I_{ан}$ образования анодного пятна на алюминии от количества ионов n_i , генерируемых разными катодами ($d=2,5$ мм)



На рис. 2 представлены зависимости $I_{ан}$ от параметров α и β . Видно, что для импульсов тока, характеризующихся значениями $dI/dt \sim (10^4 \div 10^5)$ А/с, ближе к линейной является зависимость $I_{ан}(\alpha)$. Однако при $dI/dt \geq 10^6$ А/с связь величины порогового тока $I_{ан}$ с теплофизическими параметрами материала анода лучше осуществляется через параметр β . Исключением в этом отношении является титан, отличающийся очень низкой теплопроводностью и относительно высокой температурой плавления. Данное обстоятельство, по-видимому, связано с увеличением влияния на процесс образования АП при коротких импульсах (больших скоростях ввода энергии в электрод) температуры плавления анода и уменьшением удельного вклада в данный процесс теплопроводности [7].

Результаты исследования влияния эмиссионной активности катодов из различных металлов на величину $I_{ан}$ для алюминиевого анода представлены в табл. 1.

Если предположить, что материал катода поступает в разрядный про-

межуток в атомарном состоянии, что имеет место для большинства металлов при токах дуги до 1—2 кА [8], можно определить количество атомов n_a , эмиттируемых катодом за время существования разряда:

$$n_a = \frac{G_k}{A} \cdot N_A, \quad (5)$$

где A — грамм-атомный вес; N_A — число Авогадро.

Часть испарившихся атомов в прикатодной области превращается в положительные ионы, количество которых можно определить из соотношения

$$n_i = f_i \cdot n_a, \quad (6)$$

где f_i — коэффициент ионизации.

Т а б л и ц а 1

Значения порогового тока $I_{ап}$ образования анодного пятна вакуумной дуги на алюминии для различных катодных материалов ($d = 2,5$ мм)

Катод	$I_{ап}$, А	G_k , мкг	$n_a \cdot 10^{17}$	f_i [4]
W	1350	76	2,5	2,2
Mo	1700	60	3,76	1,8
Cu	2450	153	14,39	0,55
Al	2550	104	23,18	—
Ti	2900	112	14,35	0,8
Zn	5600	770	71,31	0,25

Т а б л и ц а 2

Значения эрозии G_k алюминиевого катода для различных анодных материалов

Анод	G_k , мкг	
	$d=2,5$ мм	$d=5$ мм
Zn	210	180
Cu	260	205
Mo	265	220

Сравнивая данные, представленные в табл. 1, нетрудно убедиться в том, что между численными значениями $I_{ап}$, G_k и n_a не существует однозначной корреляции. На рис. 3 приведена зависимость $I_{ап}$ для алюминиевого анода от количества ионов n_i , поставляемых различными катодами за время существования разряда. Как видно, эта зависимость близка к линейной, что указывает на применимость модели вакуумной дуги [2, 4, 5] при переходе от диффузной формы разряда к контрагированной.

Анализ приведенных результатов, а также экспериментальных данных, представленных в табл. 2, указывает на существование взаимосвязи между процессами, протекающими в прикатодной и прианодной областях вакуумного дугового разряда. Значения эрозии G_k в табл. 2 даны для алюминиевого катода в условиях протекания аperiodического импульса тока амплитудой 1600 А и длительностью 4 мс. В качестве анодов использовались электроды из различных материалов.

Металлографические исследования показали, что при указанных условиях эксперимента и межэлектродном расстоянии $d=2,5$ мм АП образуется только на цинковом аноде. Возникновение стационарного АП приводит к интенсивному поступлению материала анода в разрядный промежуток, что вызывает уменьшение скорости испарения алюминиевого катода. При значении $d=5$ мм АП образуются на цинковом и медном анодах. Однако время существования АП на цинке больше чем на меди, в связи с этим эрозия алюминиевого катода минимальна для пары Al—Zn и максимальна для пары Al—Mo. К аналогичным выводам приводит анализ результатов, полученных для других сочетаний электродных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кесаев И. Г. Катодные процессы электрической дуги.— М., 1968.
2. Mitchell G. R.— Proc. IEE, 1970, v. 117, p. 2315.

3. Rich J. A., Prescott L. E., Cobine J. D.—J. Appl. Phys. 1971, v. 42, p. 587.
4. Кимблин С. У.—В сб.: Экспериментальные исследования плазматронов.—Новосибирск, 1977, 226 с.
5. Miller H. C.—IEEE Trans. Plasma Sci., 1977, v. PS-5, N 3, p. 181.
6. Rich J. A.—Proc. IEEE, 1971, v. 59, N 4, p. 539.
7. Анисимов С. И. и др. Действие излучения большой мощности на металлы.—М., 1970, 272 с.
8. Раховский В. И. Физические основы коммутации электрического тока в вакууме.—М., 1970.

Поступила в редакцию
03.02.81.

НИИ ПФП, кафедра радиотехники
и физической электроники

УДК 539.12

Т. В. КУХТО, Н. М. ШУМЕНКО

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОПРАВКИ К ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ АСИММЕТРИИ В ГЛУБОКОНЕУПРУГОМ IN -РАССЕЯНИИ

В последние годы наступил новый этап в экспериментальном исследовании глубоконеупругого рассеяния лептонов на нуклонах (ГНР) $l \pm N \rightarrow l \pm$ адроны. Во-первых, после серии электронных опытов при энергии $E < 20$ ГэВ (см., например, [1, 2]), проводятся мюонные эксперименты в области $E < 300$ ГэВ [3—5] и планируются опыты с мюонами еще больших энергий [6]. Во-вторых, после довольно подробного изучения сечения, усредненного по состояниям поляризации (структурные функции $W_{1,2}$), началось исследование спиновых свойств взаимодействий (структурные функции $G_{1,2}$) [5, 7].

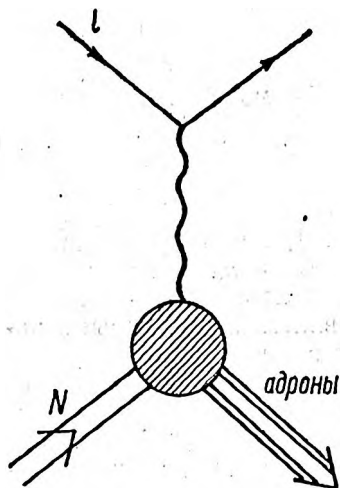


Рис. 1. Диаграмма глубоконеупругого IN -рассеяния в однофотонном приближении

Для того, чтобы интерпретировать экспериментальные данные по ГНР в терминах структурных функций с некоторой точностью Δ , необходимо учесть ненаблюдаемые радиационные поправки к борновскому вкладу (диаграмма рис. 1) с точностью, лучшей Δ . К настоящему времени детально рассмотрены поправки к сечению ГНР неполяризованных частиц [8—12], а также к P -нечетным асимметриям в рассеянии поляризованных лептонов на неполяризованных нуклонах [13].

В предлагаемой работе в связи с экспериментами [5—7] исследуются электромагнитные поправки (ЭП) для ГНР поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах. В ковариантной форме получены точные формулы ЭП низшего порядка к лептонному току — основного вклада в ЭП. На их основе построено и проанализировано выражение для наблюдаемой величины — продольной асимметрии:

$$A(E, x, y) = [d\sigma(\uparrow\downarrow) - d\sigma(\uparrow\uparrow)] / [d\sigma(\uparrow\downarrow) + d\sigma(\uparrow\uparrow)], \quad (1)$$

где $[d\sigma(\uparrow\downarrow)]d\sigma(\uparrow\uparrow)$ — дифференциальное сечение ^{*} $d\sigma(k_1, k_2) \equiv k_2^0 d^3\sigma / d^3k_2$ с (анти)параллельной ориентацией продольных поляризаций лептона и нуклона; x и y — обычные скейлинговые переменные. Проведены подробные численные расчеты ЭП при $E=200$ и 500 ГэВ для μp -ГНР и при $E=10$ и 16 ГэВ для ep -ГНР. Анализ численных результатов показывает, что ЭП к борновской асимметрии A_0 в большей части кинематической области не превосходит 10%, но в области $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$ может достигать нескольких десятков процентов.

* $p_1, p_2, k_1(k_2)$, k — 4-импульсы (например, $k = (k, ik^0)$) соответственно нуклона, конечных адронов, начального (конечного) лептона и фотона.

V-вклад. Вклад в сечение диаграмм с обменом дополнительным виртуальным фотоном (V-вклад), как и в случае рассеяния неполяризованных частиц [10], имеет вид

$$d\sigma_V(k_1, k_2) = d\sigma_0(k_1, k_2) \frac{\alpha}{\pi} \delta_V + d\sigma^{AMM}(k_1, k_2). \quad (2)$$

Здесь

$$d\sigma_0(k_1, k_2) = \frac{N}{Y^2} \{ 2 M W_1(W^2, Y) (Y - 2m^2) + W_2(W^2, Y) (SX - M^2 Y) / M + 4m [M^2 G_1(W^2, Y) (Q \cdot \xi Q \cdot \eta - Y \xi \cdot \eta) - Y G_2(W^2, Y) (p_1 \cdot \xi Q \cdot \eta - p_1 \cdot Q \xi \cdot \eta)] \} \quad (3)$$

сечение ГНР в борновском приближении;

$$d\sigma^{AMM}(k_1, k_2) = \frac{\alpha}{\pi} 2m^2 L_m \left\{ d\sigma_0(k_1, k_2) + \frac{N}{Y^2} \left[M W_1(W^2, Y) (Y + 4m^2) - \frac{1}{4} W_2(W^2, Y) (S + X)^2 / M \right] \right\} \quad (4)$$

вклад аномального магнитного момента лептона;

$$\delta_V = J_0 \ln \frac{\lambda}{m} - Y_m \left[\frac{V \lambda_m}{2} L_m^2 + \frac{2}{V \lambda_m} \Phi \left(\frac{2 V \lambda_m}{V \lambda_m + Y} \right) \right] + \left(\frac{3}{2} Y + 4m^2 \right) L_m - 2 + \sum_{i=e, \mu, \tau} \left[\frac{2}{3} (Y + 2m_i^2) L_m^i - \frac{10}{9} + \frac{8m_i^2}{3Y} (1 - 2m_i^2 L_m^i) \right]. \quad (5)$$

В выражениях (3)–(5) $m(M)$ и $\xi(\eta)$ — соответственно масса и вектор поляризации рассеивающегося лептона (нуклона); λ — масса фотона; сумма по i учитывает вклад поляризации вакуума электроном, мюоном и τ -лептоном,

$$S = -2p_1 \cdot k_1, \quad X = -2p_1 \cdot k_2, \quad Y \equiv Q^2 = (k_1 - k_2)^2, \\ W^2 = M^2 + S - X - Y, \quad \lambda_S = S^2 - 4m^2 M^2, \quad N = 2\alpha^2 / \sqrt{\lambda_S}, \quad (6)$$

$$\lambda_m = Y^2 + 4m^2 Y, \quad L_m = \lambda_m^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{V \lambda_m + Y}{V \lambda_m - Y}, \quad L_m^i = L_m(m \rightarrow m_i),$$

$$Y_m = Y + 2m^2, \quad J_0 = 2(Y_m L_m - 1), \quad \Phi(x) = \int_x^0 1/t \cdot \ln |1 - t| dt.$$

R-вклад. Вклад тормозного излучения лептоном (R-вклад) в сечение ГНР запишем в форме $d\sigma_R(k_1, k_2) = d\tilde{\sigma}_R(k_1, k_2) + d\sigma_R^p(k_1, k_2)$, где усредненная по спинам часть $d\tilde{\sigma}_R$ дается формулами (1), (2) работы [11], а часть, зависящая от ξ и η , имеет вид

$$d\sigma_R^p(k_1, k_2) = N \frac{\alpha}{\pi^2} \int \frac{d^3 k}{k^0} \frac{1}{t^2} \frac{1}{2} M S_{\alpha\beta}(\xi) W_{\alpha\beta}(\eta); \quad (7)$$

$$S_{\alpha\beta}(\xi) = 4m [\chi^2 \varepsilon(\alpha\beta\xi q) + \frac{k_2 \cdot \xi}{z z_1} \varepsilon(\alpha\beta k q) - \frac{k \cdot \xi}{z z_1} \varepsilon(\alpha\beta k_1 q) + \frac{k \cdot \xi}{z_1^2} \varepsilon(\alpha\beta k_2 q)], \quad (8)$$

$$W_{\alpha\beta}(\eta) = M G_1(M_X^2, t) \varepsilon(\alpha\beta q \eta) + \frac{G_2(M_X^2, t)}{M} \varepsilon(\alpha\beta q \rho) [p_1^\rho q \cdot \eta + \frac{1}{2} \eta^\rho T]. \quad (9)$$

Здесь $t \equiv q^2 = (k_1 - k_2 - k)^2$; $z = -2k_2 \cdot k$; $z_1 = -2k_1 \cdot k = z + t_d$; $T = t + M_X^2 - M^2$; $M_X^2 = -p_2^2$; $\chi^2 = -\frac{m^2}{z^2} - \frac{m^2}{z_1^2} + \frac{Y_m}{z z_1}$; $t_d = t - Y$, а, например, $\varepsilon(\alpha\beta\xi q) = \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \xi^\rho q^\sigma$, где $\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$ — тензор Леви-Чивита.

В условиях инклюзивного эксперимента, когда регистрируется только рассеянный лептон, интегрирование в (7) следует проводить по полному фазовому объему ненаблюдаемого тормозного фотона. Свертывая тензоры $S_{\alpha\beta}$ и $W_{\alpha\beta}$ и производя преобразования, имеем

$$d\sigma_R^p(k_1, k_2) = N \frac{\alpha}{\pi^2} \int_{(M+m_\pi)^2}^{W^2} dM_X^2 \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{dt}{t^2} \int \frac{d^3k}{k^0} \delta[M_X^2 + (p_1 + q)^2] \delta(t - q^2) R^p(M_X^2, t, k), \quad (10)$$

$$R^p(M_X^2, t, k) \equiv \frac{1}{2} M S_{\alpha\beta}(\xi) W_{\alpha\beta}(\eta) = M G_1(M_X^2, t) R_1(M_X^2, t, k) - G_2(M_X^2, t) R_2(M_X^2, t, k)/M. \quad (11)$$

Здесь m_π — масса пиона.

$$t_{\min}^{\max} = [(W^2 - M_X^2)(S_X \pm \sqrt{A_2}) + 2M_X^2 Y]/2W^2, \quad (12)$$

$$S_X = S - X, \quad A_2 = S_X^2 + 4M^2 Y;$$

$$R_1(M_X^2, t, k) = 2mM \left\{ 2\chi^2(q \cdot \xi \cdot q \cdot \eta - t \xi \cdot \eta) - \frac{k_2 \cdot \xi}{z z_1} [t_d Q \cdot \eta + (t + Y) k \cdot \eta] + \right. \\ \left. + t k \cdot \xi \left[\frac{(k_1 + k_2 + k) \cdot \eta}{z z_1} - \frac{(k_1 + k_2 - k) \cdot \eta}{z_1^2} \right] \right\}, \quad (13)$$

$$R_2(M_X^2, t, k) = 2mMt \left\{ \chi^2(2p_1 \cdot \xi \cdot q \cdot \eta + T \xi \cdot \eta) + \frac{k_2 \cdot \xi}{z z_1} (TQ \cdot \eta - S_X q \cdot \eta) + \right. \\ \left. + k \cdot \xi \left(\frac{Sq \cdot \eta - T k_1 \cdot \eta}{z z_1} - \frac{Xq \cdot \eta - T k_2 \cdot \eta}{z_1^2} \right) \right\}.$$

Вычисление внутреннего интеграла в (10) проводим методом инвариантного интегрирования тензоров. В результате для R -вклада получаем

$$d\sigma_R(k_1, k_2) = N \frac{\alpha}{\pi} \int_{(M+m_\pi)^2}^{W^2} dM_X^2 \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{dt}{t^2} R(M_X^2, t), \quad (14)$$

$$R(M_X^2, t) = 2M W_1(M_X^2, t) S_1(M_X^2, t) + \frac{W_2(M_X^2, t)}{2M} S_2(M_X^2, t) + \\ + M G_1(M_X^2, t) R_1(M_X^2, t) - \frac{G_2(M_X^2, t)}{M} R_2(M_X^2, t). \quad (15)$$

Основные черты способа интегрирования и выражения для $S_{1,2}(M_X^2, t)$, $R_{1,2}(M_X^2, t)$ приведены в приложении.

Выделение инфракрасной расходимости в (14) (в точке $M_X^2 = W^2$, $t = Y$) проведем, используя приемы работ [9, 10]. С этой целью представим R -вклад в виде $d\sigma_R(k_1, k_2) = d\sigma_R^{IR}(k_1, k_2) + d\sigma_R^F(k_1, k_2)$, где $d\sigma_R^{IR}$ — инфракрасно-расходящаяся, а $d\sigma_R^F$ — конечная части. Для первой имеем [11]:

$$d\sigma_R^{IR}(k_1, k_2) = d\sigma_0(k_1, k_2) \frac{\alpha}{\pi} \delta_R^{IR}, \quad \delta_R^{IR} = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^3k}{k^0} \chi^2 = J_0 \ln \frac{V_{\max}}{\lambda \sqrt{W^2}} + \\ + \frac{1}{2} (S' L_{S'} + X' L_{X'}) + S_\Phi(Y_m, \lambda_m, S', X' - 2W^2, \lambda_{X'}), \quad (16)$$

где функция S_Φ определяется формулами (57), (58) работы [9], а

$$S' = X + Y, \quad X' = S - Y, \quad V_{\max} = W^2 - (M + m_\pi)^2, \\ \lambda_{S'(X')} = S'^2(X'^2) - 4m^2 W^2, \quad (17)$$

$$L_{S'(X')} = \lambda_{S'(X')}^{-1/2} \ln \frac{S'(X') + \sqrt{\lambda_{S'(X')}}}{S'(X') - \sqrt{\lambda_{S'(X')}}}.$$

Конечная часть R -вклада равна

$$d\sigma_R^F(k_1, k_2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{(M+m_\pi)^2}^{W^2} dM_X^2 \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \left[\frac{N}{t^2} R(M_X^2, t) - d\sigma_0(k_1, k_2) F^{IR} \right]. \quad (18)$$

Свободная от расходимостей сумма V - и R -вкладов $d\sigma_V + d\sigma_R^{IR} + d\sigma_R^F$ определяет ЭП к сплошному спектру в ГНР поляризованных частиц. Еще один вклад в полную ЭП дает, как известно [8], радиационный хвост от упругого пика ($l + N \rightarrow l + N + \gamma$). Сечение этого процесса $d\sigma_R^N(k_1, k_2)$ получим из (14) путем замен:

$$\begin{aligned} W_{1,2}(M_X^2, t) &\rightarrow 2MW_{1,2}^N(t) \delta(M_X^2 - M^2), \\ G_{1,2}(M_X^2, t) &\rightarrow \frac{G_{1,2}^N(t)}{2M} \delta(M_X^2 - M^2), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} W_1^N(t) &= \tau G_M^2(t), \quad W_2^N(t) = [G_E^2(t) + \tau G_M^2(t)]/(1 + \tau), \\ G_1^N(t) &= 2G_M(t) [G_E(t) + \tau G_M(t)]/(1 + \tau), \\ G_2^N(t) &= -G_M(t) [G_M(t) - G_E(t)]/(1 + \tau), \end{aligned} \quad (20)$$

$\tau = t/4M^2$, а $G_{E,M}(t)$ — электромагнитные формфакторы нуклона. В результате имеем

$$d\sigma_R^N(k_1, k_2) = N \frac{\alpha}{\pi} \int_{t_{\min}^N}^{t_{\max}^N} \frac{dt}{t^2} R(t), \quad (21)$$

где $t_{\min}^N$ и $R(t)$ получаются из приводившихся величин $t_{\min}^{\max}$ и $R(M_X^2, t)$ при условии $M_X^2 = M^2$ (т. е. $T = t$).

Асимметрия. Используем теперь полученное выражение для сечения ГНР с точностью $\sim \alpha^3$:

$$d\sigma(k_1, k_2) = d\sigma_0(k_1, k_2) + d\sigma_V(k_1, k_2) + d\sigma_R^{IR}(k_1, k_2) + d\sigma_R^F(k_1, k_2) + d\sigma_R^N(k_1, k_2) \quad (22)$$

для построения наблюдаемой величины — поляризационной асимметрии (1). Имеем

$$\begin{aligned} A_1(E, x, y) &= \left[d\sigma_0^p(\uparrow\downarrow) \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \delta_{V,R} \right) + d\sigma_p^{AMM}(\uparrow\downarrow) + d\sigma_{R,p}^F(\uparrow\downarrow) + \right. \\ &\quad \left. + d\sigma_{R,p}^N(\uparrow\downarrow) \right] / \left[d\tilde{\sigma}_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \delta_{V,R} \right) + d\tilde{\sigma}^{AMM} + d\tilde{\sigma}_R^F + d\tilde{\sigma}_R^N \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $\delta_{V,R} = \delta_V + \delta_R^{IR}$; величины с индексом « p » обозначают поляризационные ($W_{1,2} = 0$) части выражений (3), (4), (18), (21) при $\xi^\alpha = \frac{1}{m} (E \vec{k}_1 / |\vec{k}_1|, i|\vec{k}_1|)$, $\eta^\alpha = (-\vec{k}_1 / |\vec{k}_1|, 0)$, а величины с чертой — не зависящие от ξ и η части ($G_{1,2} = 0$) тех же выражений.

Формула (23) значительно упрощается, если пренебречь массой лептона. В этом приближении для величин $R_{1,2}(M_X^2, t)$ следует использовать выражения (П 9), (П 10) с $P_l = 1$; кроме того,

$$d\sigma^{AMM}(k_1, k_2) = 0, \quad N = 2\alpha^2/S,$$

$$d\tilde{\sigma}_0 = \frac{N}{Y^2} [2MYW_1(W^2, Y) + (SX - M^2Y)W_2(W^2, Y)/M],$$

$$d\sigma_0^p(\uparrow\downarrow) = \frac{NM}{Y} [(S_p - 2M^2Y/S)G_1(W^2, Y) - 2YG_2(W^2, Y)], \quad (24)$$

$$\delta \nu_R = (l_m - 1) \ln \frac{V_{\max}^2}{S' X'} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{S'}{X'} + \frac{13}{6} l_m + \frac{2}{3} \ln \frac{Y}{m_l^2} - \frac{48}{9} + \frac{2}{3} (Y + 2 m_l^2) L_m + \frac{8 m_l^2}{3 Y} (1 - 2 m_l^2 L_m) + \Phi \left(\frac{S X - M^2 Y}{S' X'} \right) - \frac{\pi^2}{6},$$

где $l_m = \ln \frac{Y}{m_l^2}$, $m_l = m_e (m_\mu)$, если $m = m_\mu (m_e)$.

Обсуждение результатов

При анализе ЭП к асимметрии удобно выделить в выражении (23) поправки δ и δ_p так*, что

$$A_1 = \frac{1 + \delta_p}{1 + \delta} A_0, \quad A_0 = d \sigma_0^e (\downarrow) / d \tilde{\sigma}_0. \quad (25)$$

Как видно из (25), ЭП не приводят к дополнительному (кроме борновского (A_0)) вкладу в асимметрию лишь в случае $\delta_p = \delta$.

На рис. 2 в зависимости от y представлены численные результаты для δ и δ_p в μp - и $e p$ -ГНР при нескольких значениях E и Q^2 , полученные с использованием подгонок структурных функций из работ [2, 7]. Для формфакторов протона бралась подгонка из работы [16]. Как видно из рис. 2, характер поведения y поправки δ_p такой же, как и у δ . Крутые загибы кривых в области минимальных и максимальных y обусловлены соответственно преобладанием вкладов излучения мягких и жестких фотонов. При данном E величина разности $\Delta_\delta = \delta - \delta_p$ растет с уменьшением Q^2 и увеличением y , т. е. в области, где в ЭП доминирует вклад жестких фотонов. Зависимость от энергии, как у δ и δ_p , так и у Δ_δ довольно слабая. Заметим также, что с возрастанием Q^2 разность Δ_δ становится знакопеременной (в зависимости от y), что приводит, естественно, к знакопеременности ЭП к асимметрии.

Вклад радиационного хвоста от упругого пика в δ_p , как и в δ , быстро растет в области малых Q^2 и $y \rightarrow 1$, достигая здесь более половины всего радиационного эффекта.

Вычислив δ и δ_p с использованием структурных функций из работ [1, 17, 18], мы исследовали чувствительность ЭП к выбору различных вариантов структурных функций. Наш анализ показывает, что δ_p , как и δ , практически во всей кинематической области слабо зависит от выбора конкретного варианта.

На рис. 3 приведены численные результаты для ЭП к асимметрии. В качестве меры ЭП примем величину $\delta_A = (A_1 - A_0) / A_0 \cdot 100\%$. Из рис. 3 видно, что в широком интервале E и Q^2 δ_A изменяется примерно от 0 при малых y до 65% при $y \sim 1$ для $e p$ -ГНР, а для μp -ГНР может достигать 100% (при $y > 0,95$). Для $e p$ -ГНР, при $E = 10$ ГэВ δ_A может превышать 10%, начиная с $y = 0,25$, для μp -ГНР это значение δ_A достигается при $y > 0,9$. Отметим, что большие ЭП к асимметрии в области $y \rightarrow 1$ обусловлены вкладом излучения жестких реальных фотонов.

С целью изучения чувствительности асимметрии к выбору структурных функций мы провели расчеты с двумя подгонками $W_{1,2}$ [1, 2] и тремя вариантами $G_{1,2}$ [7, 17, 18]. Разница асимметрий, вычисленных с различными $W_{1,2}$, оказалась незначительной ($\leq 1\%$). Зависимость же от выбора $G_{1,2}$ оказалась очень сильной. Из рис. 3 видно также, насколько значительны могут быть неопределенности, обусловленные экстраполяцией структурных функций в более широкую область W^2 и Q^2 . Следствием именно такой, по-видимому, незаконной экстраполяции является «пик» (см. рис. 3, б, кривая 3в). Подчеркнем, однако, что отмеченная сильная чувствительность асимметрии к свойствам структурных функций $G_{1,2}$ происходит почти исключительно от борновского вклада A_0 .

Отметим, что на рис. 2, 3 мы не приводим величин δ , δ_p , A_1 в области,

* Поправка δ , представляющая собой ЭП к сечению ГНР неполяризованных частиц, подробно исследована в [8, 10].

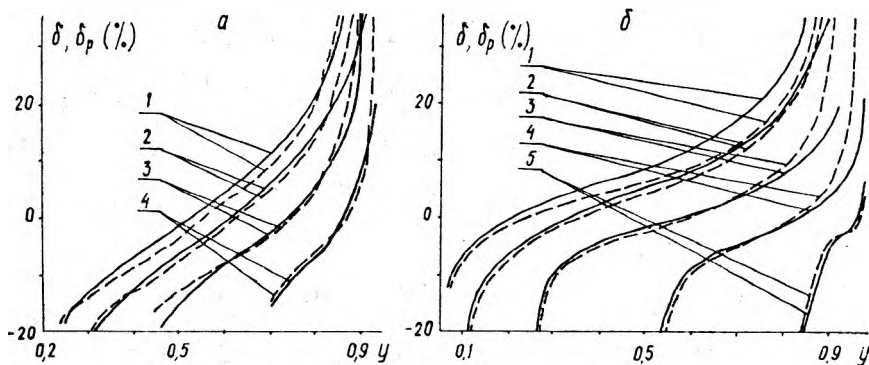


Рис. 2. Электромагнитные поправки δ (сплошные линии) и δ_p (пунктирные линии) в ep -ГНР(а) и μp -ГНР(б); а: 1 — $E=10$ ГэВ, $Q^2=4$ ГэВ²; 2 — $E=16$ ГэВ, $Q^2=8$ ГэВ²; 3 — $E=10$ ГэВ, $Q^2=8$ ГэВ²; 4 — $E=10$ ГэВ, $Q^2=12$ ГэВ²; б: 1 — $E=200$ ГэВ, $Q^2=20$ ГэВ²; 2 — $E=500$ ГэВ, $Q^2=100$ ГэВ²; 3 — $E=200$ ГэВ, $Q^2=100$ ГэВ²; 4 — $E=200$ ГэВ, $Q^2=200$ ГэВ²; 5 — $E=200$ ГэВ, $Q^2=300$ ГэВ²

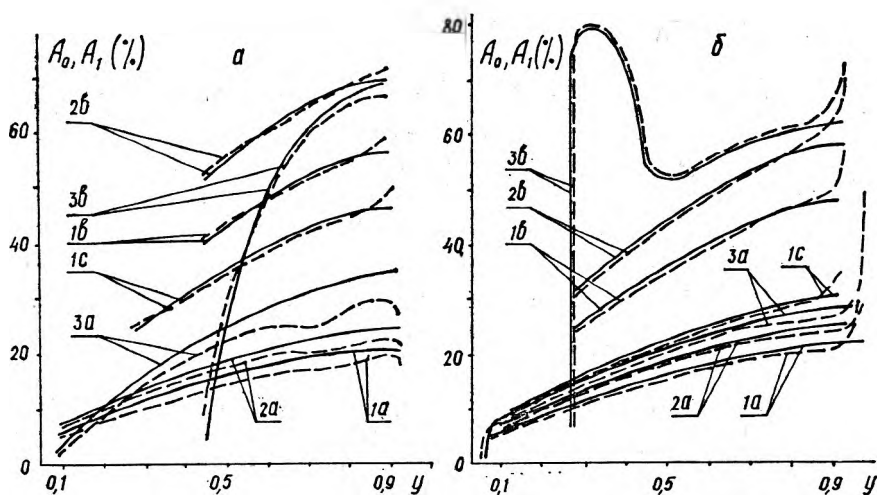


Рис. 3. Борновская асимметрия A_0 (сплошные линии) и асимметрия с поправками A_1 (пунктирные линии) в ep -ГНР(а) и μp -ГНР(б); а: а — $E=10$ ГэВ, $Q^2=1$ ГэВ²; б — $E=10$ ГэВ, $Q^2=8$ ГэВ²; с — $E=16$ ГэВ, $Q^2=8$ ГэВ²; б: а — $E=200$ ГэВ, $Q^2=20$ ГэВ²; б — $E=200$ ГэВ, $Q^2=100$ ГэВ²; с — $E=500$ ГэВ, $Q^2=100$ ГэВ². Цифры 1, 2, 3 у кривых отвечают использованию подгонок [2, 7], [2, 18], [2, 17].

где $|\Delta_0| > 30\%$ и, следовательно, не исключена возможность значительного вклада от неучтенных ЭП более высокого порядка. Как видно из рисунков, это крайне узкая область значений y , близких к 1.

Сравнение наших расчетов по точным формулам с оценками ЭП по формулам эквивалентного радиатора [8], сделанными в эксперименте [7], показало, что оба результата для ЭП согласуются по характеру зависимости от x и y , знаку и масштабу величины поправок. Однако нам трудно судить о точности оценок поправок в [7], поскольку последние сделаны с учетом конкретных условий эксперимента.

Приложение

Выполнение внутреннего интегрирования в (10) сводится к вычислению интегралов

$$I^n(\hat{I}^n)_{\langle 1, a, \alpha \beta \rangle} \equiv \frac{1}{\pi} \int \frac{d^4 k}{k^0} \delta[M_X^2 + (p_1 + q)^2] \delta(t - q^2) z^{-n} (z_1^{-n}) \{1, k_a, k_a k_\beta\}. \quad (11)$$

Тензорные и векторные интегралы представим в виде

$$I^n (\hat{I}^n)_{\alpha\beta} = a_0^n (\hat{a}_0^n) \delta_{\alpha\beta} + a_1^n (\hat{a}_1^n) k_1^\alpha k_1^\beta + a_2^n (\hat{a}_2^n) k_2^\alpha k_2^\beta + a_3^n (\hat{a}_3^n) p_1^\alpha p_1^\beta + \\ + a_4^n (\hat{a}_4^n) (k_1^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha) + a_5^n (\hat{a}_5^n) (k_1^\alpha p_1^\beta + k_1^\beta p_1^\alpha) + a_6^n (\hat{a}_6^n) (k_2^\alpha p_1^\beta + k_2^\beta p_1^\alpha), \quad (\Pi 2)$$

$$I^n (\hat{I}^n)_\alpha = A_1^n (\hat{A}_1^n) k_1^\alpha + A_2^n (\hat{A}_2^n) k_2^\alpha + A_3^n (\hat{A}_3^n) p_1^\alpha. \quad (\Pi 3)$$

Используя приемы инвариантного интегрирования тензоров (см., например, [15]), а также ковариантную технику вычисления скалярных интегралов [9, 10], находим:

$$\begin{aligned} a_1^n &= \frac{1}{\Delta} [c_1 A_1^{n-1} - (u c_2 + t_d \lambda_X) A_1^n - \lambda_X 2 a_0^n], \\ a_2^n &= \frac{1}{\Delta} [\hat{c}_1 A_2^{n-1} + (u \hat{c}_2 + t_d (\lambda_S + \hat{c}_1)) A_2^n - \lambda_S 2 a_0^n], \\ a_4^n &= \frac{1}{\Delta} [\hat{c}_1 A_1^{n-1} + (u \hat{c}_2 + t_d (\lambda_S + \hat{c}_1)) A_1^n + (\lambda_S + \hat{c}_1) 2 a_0^n], \\ a_5^n &= \frac{1}{\Delta} [Y S_p A_1^{n-1} - (u \lambda_m + t_d c_2) A_1^n - c_2 2 a_0^n], \\ a_6^n &= \frac{1}{\Delta} [Y S_p A_2^{n-1} - (u \lambda_m + t_d c_2) A_2^n + \hat{c}_2 2 a_0^n], \\ \hat{a}_i^n &= a_i^n (a_0^n \rightarrow \hat{a}_0^n, A_{1,2}^n \rightarrow \hat{A}_{1,2}^n, A_{1,2}^{n-1} \rightarrow \hat{A}_{1,2}^{n-1} - t_d \hat{A}_{1,2}^n), \\ &\quad i = 1, 2, 4, 5, 6; \end{aligned} \quad (\Pi 4)$$

$$A_{1,2,3}^n = a_{1,4,5}^n (a_0^n \rightarrow 0, A_1^{n,n-1} \rightarrow I_1^{n,n-1}),$$

$$\hat{A}_{1,2,3}^n = \hat{a}_{1,4,5}^n (\hat{a}_0^n \rightarrow 0, \hat{A}_1^{n,n-1} \rightarrow \hat{I}_1^{n,n-1}),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= 2[Y(SX - M^2 Y) - m^2 A_z], \quad u = S_X - T, \quad \lambda_X = X^2 - 4 m^2 M^2, \\ S_p &= S + X, \quad 2 a_0^n = A_1^{n-1} + A_2^{n-1} + t_d A_1^n + u A_3^n, \\ 2 \hat{a}_0^n &= \hat{A}_1^{n-1} + \hat{A}_2^{n-1} - t_d \hat{A}_2^n + u \hat{A}_3^n, \end{aligned} \quad (\Pi 5)$$

$$I_1^0 = \hat{I}_1^0 = 1/\sqrt{A_z}, \quad I_1^1 = C_z^{-1/2}, \quad \hat{I}_1^1 = \hat{C}_z^{-1/2},$$

$$I_1^2 = B_z C_z^{-3/2}, \quad \hat{I}_1^2 = -\hat{B}_z \hat{C}_z^{-3/2},$$

далее:

$$c_1 = X S_X - 2 M^2 Y, \quad c_2 = 2 m^2 S_X - X Y,$$

$$B_z = S Y u + X (S_X t - Y T) - 2 M^2 Y t_d,$$

$$C_z = [X t - Y (S - T)]^2 + 4 m^2 [u (S_X t - Y T) - M^2 t_d^2],$$

а соответствующие величины с «крышками» получаются с помощью замены $S \leftrightarrow -X$. Для величин $R_{1,2}(M_X^2, t)$ в (15) получаем

$$\begin{aligned} R_1(M_X^2, t) &= 2 m M \{2 F^{IR} (Q \cdot \xi Q \cdot \eta - t \xi \cdot \eta) - k_2 \cdot \xi Q \cdot \eta t_d I_1^d + k_2 \cdot \xi (k_1 \cdot \\ &\quad \cdot \eta [t_- A_2^d + t_+ a_4^d - Y_d A_1^d + t_m (\hat{a}_4^2 - \hat{A}_2^2) - 2 m^2 (A_1^2 + \hat{A}_1^2 + a_4^2 - \hat{A}_2^2)] + \\ &\quad + k_2 \cdot \eta [t_+ (A_2^d + a_2^d) - Y_d A_2^d + t (\hat{a}_2^2 - \hat{A}_2^2) - 2 m^2 (2 A_2^2 + 2 \hat{A}_2^2 + a_2^2 + \hat{a}_2^2)] + \\ &\quad + p_1 \cdot \xi (k_1 \cdot \eta [t_- A_3^d + t_+ a_5^d + t_m (\hat{a}_5^2 - \hat{A}_3^2) - 2 m^2 (a_5^2 - A_3^2)] + k_2 \cdot \eta [t_+ (A_3^d + \\ &\quad + a_6^d) + t (\hat{a}_6^2 - \hat{A}_3^2) - 2 m^2 (A_3^2 + \hat{A}_3^2 + a_6^2 + \hat{a}_6^2)] + \xi \cdot \eta (t_+ a_0^d + t_m \hat{a}_0^2 - \\ &\quad - 2 m^2 a_0^2)\}, \end{aligned} \quad (\Pi 6)$$

$$\begin{aligned} R_2(M_X^2, t) &= 2 m M t \{F^{IR} (T \xi \cdot \eta + 2 p_1 \cdot \xi Q \cdot \eta) - u k_2 \cdot \xi Q \cdot \eta I_1^d - (T k_1 \cdot \eta - \\ &\quad - S Q \cdot \eta) (k_2 \cdot \xi A_2^d + p_1 \cdot \xi A_3^d) + (T k_2 \cdot \eta - X Q \cdot \eta) (k_2 \cdot \xi \hat{A}_2^2 + p_1 \cdot \xi \hat{A}_3^2) + \end{aligned}$$

$$+ k_2 \cdot \xi [k_1 \cdot \eta (S_X A_1^d - S a_4^d + X \hat{a}_4^2) + k_2 \cdot \eta (S_X A_2^d - S a_2^d + X \hat{a}_2^2)] + \\ + p_1 \cdot \xi (k_1 \cdot \eta [X \hat{a}_5^2 - S a_5^d - 2 Y_m A_1^d + 2 m^2 (A_1^2 + \hat{A}_1^2)] + k_2 \cdot \eta [X \hat{a}_6^2 - \\ - S a_6^d - 2 Y_m A_2^d + 2 m^2 (A_2^2 + \hat{A}_2^2)]) + \xi \cdot \eta (X \hat{a}_0^2 - S a_0^d), \quad (\text{П } 7)$$

где

$$t_m = t - 2 m^2, \quad Y_d = t_m - Y_m, \quad t_{\pm} = t \pm 2 Y_m, \\ F^{IR} = Y_m I_1^d - m^2 (I_1^2 + \hat{I}_1^2), \quad I_1^d = \frac{1}{t_d} (I_1^1 - \hat{I}_1^1), \\ A_i^d = \frac{1}{t_d} (A_i^1 - \hat{A}_i^1), \quad a_i^d = \frac{1}{t_d} (a_i^1 - \hat{a}_i^1). \quad (\text{П } 8)$$

В случае продольно поляризованного $\left(\xi^z = \frac{P_e}{m} (k_1^0 \vec{k}_1 / |\vec{k}_1|, i |\vec{k}_1|) \right)$ ультрарелятивистского $\left(|\vec{k}_1| \simeq k_1^0, \xi^z = \frac{P_e}{m} k_1^z \right)$ лептона со степенью поляризации P_l выражения (П 6), (П 7) значительно упрощаются и принимают вид:

$$R_1(M_X^2, t) \simeq P_l M (2 F^{IR} (Q \cdot \eta Y_m - 2 t k_1 \cdot \eta) + Y_m Q \cdot \eta t_d I_1^d + k_1 \cdot \eta \{ t_- (2 m^2 A_1^d - \\ - I_1^1) + t_+ (2 m^2 a_1^d - A_1^1) + t_m [I_1^1 - \hat{A}_1^1 + 2 m^2 (\hat{a}_1^2 - \hat{A}_1^2)] + Y_m [Y_d A_1^d + \\ + 2 m^2 (A_1^2 + \hat{A}_1^2)] + 2 m^2 [A_1^1 - I_1^1 + t_d A_1^2 - t_d I_1^2 + 2 m^2 (A_1^2 - a_1^2)] \} + \\ + k_2 \cdot \eta \{ t_+ [2 m^2 (A_1^d + a_4^d) - I_1^1 - A_2^1] + t_m (2 m^2 \hat{a}_4^2 - \hat{A}_2^1) - (t + 2 m^2) \times \\ \times (2 m^2 \hat{A}_1^2 - \hat{I}_1^1) + Y_m [Y_d A_2^d + 2 m^2 (A_2^2 + \hat{A}_2^2)] + 2 m^2 [A_2^1 + I_1^1 + t_d A_2^2 + \\ + t_d I_1^2 - 2 m^2 (A_1^2 + a_4^2)] \}), \quad (\text{П } 9)$$

$$R_2(M_X^2, t) \simeq P_l M t ((T k_1 \cdot \eta - S Q \cdot \eta) (2 F^{IR} - 2 m^2 A_1^d + I_1^1) + u Y_m Q \cdot \eta I_1^d + \\ + k_1 \cdot \eta \{ S [A_1^1 - 2 m^2 (A_1^2 + \hat{A}_1^2 + a_1^d)] + X [2 m^2 \hat{a}_1^2 - \hat{A}_1^1] + Y_m S_p A_1^d \} + \\ + k_2 \cdot \eta \{ S [A_2^1 - 2 m^2 (A_2^2 + a_4^d + \hat{A}_2^2)] + X (2 m^2 \hat{a}_4^2 - \hat{A}_2^1) + Y_m S_p A_2^d \} + \\ + (T k_2 \cdot \eta - X Q \cdot \eta) (2 m^2 \hat{A}_1^2 - \hat{I}_1^1)). \quad (\text{П } 10)$$

Наконец, приведем выражения для $S_{1,2}(M_X^2, t)$ (см. [10 — 11]).

$$S_1(M_X^2, t) = \left[t_m Y_m + \frac{1}{2} t_d^2 \right] I_1^d - m^2 t_m (I_1^2 + \hat{I}_1^2) + I_1^0,$$

$$S_2(M_X^2, t) = [t (\lambda_S + X^2 - S_X T) - M^2 (t^2 + Y^2) + 2 m^2 (2 S X + S_X T - \\ - T^2)] I_1^d - X T I_1^1 - S T \hat{I}_1^1 + 2 m^2 [(M^2 t - S (S - T)) I_1^2 + (M^2 t - \\ - X (X + T)) \hat{I}_1^2] - 2 M^2 I_1^0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Stein S. et al.—Phys. Rev., 1975, v. D12, N 7, p. 1884.
2. Bodek A. et al.—Phys. Rev., 1979, v. D20, N 7, p. 1471.
3. Gordon B. A. et al.—Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, p. 615.
4. Clifft R. et al.—CERN/SPSC/74-78, P18, 1974.
5. Krienen F. et al.—CERN/SPSC/74-79, P19, 1974.
6. Wilson R. R.—Rev. Mod. Phys., 1979, v. 51, N 1, p. 259.
7. Alguard M. J. et al.—Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, N 2, p. 70.
8. Mo L. W., Tsai Y. S.—Rev. Mod. Phys., 1969, v. 41, N 1, p. 205; Tsai Y. S.—SLAC—PUB—848, 1971.
9. Bardin D. Yu., Shumeiko N. M.—Nucl. Phys., 1977, v. B127, N 2, p. 242.
10. Ахундов А. А., Бардин Д. Ю., Шумейко Н. М.—ЯФ, 1974, т. 26, вып. 6, с. 1251; ОИЯИ, E2-10147, E2-10205, Дубна, 1976.

11. Шумейко Н. М.— ЯФ, 1979, т. 29, вып. 6, с. 1571.
12. Бардин Д. Ю., Шумейко Н. М.— ЯФ, 1979, т. 29, вып. 4, с. 969.
13. Бардин Д. Ю., Федоренко О. М., Шумейко Н. М.— ЯФ, 1980, т. 32, вып. 3, с. 782.
14. Ахиезер А. И., Рекало М. П. Электродинамика адронов.— Киев, 1977, с. 251.
15. Байер В. Н., Катков В. Н., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов.— М., 1973, с. 351.
16. Биленькая С. И., Биленький С. М., Казаринов Ю. М., Лашидус Л. И.— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, вып. 9, с. 613.
17. Kaur J.— Nucl. Phys., 1977, v. B128, N 2, s. 219.
18. Schwinger J. et al.— Nucl. Phys., 1977, v. B123, N 2, p. 223.

Поступила в редакцию
03.02.81.

Кафедра теоретической физики

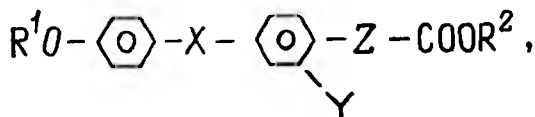
УДК 547.574 : 535.58

А. З. АБДУЛИН, В. С. БЕЗБОРОДОВ, О. Н. БУБЕЛЬ,
А. А. МИНЬКО, В. С. РАЧКЕВИЧ

МЕЗОМОРФНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ БЕНЗОЙНОЙ И КОРИЧНОЙ КИСЛОТ

В ряде работ [1—3] исследовались закономерности изменения мезоморфных свойств нематических жидких кристаллов в зависимости от структурных особенностей строения молекул. Систематических исследований подобного рода для смектических жидких кристаллов известно сравнительно немного [4, 5].

С целью изучения закономерностей изменения жидкокристаллических свойств смектогенных соединений в зависимости от мостиковых звеньев и других фрагментов молекул нами были синтезированы мезоморфные эфиры структуры



где $R^1 = \text{CH}_3, \text{C}_2\text{H}_5, \text{C}_5\text{H}_{11}, \text{C}_{10}\text{H}_{21}$; $R^2 = \text{C}_5\text{H}_{11}, 2-\text{CH}_2\text{C}_4\text{H}_9$; $X = \text{CH} = \text{N}, \text{N} = \text{N}, \text{COO}, -, \text{N} \text{---} \text{N}$; $Y = \text{H}, \text{Cl}$; $Z = \text{CH} = \text{C}(\text{CH}_3), -, \text{а так-}$

же исследованы важные для практического использования общезначимые и электрооптические свойства.

Производные п-алкоксибензильден-п-аминобензойной кислоты ($X = \text{CH} = \text{N}$) получали взаимодействием соответствующих бензальдигидов с аминами [6], эфиры п-(п'-алкоксифенилазо)бензойных кислот ($X = \text{N} = \text{N}$) — согласно методикам [7]. Производные стильбена ($X = \text{CH} = \text{CH}$) синтезированы по Виттигу [8] взаимодействием бензальдигидов с эфирами ω-трифенилфосфонийбромид-п-толуоловой кислоты, а эфиры п-(п'-алкил, п'-алкоксибензоилокси)бензойных кислот ($X = \text{COO}$) получали взаимодействием хлорангидридов соответствующих кислот с эфирами п-оксибензойной кислоты в присутствии пиридина [9]. Окислением производных азобензола ($X = \text{N} = \text{N}$) синтезированы эфиры п-(п-алкоксифенилазокси) бензойных кислот ($X = \text{N} \text{---} \text{N}$) [10].

На рис. 1 представлены микрофотографии типичных текстур жидкокристаллических модификаций, которые проявляются у веществ с указанной структурой молекул.

Исследование данных веществ представляет интерес не только потому, что мезоморфные вещества подобных классов до сих пор мало

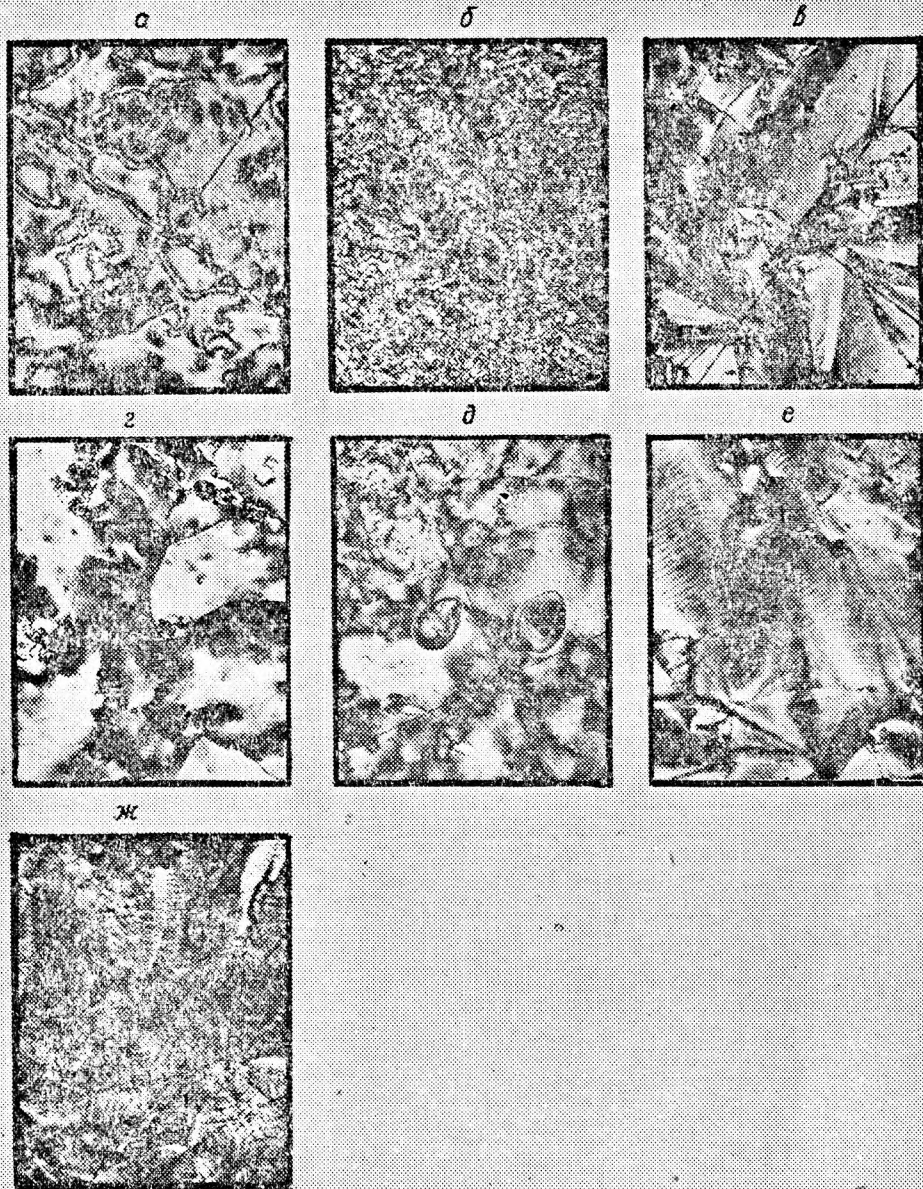


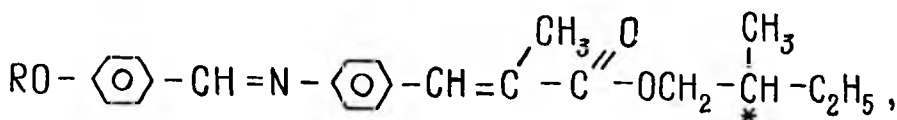
Рис. 1. Типичные текстуры жидкокристаллических состояний веществ структуры: а — шлирен-текстура нематического состояния; б — фокально-коническая текстура холестерической фазы; в — фокально-коническая текстура смектической фазы А; г — текстура мозаики смектической фазы В; д — шлирен-текстура смектической фазы С; е — фокально-коническая текстура смектической хиральной фазы С*; ж — фокально-коническая текстура смектической фазы Е

исследованы, но и потому, что в случае их практической ценности они могут быть легко внедрены в промышленность.

В работе изучены физические свойства некоторых рядов синтезированных соединений, которые наиболее перспективны в практическом отношении.

1. Оптически активные 2-метилбутиловые эфиры п-алкоксибензилиден-п'-амино- α -метилкоричной кислоты.

Эти вещества относятся к ряду оснований Шиффа. Электрооптические и другие физические свойства нехиральных мезоморфных азометиннов широко исследовались ранее (см., например, монографию [15]). Они находят широкое применение при создании различных электрооптических устройств, использующих жидкие кристаллы с отрицательной диэлектрической анизотропией. Структурная формула синтезированного ряда хиральных оснований Шиффа имеет вид:



где $R = \text{CH}_3, \text{C}_2\text{H}_5, \dots, \text{C}_{12}\text{H}_{25}$.

Данный ряд имеет интересные структурные особенности мезофаз, которые отмечаются уже при поляризационно-микроскопическом исследовании. Первые гомологи ряда (I—V) обладают хиральной нематической (холестерической) фазой, которую можно четко идентифицировать как при плавлении, так и при охлаждении вещества. Наличие хирально-нематической фазы у данных соединений сопровождается появлением характерной голубовато-зеленой окраски образцов вблизи точки просветления — так называемой «голубой» фазы. Для рацемических эфиров этого не наблюдается. Такое поведение отмечается в литературе при описании эфиров холестерина [11, 12], а также оптически активного ди(–) 2-метилбутилтерефталиден-бис-аминобензоата [13]. При охлаждении изотропного расплава соединений (I—V) между скрещенными поляризаторами появляется однородная бледно-голубая окраска образца, которая при дальнейшем охлаждении приобретает зеленоватый оттенок и далее переходит в типичную фокально-коническую текстуру холестерической фазы, которая может быть переведена в планарную путем механического сдвига. Голубая фаза существует только в очень узком температурном интервале. Ступенчатый характер перехода от типичной фокально-конической текстуры холестерика к изотропному расплаву подтверждается не только поляризационно-микроскопическими наблюдениями, как в работе [6], но и методом дифференциальной сканирующей калориметрии.

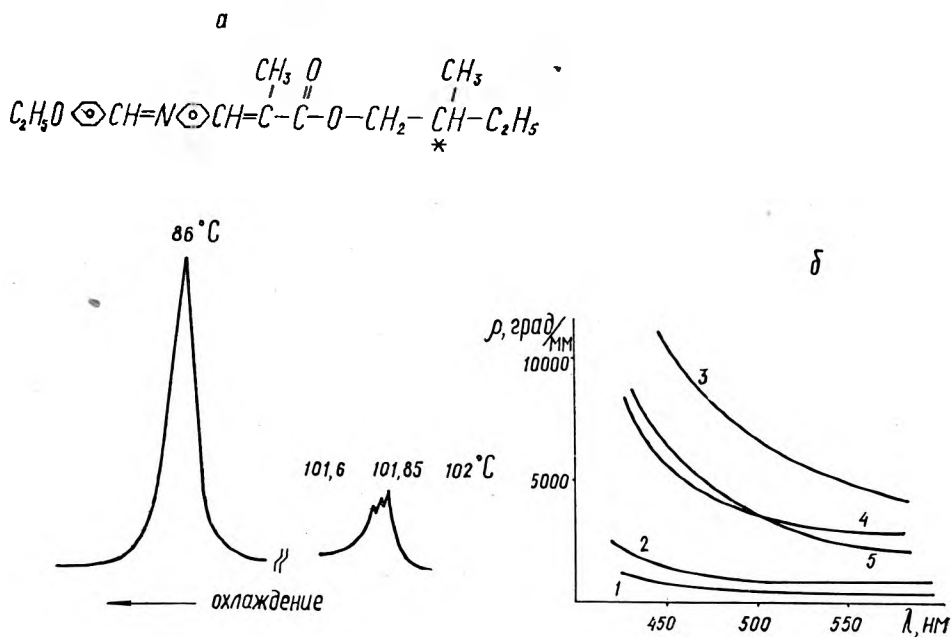


Рис. 2. Дериватограмма оптически активного 2-метилбутилового эфира п-этоксисибензилиден-п-амино- α -метилкоричной кислоты (а):

1 — переход из хиральнонематической в смектическую фазу А (теплота перехода 0,94 КДж/моль); 2 — переход из изотропной фазы в «голубую» и хиральнонематическую фазы (общая теплота перехода 0,19 КДж/моль).

Зависимость приведенного вращения плоскости поляризации ρ от длины волны падающего света λ для 2-метилбутилового эфира п-этоксисибензилиден-п-амино- α -метилкоричной кислоты (II) (б):

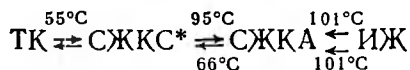
1 — при 100 °C; 2 — 99,5 °C; 3 — 96,5 °C; 4 — для метокси соединения (I) при 65 °C; 5 — для пропоксисоединения (III) при 85 °C

На рис. 2, а приведена дериватограмма для (II) гомолога данного ряда соединений, на которой отчетливо различаются пики соответствующих фазовых переходов, достаточно уверенно подтверждающие наличие полиморфизма в холестерической жидкокристаллической фазе.

Поляризационно-микроскопические наблюдения свидетельствуют об изотропности высокотемпературной «голубой» фазы и о появлении гиротропии у переохлаждающейся низкотемпературной модификации. Вопрос об окончательной идентификации и структуре «голубой» фазы дискутируется в печати. Большинство авторов [6, 13] склоняется к мнению, что «голубая» фаза является холестерической. При исследовании влияния температуры на электронные спектры поглощения наблюдаются две полосы поглощения, которые ведут себя по-разному с изменением температуры. Коротковолновая полоса, положение максимума которой из-за большой экстинкции удалось определить лишь в спектре растворов (~ 340 нм), обусловлена поглощением молекул данных веществ. Край этой полосы не смещается с температурой в мезофазе. Более длинноволновая полоса — это так называемая полоса селективного отражения света, обусловленная брэгговской дифракцией света на периодической структуре мезофазы. Она появляется при переходе изотропная жидкость — ЖК и меняет свое положение с температурой. При этом она движется из области полосы собственного поглощения в красную сторону спектра по мере понижения температуры. При переходе из «голубой» фазы в хирально-нематическую образуется фокально-коническая текстура, которая из-за рассеяния сильно уменьшает прозрачность образца. Спектры дисперсии оптического вращения планарной текстуры хирально-нематической фазы в области 400—600 нм (т. е. вне полосы собственного поглощения) типичны для коротковолновой части кривой аномальной дисперсии холестерических жидких кристаллов вблизи полосы собственного поглощения вещества. Поскольку шаг спиральной структуры указанных гомологов вблизи перехода «голубая» фаза — холестерик составляет 4—5 мкм, то полоса селективного отражения должна лежать в ИК области спектра. Тот факт, что голубовато-зеленая окраска образца в отличие от холестерина [11] наблюдается при скрещенных поляризаторах в поляризационном микроскопе для этих соединений, может быть обусловлен близостью полосы собственного поглощения вещества (максимум 340 нм, для эфиров холестерина 200 нм) и возникновением кругового дихроизма на крыле этой полосы; как следствие, прошедший свет в сине-голубой части спектра оказывается эллиптически поляризованным и не гасится анализатором микроскопа.

Соединения (II—V), кроме «голубой» и хирально-нематической фаз, обладают смектической фазой А, а соединения (VI—VIII) только смектической А-фазой. При дальнейшем увеличении длины алкильной цепи в соединениях (IX—XII) наблюдается смектический полиморфизм. Анализируя вид получающихся текстур, можно сказать, что низкотемпературной смектической фазой, получающейся как при плавлении, так и при охлаждении этих веществ, является хиральная смектическая фаза С*, а высокотемпературной — смектическая фаза А.

Для примера приведем диаграмму фазовых переходов для X гомолога (2-метилбутиловый эфир-п-децилоксибензилиден-п'-амино- α -метилкоричной кислоты):



В поляризационном микроскопе смектическая фаза С* четко идентифицируется по появлению поперечных полос в фокально-конических доменах, присущих смектической фазе А: появляется так называемая полосатая (strip) текстура (сравните фотографии рис. 1, в и е). Хотя упаковка молекул в таком домене весьма сложна, однако в нулевом приближении ось спиральной упаковки можно считать расположенной параллельно удерживающим жидкий кристалл поверхностям. В этом случае, периоди-

ческое изменение интенсивности света (полосчатость) обусловлено периодическим изменением показателя преломления вдоль оси скручивания. Шаг такой спирали можно оценить по расстоянию между темными или светлыми полосами: для указанного вещества в области существования смектической фазы C^* он изменяется от 3 до 8 мкм в зависимости от температуры.

Как показано в работах [13, 14], гомологи (IX—XII) обладают в смектической фазе C^* сегнетоэлектрическими свойствами, обуславливающими наличие линейных электрооптических эффектов [15]. Согласно Мейеру [16], локальная симметрия хиральных смектиков C^* приводит к появлению некоторого упорядочения дипольных моментов молекул в пределах одного смектического слоя. Каждый мономолекулярный слой будет сегнетоэлектрическим с поляризацией параллельной слоям (перпендикулярной к оси спирали) и перпендикулярной к C -директору. Полагая, что смектические слои в фокально-конической текстуре примерно перпендикулярны к удерживающим подложкам, для (X) гомолога рассматриваемого ряда соединений, можно попытаться оценить величину спонтанной поляризации P_μ по исчезновению strip-текстуры смектической фазы C^* в постоянном электрическом поле, используя формулу [15]

$$E_k = \frac{\pi^4 k_{22}}{4 P^2 P_\mu}, \quad (1)$$

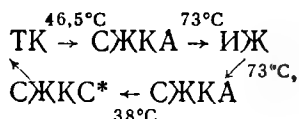
где E_k — напряженность электрического поля, требуемого для раскрутки спирали (исчезновение strip — текстуры); k_{22} — модуль кручения; P — шаг спирали. Для нашего случая $E_k = 1,2 - 1,3 \cdot 10^3$ В/см, $P = 5$ мкм, $k_{22} = 10^{-11}$ Н. Величина P_μ тогда будет равна $8,2 \cdot 10^{-10}$ Кл/см², что хорошо согласуется с величиной $9 \cdot 10^{-10}$ Кл/см², приведенной в работе [14]. Величина E_k примерно на порядок ниже величины критического поля, необходимого для раскручивания спирали холестерика с таким же шагом, что свидетельствует в пользу сегнетоэлектрического характера этого электрооптического эффекта в смектике C^* . Однако надо отметить, что при ориентации оси спирали примерно перпендикулярно к подложкам, требуется напряженность поля сравнимая с напряженностью поля для холестериков.

2. 2-метилбутиловые эфиры п-(п-алкилокси)дифенил карбоновой кислоты. Как и у соединений ранее рассмотренного ряда, в данном ряду соединений начиная с X-го гомолога наблюдается хиральная смектическая фаза C^* .

Известно [17], что при распространении линейно-поляризованного света перпендикулярно к оси спирали холестерического жидкого кристалла с шагом порядка нескольких микрон наблюдается дифракция света на периодической текстуре с периодом $L = P/2$, где P — шаг спирали. Характер дифракции (интенсивность дифракционных максимумов, угол дифракции) приближенно описывается теорией, сходной с теорией Рамана — Ната для дифракции света на ультразвуковых волнах.

Аналогичный случай имеет место и для хиральной смектической фазы C^* в фокально-конической текстуре. Однако в этом случае периодичность структуры $L = P$ и угол дифракции будет в два раза меньше, чем для холестерика с таким же шагом.

Рассматриваемый X-ый гомолог ряда имеет диаграмму фазовых переходов



т. е. смектическая фаза C^* монотропна. Если на такой жидкий кристалл падает параллельный пучок линейно-поляризованного света, то наблюдается дифракция в виде кольца, поскольку ось спирали, примерно параллельная поверхности образца, будет распределена по площади пре-

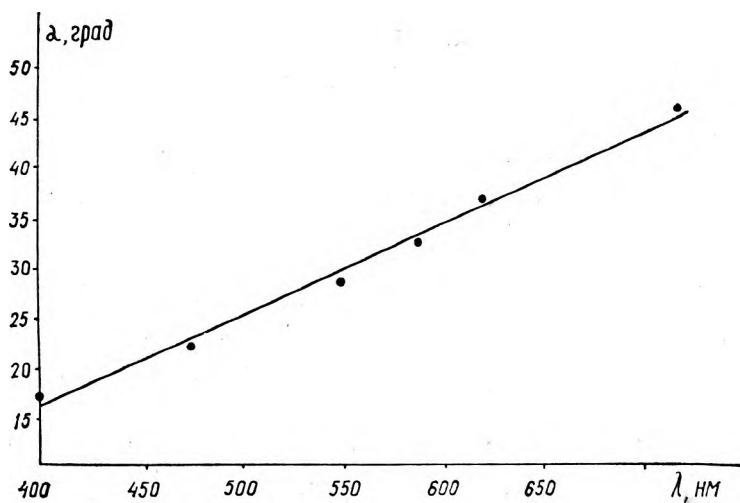


Рис. 3. Зависимость угла дифракции α от длины волны падающего λ света для 2-метилбутилового эфира п-(п'-децилоксидифенил) карбоновой кислоты (фокально-коническая текстура хиральной смектической фазы С*)

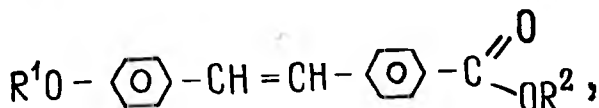
парата случайным образом. Условием дифракционных максимумов будет

$$\sin \alpha = m \frac{\lambda}{L} \quad (2)$$

где α — угол дифракции; m — порядок дифракционного максимума ($m=0, 1, 2 \dots$); λ — длина волны падающего света; L — периодичность структуры. Поскольку для смектика С* $L=P$, то шаг структуры легко определяется из формулы (2). В случае 2-метилбутилового эфира п-(п'-децилоксидифенил) карбоновой кислоты $P=1, 2$ мкм (без коррекции на показатель преломления среды).

Ясно, что при освещении хиральной смектической структуры белым линейно-поляризованным светом мы будем иметь на экране систему цветных колец. Положение их можно изменить, воздействуя на кристалл внешним полем и изменяя при этом шаг спиральной структуры. На рис. 3 представлена зависимость угла дифракции от длины волны падающего света для X-го гомолога указанного ряда соединений. Обычно наблюдается несколько порядков (2—3) дифракции света на такой периодической структуре.

3. Эфиры п-(п'-алкоксистирил) бензойных кислот



где I — $R^1=\text{C}_5\text{H}_{11}$, $R^2=\text{C}_5\text{H}_{11}$; II — $R^1=\text{C}_5\text{H}_{11}$, $R^2=2-\text{CH}_3\text{C}_4\text{H}_8$; III — $R^1=\text{C}_{10}\text{H}_{21}$, $R^2=2-\text{CH}_3\text{C}_4\text{H}_8$; IV — $R^1=\text{C}_{10}\text{H}_{21}$, $R^2=\text{C}_5\text{H}_{11}$.

Данным соединениям присущи следующие мезоморфные превращения. У соединения (II) наблюдается только смектическая А фаза в области температур 94—104,5 °С; у нормального амилового эфира этой кислоты (соединение I) с менее уширенной формой молекул, кроме этой мезоморфной модификации, при температуре 128,5 °С появляется смектическая фаза С, которая при температуре 99 °С переходит в смектику Е. (см. рис. 1, ж). Похожая текстура наблюдается в температурном интервале 86—97,5 °С у оптически активного 2-метилбутилового эфира п-(п'-децилоксистирил) бензойной кислоты (III). При повышении температуры вещество переходит в смектическую А фазу, кроме того, данное соединение обладает гиротропными и сегнетоэлектрическими свойствами,

аналогично (IX—XII) гомологам описанных ранее оснований Шиффа. Соединение IV обладает наиболее ярко выраженным смектическим полиморфизмом. Для данного соединения наблюдаются четыре смектические фазы: А, С, В, Е (см. рис. 1) в порядке убывания температуры и одновременно увеличения сложности структурной организации. Все соединения данного ряда обладают люминесцентными свойствами. В таблице приведены их некоторые спектрально-люминесцентные характеристики.

Спектральные характеристики, времена высвечивания (τ), квантовый выход (η) эфиров п— (п' — алоксистирил) — бензойных кислот в кристаллическом и жидкокристаллическом состояниях

Вещество	λ поглощ., нм	λ люмин., нм	τ , нс	$\eta_{\text{тк}}$	$\eta_{\text{жк}}$
I	325	387	7,6	0,51	0,35
II	325	387	6,3	0,42	0,29
III	325	387	3,5	0,31	0,20
IV	325	387	4,7	0,34	0,24

Таким образом, в результате целенаправленного синтеза жидкокристаллических карбоксилатов, отличающихся различными фрагментами молекул, можно получить жидкие кристаллы не только с заданными мезоморфными свойствами, но и получить соединения с заданным набором качеств, представляющих практический интерес. Данные вещества могут быть использованы в качестве хиральных добавок при создании нематических жидкокристаллических композиций, а также управляемых устройств для монохроматизации света, люминесцентных индикаторных устройств и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray G. W.— Mol. cryst., 1966, v. 1, p. 333.
2. Rondeau R. E., Berwick M. A., Steppel R. N., Serve M. P.— J. Am. Chem. Soc., 1972, v. 94, p. 1096.
3. Gray G. W.— Mol. cryst. liq. cryst., 1973, v. 21, p. 161.
4. Keller P., Liebert L., Strzelecki L.— J. Phys. (Fr.), 1976, v. 37, Colloq. 3, p. 27.
5. Keller P., Juge S., Liebert L., Strzelecki L., Compt. Rend. Acad. Sci., 1976, 282 C, 639.
6. Володько Л. В., Бубель О. Н., Абдулин А. З., Безбородов В. С., Рачкевич В. С.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1977, № 2, с. 63.
7. Бубель О. Н., Безбородов В. С., Абдулин А. З.— ЖОрХ, 1979, т. 15, с. 2153.
8. Маеркер А.— В сб.: Органические реакции.— М., 1967, т. 14, с. 287.
9. Бубель О. Н., Безбородов В. С. Тез. докл. III Международной конференции социалистических стран по жидким кристаллам.— Будапешт, 1979, G-28.
10. Безбородов В. С., Бубель О. Н., Кузьмичкин П. В.— ЖОрХ, 1980, т. 16, с. 138.
11. Gray G. W.— J. Chem. Soc., 1956, p. 3733.
12. Demus D., Hahn H. G., Kusehel F.— Mol. cryst. liq. cryst., 1978, 44, 61.
13. Coates D., Harrison K. J., Gray G. W.— Mol. cryst. liq. cryst., 1973, v. 22, p. 99.
14. Володько Л. В., Последович Н. Р., Шерешовец Н. Н.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1978, № 3, с. 78.
15. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов.— М., 1978, с. 329.
16. Meyer R. B., Liebert L., Strzelecki L., Keller P.— J. Phys. (Fr.), 1975, v. 36, L-69.
17. Чандрасекар С. Жидкие кристаллы.— М., 1980, с. 244.

РАСЧЕТ ОБЪЕМНЫХ КАЛЕЙДОСКОПИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ С УЧЕТОМ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ

Наглядный вывод групп пространственной симметрии можно осуществить калейдоскопически с помощью зеркал. Для трехмерного пространства имеется семь калейдоскопов: три для кубических структур (рис. 1, δ —ж) и четыре для остальных (рис. 1, a — z). В монографии [1] детально изложены их геометрические характеристики. В данной работе рассматриваются объемные калейдоскопические резонаторы. Различными методами [2—7] можно получить точные решения уравнений Максвелла для всех этих резонаторов. В настоящей работе предлагается новый метод построения собственных типов колебаний (СТК) калейдоскопических резонаторов. Метод разделения переменных в обычном своем виде применим к решению довольно узкого круга краевых задач [8]. В частности, из указанных семи резонаторов он непосредственно применим только к прямоугольному. Одна из возможностей дополнения метода появляется при рассмотрении изображенных на рис. 1 объемных резонаторов. Собственные типы колебаний их можно рассчитать методом разделения переменных с учетом вырождения, обусловленного соответствующей симметрией. В данной работе этот метод используется для построения СТК четырех резонаторов: куба и тетраэдров. В них нет выделенного направления (все три направления эквивалентны), поэтому собственные решения этих четырех резонаторов необходимо искать с учетом перестановочного (кубического) вырождения. Для нахождения СТК полых идеальных объемных резонаторов необходимо, как известно, проинтегрировать волновое уравнение Гельмгольца для компонент электрического вектора.

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} + k^2 E_j = 0, \quad j = x, y, z \quad (1)$$

при условии выполнения соотношения $\operatorname{div} E = 0$ и равенства нулю касательной составляющей электрического вектора на границе резонатора. С учетом перестановочного вырождения решения волнового уравнения (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_x = & \sum_{i, j, l=0}^1 \left[A_{xyz}^{ijl} \sin\left(k_x x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_y y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_z z + l \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ & + A_{yxx}^{ijl} \sin\left(k_y x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_z y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_x z + l \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + A_{zxy}^{ijl} \sin\left(k_z x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_x y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_y z + l \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + A_{xzy}^{ijl} \sin\left(k_x x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_z y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_y z + l \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + A_{zyx}^{ijl} \sin\left(k_z x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_y y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_x z + l \frac{\pi}{2}\right) + \\ & \left. + A_{yxz}^{ijl} \sin\left(k_y x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_x y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_z z + l \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Вводя в (2) постоянные интегрирования B и C вместо A , получаем соответственно выражения для E_y и E_z составляющих электрического поля. Компоненты волнового вектора в (2) удовлетворяют обычному соотношению $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Однако каждая из них не определяет, как обычно, периодических изменений поля вдоль соответствующей координатной оси. Решение (2) инвариантно относительно перестановок

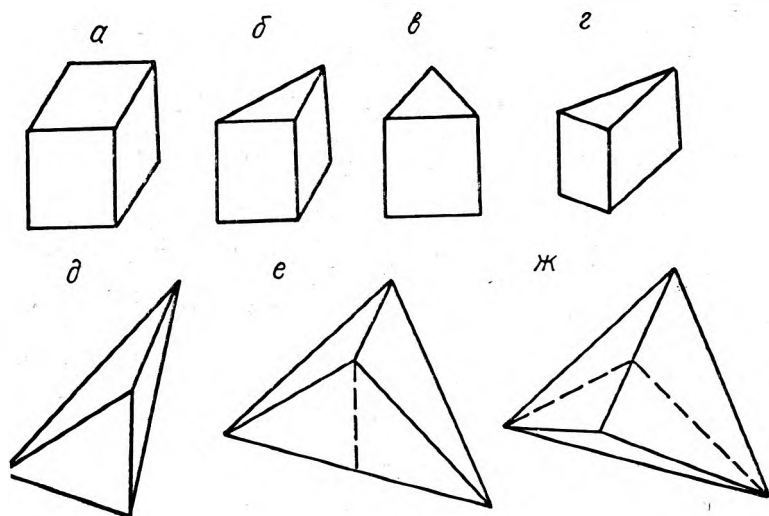


Рис. 1

декартовых переменных и индексов x, y, z . Такая инвариантность согласуется с эквивалентностью трех взаимоортогональных направлений кубических структур, поэтому вполне естественно искать СТК куба и тетраэдров в таком виде.

Если не ограничивать изменение постоянных интегрирования и переменных x, y, z , то решение волнового уравнения (2) как множество значений функции будет полностью определено положительными значениями компонент волнового вектора, удовлетворяющими одному из шести неравенств: $k_x \leq k_y \leq k_z, k_y \leq k_z \leq k_x, k_z \leq k_x \leq k_y, k_x \leq k_z \leq k_y, k_y \leq k_x \leq k_z$. Вследствие указанной инвариантности выход за пределы одного (любого) из этих неравенств не приводит к новым значениям функции (2). Для определенности будем считать $k_x \leq k_y \leq k_z$.

Удовлетворяя граничным условиям поочередно для каждого из резонаторов путем выбора постоянных интегрирования и значений компонент волнового вектора в решении (2), придем к следующему результату. Спектр частот всех четырех резонаторов определяется одной формулой

$$\nu_{m, n, p} = \frac{1}{\lambda_{m, n, p}} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}. \quad (3)$$

Формула (3) следует из одинаковых для этих резонаторов дисперсионных соотношений:

$$k_x = \frac{m\pi}{2a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{2a}, \quad k_z = \frac{p\pi}{2a}. \quad (4)$$

Входящие в нее целые числа независимо от формы резонатора подчиняются неравенству $m \leq n \leq p$. Для куба это неравенство является единственным ограничением на значения целых чисел. В случае тетраэдров имеются дополнительные ограничивающие требования к их значениям, поэтому спектр частот тетраэдра представляет собой часть спектра частот куба.

Собственным значениям частот (3) соответствуют собственные решения уравнений Максвелла. Электрическое поле этих решений в случае куба запишется в виде:

$$E_x = A_{xyz}^{100} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z + A_{yzx}^{100} \cos k_y x \sin k_z y \sin k_x z + \\ + A_{zxy}^{100} \cos k_z x \sin k_x y \sin k_y z + A_{xzy}^{100} \cos k_x x \sin k_z y \sin k_y z + \\ + A_{zyx}^{100} \cos k_z x \sin k_y y \sin k_x z + A_{yxz}^{100} \cos k_y x \sin k_x y \sin k_z z,$$

$$\begin{aligned}
E_y &= B_{xyz}^{010} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z + B_{yzx}^{010} \sin k_y x \cos k_z y \sin k_x z + \\
&+ B_{zxy}^{010} \sin k_z x \cos k_x y \sin k_y z + B_{xzy}^{010} \sin k_x x \cos k_z y \sin k_y z + \\
&+ B_{zyx}^{010} \sin k_z x \cos k_y y \sin k_x z + B_{yxz}^{010} \sin k_y x \cos k_x y \sin k_z z, \\
E_z &= C_{xyz}^{001} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z + C_{yzx}^{001} \sin k_y x \sin k_z y \cos k_x z + \\
&+ C_{zxy}^{001} \sin k_z x \sin k_x y \cos k_y z + C_{xzy}^{001} \sin k_x x \sin k_z y \cos k_y z + \\
&+ C_{zyx}^{001} \sin k_z x \sin k_y y \cos k_x z + C_{yxz}^{001} \sin k_y x \sin k_x y \sin k_z z.
\end{aligned} \quad (5)$$

Временной множитель $\exp(i\omega t)$ и компоненты вектора магнитного поля $-ik\vec{H} = \text{rot } \vec{E}$ не выписываются.

В выражение (5) входят 18 постоянных интегрирования (A, B, C). Однако только 12 из них могут принимать любые в общем случае комплексные значения. Значения остальных шести находятся из условия $\text{div } E = 0$. Так как выбор независимых постоянных произволен, нет смысла конкретизировать выражение (5) и аналогичные ему выражения для полей СТК других резонаторов учетом условия, $\text{div } E = 0$. Необходимо помнить, что учет его приводит к дополнительным взаимосвязям между постоянными интегрирования. Для куба они имеют вид шести однородных алгебраических уравнений. Первое из них запишется в виде

$$k_x A_{xyz} + k_y B_{xyz} + k_z C_{xyz} = 0. \quad (6)$$

Остальные пять уравнений получаются из уравнения (6) путем перестановки индексов x, y, z .

Таким образом каждой тройке индексов (m, n, p) соответствует одно значение собственной частоты и в общем случае двенадцать независимых собственных решений. Это означает, что СТК куба в общем случае двенадцатикратно вырождены. Поле описывается суперпозицией двенадцати независимых решений. Оно не определяется однозначно частотой и может быть довольно разнообразным по своей структуре и, в частности, по свойствам ее симметрии. Исключение составляют отдельные группы колебаний. Например, кратность вырождения типов колебаний $(0, n, n)$, в их числе и основного колебания $(0, 1, 1)$, равна не двенадцати, а трем. Основной собственной частоте кубического резонатора

$$\nu_{0,1,1} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \quad (7)$$

соответствует поле СТК в виде суперпозиции трех линейно независимых решений граничной задачи:

$$\begin{aligned}
E_{0,1,1} &= E_1 + E_2 + E_3, \quad E_1 = \left\{ A \sin\left(\frac{\pi}{2a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a} z\right), 0, 0 \right\}, \\
E_2 &= \left\{ 0, B \sin\left(\frac{\pi}{2a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a} z\right), 0 \right\}, \quad E_3 = \left\{ 0, 0, C \sin\left(\frac{\pi}{2a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a} y\right) \right\}
\end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из (8), базисные решения отличаются лишь ориентацией поля.

Возможен другой подход к изучению и построению типов колебаний кубического резонатора. СТК кубического резонатора получаются из СТК прямоугольного резонатора в предельном случае при одинаковой длине его ребер. При этом сохраняется условная классификация типов колебаний. Каждой тройке индексов соответствуют два (E и H) решения. Индексы могут принимать любые целочисленные значения. Если исключить перестановочные значения индексов, которым соответствуют одинаковые значения частоты, и сложить соответствующие им различные независимые решения, то придем к СТК куба в виде (3)–(5). Так как набор СТК прямоугольного параллелепипеда считается полным, то из этого предельного перехода следует, что построенный методом вырож-

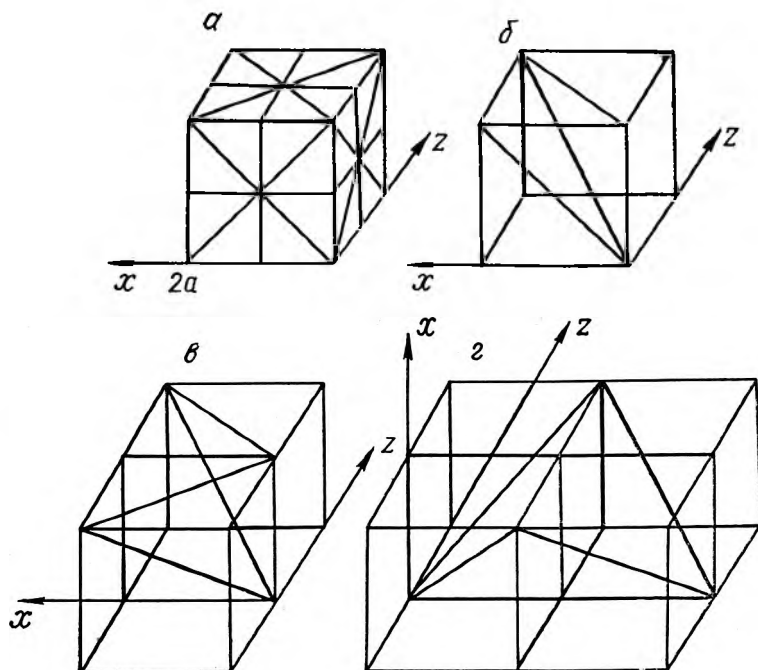


Рис. 2

денных колебаний набор СТК куба также можно считать полным. Это обстоятельство будет использовано в дальнейшем при оценке полноты решений тетраэдров.

Спектр частот первого тетраэдра (рис. 2, б) следует из (3), (4) при четных значениях индексов. Поле СТК представляется в виде суммы трех независимых собственных решений граничной задачи.

$$\begin{aligned}
 E_x &= A_{xzy}^{100} \cos(k_x x) (\sin k_z y \sin k_y z - \sin k_y y \sin k_z z) + \\
 &+ A_{yxz}^{100} \cos(k_y x) (\sin k_x y \sin k_z z - \sin k_z y \sin k_x z) + \\
 &+ A_{zyx}^{100} \cos(k_z x) (\sin k_y y \sin k_x z - \sin k_x y \sin k_y z), \\
 E_y &= A_{yxz}^{100} \cos(k_y y) (\sin k_z x \sin k_x z - \sin k_x x \sin k_z z) + \\
 &+ A_{zyx}^{100} \cos(k_z y) (\sin k_x x \sin k_y z - \sin k_y x \sin k_x z) + \\
 &+ A_{xzy}^{100} \cos(k_x y) (\sin k_y x \sin k_z z - \sin k_z x \sin k_y z), \\
 E_z &= A_{zyx}^{100} \cos(k_z z) (\sin k_y x \sin k_x y - \sin k_x x \sin k_y y) + \\
 &= A_{xzy}^{100} \cos(k_x z) (\sin k_z x \sin k_y y - \sin k_y x \sin k_z y) + \\
 &+ A_{yxz}^{100} \cos(k_y z) (\sin k_x x \sin k_z y - \sin k_z x \sin k_x y).
 \end{aligned} \quad (9)$$

Однако согласно условия $\text{div } E = 0$ только два из них являются независимыми. Это означает, что СТК в общем случае двукратно вырождены. Вырождение снимается лишь в некоторых частных случаях, соответствующих определенным значениям индексов. Один из таких частных случаев реализуется при значениях индексов основного типа колебания 0, 2, 4. Основной частоте

$$\nu_{0, 2, 4} = \frac{\sqrt{5}}{2a} \quad (10)$$

соответствует строго фиксированная картина поля. С точностью до постоянного множителя компоненты электрического поля основного СТК запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 E_x &= \sin \frac{\pi}{a} y \sin \frac{\pi}{a} z \left(\cos \frac{\pi}{a} y - \cos \frac{\pi}{a} z \right), \\
 E_y &= \sin \frac{\pi}{a} z \sin \frac{\pi}{a} x \left(\cos \frac{\pi}{a} z - \cos \frac{\pi}{a} x \right), \\
 E_z &= \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y \left(\cos \frac{\pi}{a} x - \cos \frac{\pi}{a} y \right)
 \end{aligned} \quad (11)$$

При оценке полноты набора СТК удобнее сравнивать СТК тетраэдра и куба вдвое меньших, чем на рис. 2, *а* размеров. Относительное расположение этих фигур в выбранной системе координат показано на рис. 2, *б*. Нетрудно убедиться, что спектры частот тетраэдрического и такого кубического резонаторов совпадают. Кратность вырождения частот тетраэдра в шесть раз меньше кратности вырождения частот куба. Однако и объем тетраэдра во столько же раз меньше объема куба. Поэтому асимптотическая спектральная плотность их СТК будет одинакова и определяется известной формулой Рэлея — Джинса [9]. Это дает основание предполагать, что получен весь набор СТК первого тетраэдрического резонатора.

Как видно из рис. 2, *в*, второй тетраэдр может быть составлен из двух предыдущих. Следовательно решения первого тетраэдра составляют половину решений второго тетраэдра. Эти решения имеют антисимметричные по z компоненты поля E_x , E_y . Вторая симметричная половина решений, как следует из граничной задачи, может быть представлена вместе со своими дисперсионными соотношениями в виде

$$\begin{aligned}
 E_x &= A_{xzy}^{011} \sin(k_x x) (\cos k_z y \cos k_y z - \cos k_y y \cos k_z z) + \\
 &+ A_{yxz}^{011} \sin(k_y x) (\cos k_x y \cos k_z z - \cos k_z y \cos k_x z) + \\
 &+ A_{zyx}^{011} \sin(k_z x) (\cos k_y y \cos k_x z - \cos k_x y \cos k_y z), \\
 E_y &= A_{yxz}^{011} \sin(k_y y) (\cos k_z x \cos k_x z - \cos k_x x \cos k_z z) + \\
 &+ A_{zyx}^{011} \sin(k_z y) (\cos k_x x \cos k_y z - \cos k_y x \cos k_x z) + \\
 &+ A_{xzy}^{011} \sin(k_x y) (\cos k_y x \cos k_z z - \cos k_z x \cos k_y z), \\
 E_z &= A_{zyx}^{011} \sin(k_z z) (\cos k_y x \cos k_x y - \cos k_x x \cos k_y y) + \\
 &+ A_{xzy}^{011} \sin(k_x z) (\cos k_z x \cos k_y y - \cos k_y x \cos k_z y) + \\
 &+ A_{yxz}^{011} \sin(k_y z) (\cos k_x x \cos k_z y - \cos k_z x \cos k_x y).
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\cos(k_x a) = 0, \quad \cos(k_y a) = 0, \quad \cos(k_z a) = 0. \quad (13)$$

Дисперсионным соотношениям (13) соответствует свой спектр частот, который получается из формулы (3) при нечетных значениях индексов. Таким образом спектр частот второго тетраэдра определяется значениями индексов одинаковой четности по формуле (3). Причем четным индексам соответствует поле СТК (9), нечетным — (12). Число собственных частот во втором тетраэдре удваивается по сравнению с их числом в первом тетраэдре. Так как кратность их вырождения сохраняется и по-прежнему равна двум, то и число СТК также удваивается. Отношение числа СТК пропорционально отношению объемов. Это означает, что набор СТК второго тетраэдра также является полным.

Основной тип колебания резонатора невырожден и достигается при значениях индексов 1, 1, 3. Частота и, с точностью до множителя, поле его СТК запишутся в виде

$$v_{1, 1, 3} = \frac{\sqrt{11}}{4a} \quad (14)$$

$$E_x = \sin \left(\frac{\pi}{2a} x \right) \left(\cos \frac{3\pi}{2a} y \cos \frac{\pi}{2a} z - \cos \frac{\pi}{2a} y \cos \frac{3\pi}{2a} z \right),$$

$$E_y = \sin\left(-\frac{\pi}{2a} y\right) \left(\cos \frac{3\pi}{2a} z \cos \frac{\pi}{2a} x - \cos \frac{\pi}{2a} z \cos \frac{3\pi}{2a} x \right), \quad (15)$$

$$E_z = \sin\left(-\frac{\pi}{2a} z\right) \left(\cos \frac{3\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{2a} y - \cos \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{3\pi}{2a} y \right).$$

Спектр собственных частот следующего тетраэдра (рис. 2, з), как и предыдущего (рис. 2, в), определяется по формуле (6) значениями индексов одинаковой четности. Кратность вырождения частот в общем случае увеличивается в два раза. Собственной частоте соответствует собственное решение в виде суммы решений (9) и (12). Таким образом с переходом от второго к третьему резонатору число СТК удвоится за счет увеличения кратности вырождения СТК. Изменение числа СТК находится в соответствии с соотношением их объемов. Это дает основания предполагать, что получен весь набор СТК третьего тетраэдрического резонатора.

Минимальная собственная частота, которой соответствует нетривиальное (не нулевое) собственное решение определяется значениями индексов 0, 2, 2 и равна

$$\nu_{0, 2, 2} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \quad (16)$$

Основной тип колебания невырожден. Поле его с точностью до множителя можно записать в виде

$$E_x = \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \left(\cos \frac{\pi}{a} z - \cos \frac{\pi}{a} y \right), \quad E_y = \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \left(\cos \frac{\pi}{a} x - \cos \frac{\pi}{a} z \right), \\ E_z = \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \left(\cos \frac{\pi}{a} y - \cos \frac{\pi}{a} x \right). \quad (17)$$

Аналогично можно построить СТК оставшихся трех из семи изображенных на рис. 1 резонаторов. СТК призм с основанием в виде равносностороннего и прямоугольного с острыми углами $\pi/3$, $\pi/6$ треугольников, как показано в работе [10], представляются суперпозицией вырожденных колебаний прямоугольной призмы той же высоты и размерами в основании $b \times b \sqrt{3}$ (b — высота равносностороннего треугольника). СТК призм с равнобедренным прямоугольником в основании строятся из вырожденных СТК призмы с квадратным основанием.

Следует заметить, что СТК тетраэдров были частично получены методом парциальных плоских волн авторами работ [5—7]. В данной работе независимо найдены СТК тетраэдров другим методом, установлена взаимосвязь между симметрией собственных решений и симметрией соответствующих пространств. Предложенный подход существенно упрощает решение краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шубников А. В., Копчик В. А. Симметрия в науке и в искусстве.— М., 1972.
2. L a m e M. G. Lecons sur la Theorie Metematique de Elastique des Corps Solides.— Paris, 1852.
3. Медокс А. Г.— Труды МИРЭА, 1967, вып. 35.
4. Рудницкий А. С., Хапалюк А. П.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1978, № 5, 71.
5. Шестопап А. Ф.— Дифференциальные уравнения, 1979, 15, № 4, 725.
6. Процко С. В., Корнейчик В. В.— Пятая Республиканская конференция молодых ученых: Тез. докл.— Минск, 1978.
7. Корнейчик В. В., Процко С. В., Хапалюк А. П.— Акустический журнал, 1979, 25, № 5, 737.
8. Морс Ф. М., Фешбах Т. Методы теоретической физики.— М., 1958.
9. J e a n s J. H.— Philosophical Magazine, 1965, 10, № 6, 91.
10. Рудницкий А. С., Хапалюк А. П.— Радиотехника и электроника, 1974, 19, № 8, 1609.

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ МОЩНОСТИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СПЛАВОВ Bi — 12 ат. % Sb

Сплавы на основе висмута и сурьмы относятся к низкотемпературным термоэлектрическим материалам, которые характеризуются высокими значениями термоэлектрических параметров, определяемых свойствами переноса (удельным электросопротивлением, дифференциальной термо-э. д. с. и теплопроводностью) [1]. С целью поиска наилучшего состава термоэлектрических материалов, а также условий их работы исследуются и тройные сплавы Bi—Sb—Te, Bi—Sb—Pb, Bi—Sb—Sn [2—5]. При изготовлении и обработке таких материалов возникают дефекты кристаллического строения, вызывающие изменение кинетических свойств. Однако влияние несовершенств кристаллической решетки на свойства этих веществ изучено недостаточно.

В данной работе исследуется воздействие пластической деформации на удельное электросопротивление ρ и дифференциальную термо-э. д. с. α , определяющие термоэлектрический коэффициент мощности $Y = \frac{\alpha^2}{\rho}$, сплавов Bi—12 ат. % Sb, Bi—12 ат. % Sb—0,05 ат. % Te и Bi—12 ат. % Sb—0,5 ат. % Pb.

Сплавы указанных составов готовились в вакууме порядка 1 Па, а затем образцы отливались в графитовую изложницу. Последующей механической обработкой им придавалась форма параллелепипеда ($1,6 \times 3,2 \times 20$ мм³), затем их отжигали в вакууме в течение 10 ч при 230 °С. Температурные зависимости указанных свойств измерялись в интервале 77—300 К компенсационным методом с помощью потенциометра Р363-2. Пластическая деформация осуществлялась односторонним сжатием при комнатной температуре.

На рис. 1 показаны зависимости удельного электросопротивления и дифференциальной термо-э. д. с. сплава Bi—12 ат. % Sb от степени пластической деформации ϵ при комнатной температуре. Коэффициент анизотропии удельного электросопротивления и дифференциальной термо-э. д. с. этого сплава близок к единице [6], поэтому увеличение ρ и $|\alpha|$ обусловлено рассеянием носителей тока на дефектах кристаллической решетки, вводимых пластической деформацией. На этом же рисунке показана деформационная зависимость отношения Y_g/Y_0 (Y_0 , Y_g — термоэлектрический коэффициент мощности до и после деформации). Термоэлектрический коэффициент мощности сплава Bi—12 ат. % Sb уменьшается с ростом ϵ .

Поскольку в сплаве Bi—12 ат. % Sb носителями тока являются электроны и дырки, удельное электросопротивление и дифференциальная термо-э.д.с. выражаются следующим образом [7]: $\rho = \frac{1}{\sigma_n + \sigma_p}$,

$\alpha = \frac{\alpha_n \sigma_n + \alpha_p \sigma_p}{\sigma_n + \sigma_p}$, где σ_n , σ_p — проводимости электронов и дырок; α_n , α_p — парциальные термо-э. д. с. электронов и дырок, имеющие противоположные знаки. Вклады от рассеяния электронов и дырок на дефектах кристаллической решетки в изменение удельного электросопротивления

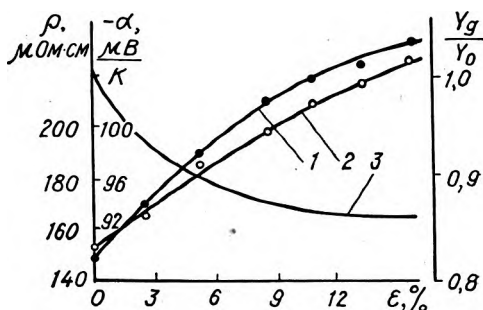


Рис. 1. Зависимость ρ (1), α (2) и Y_g/Y_0 (3) от степени деформации при комнатной температуре сплава Bi—12 ат. % Sb

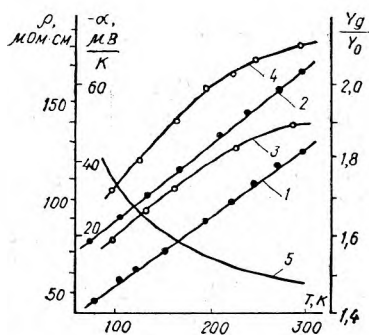


Рис. 2. Температурные зависимости ρ (1, 2), α (3, 4) и Y_g/Y_0 (5) сплава Bi — 12 ат. % Sb — 0,05 ат. % Te до деформации (1, 3) и после деформации на $\epsilon=16\%$ (2, 4)

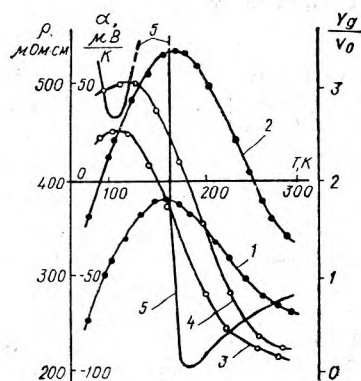


Рис. 3. Температурные зависимости ρ (1, 2), α (3, 4) и Y_g/Y_0 (5) сплава Bi — 12 ат. % Sb — 0,5 ат. % Pb до деформации (1, 3) и после деформации на $\epsilon=14\%$ (2, 4)

суммируются, а в изменение дифференциальной термо-э. д. с. частично компенсируют друг друга. В связи с этим более значительное увеличение удельного электросопротивления, чем дифференциальной термо-э. д. с. обуславливает уменьшение термоэлектрического коэффициента мощности. При температурах ниже комнатной Y уменьшается при деформировании еще в большей мере.

Совершенно по-иному влияет пластическая деформация на термоэлектрическую эффективность сплава Bi — 12 ат. % Sb, легированного теллуром или свинцом. Легирование приводит к тому, что ниже некоторой температуры процессы переноса определяются только электронами в случае Te или дырками в случае Pb. На рис. 2 представлены температурные зависимости удельного электросопротивления $\rho(T)$ и дифференциальной термо-э. д. с. $\alpha(T)$ сплава Bi — 12 ат. % Sb — 0,05 ат. % Te до и после деформации на $\epsilon=16\%$. В таком сплаве процессы переноса определяются практически только электронами [8]. Во всем температурном интервале наблюдается увеличение ρ и $|\alpha|$ при пластической деформации. Изменение удельного электросопротивления и дифференциальной термо-э. д. с. этого сплава при пластической деформации обусловлено, так же как и в ранее исследованном сплаве Bi—Te [9], рассеянием электронов на дефектах кристаллической решетки, образующихся при деформировании. Как показал расчет, термоэлектрический коэффициент мощности деформированного сплава выше недеформированного при всех температурах. Весьма важным представляется тот факт, что с понижением температуры деформационный рост Y увеличивается.

На рис. 3 изображена зависимость удельного электросопротивления и дифференциальной термо-э. д. с. сплава Bi — 12 ат. % Sb — 0,5 ат. % Pb до и после деформации на $\epsilon=14\%$. Этот материал характерен тем, что в области температур, близких к 77 К, процессы переноса в нем определяются только дырками. Однако при более высоких температурах наблюдается термическое возбуждение электронов из валентной зоны в зону проводимости [10]. Появление более подвижных электронов вызывает уменьшение удельного электросопротивления и даже инверсию знака дифференциальной термо-э. д. с. с повышением температуры. Деформирование этого сплава приводит к увеличению ρ во всем интервале температур, а кривая зависимости $\alpha(T)$ сдвигается вверх, в результате расширяется область температур с положительной дифференциальной термо-э. д. с. Кроме того, и это наиболее интересно, в области низких температур наблюдается увеличение α . Именно в этой низкотемпературной области, где процессы переноса определяются в основ-

ном дырками, термоэлектрический коэффициент мощности при деформировании увеличивается, в то время как при высоких температурах он уменьшается.

Таким образом, пластическая деформация вызывает увеличение термоэлектрического коэффициента мощности сплавов Bi — 12 ат. % Sb, легированных теллуром или свинцом, если процессы переноса в них определяются преимущественно электронами или дырками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иорданишвили Е. К. Термоэлектрические источники питания.— М., 1968.
2. Земсков В. С. и др.— Докл. АН СССР, 1975, т. 222, с. 316.
3. Иванов Г. А. и др.— В сб.: Полуметаллы и сегнетоэлектрики.— Л., 1977, с. 84.
4. Аопо Т.— J. of Appl. Physics, 1978, v. 17, p. 843.
5. Иванов Г. А., Панарин А. Ф.— В сб.: Полуметаллы и сегнетоэлектрики.— Л., 1977, с. 88.
6. Иванов Г. А., Яковлева Т. А.— В сб.: Исследование сложных полупроводников.— Кишинев, 1970, с. 97.
7. Стыльбанс Л. С. Физика полупроводников.— М., 1967.
8. Грабов В. М. и др.— В сб.: Исследование сложных полупроводников.— Кишинев, 1970, с. 61.
9. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1975, № 3, с. 56.
10. Шейнфельд В. Л.— В сб.: Низкотемпературные термоэлектрические материалы.— Кишинев, 1970, с. 110.

Поступила в редакцию
08.01.80.

Кафедра физики твердого тела

УДК 621.317.08

В. И. ЕМЕЛЬЯНЕНКОВ

О НИНИУСНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ СИГНАЛОВ

Удобные соотношения, описывающие ниниусное преобразование, получаются на основе анализа двухрастрового сопряжения, первый растр которого представлен полосами, ограниченными параллельными прямыми Y'_1 и Y''_1 , расположенными под углом $\varphi < 90^\circ$ к оси X (см. рисунок), а второй — полосами, которые ограничены прямыми Y'_2 и Y''_2 .

Пересекаясь с осью X , полосы первого растра образуют первую последовательность отрезков, границы которых совпадают с точками пересечения прямых Y'_1 и Y''_1 с осью X и определяются соотношениями:

$$x'_{n_1} = \frac{c_1}{\sin \varphi} + \frac{n_1 T}{\sin \varphi}, \quad (1)$$

$$x''_{n_1} = \frac{c_1 + \Delta c_1}{\sin \varphi} + \frac{n_1 T}{\sin \varphi}, \quad (2)$$

где c_1 — расстояние до ближней к началу координат полосы; T — расстояние между полосами; Δc_1 — ширина полос; $n_1 = 0, 1, 2, \dots$ порядковые номера полос.

Аналогичным образом полосы второго растра образуют вторую последовательность отрезков оси X , координаты границ которых описываются соотношениями:

$$x_{n_2} = c_2 + n_2 T, \quad (3)$$

$$x'_{n_2} = c_2 + \Delta c_2 + n_2 T, \quad (4)$$

где c_2 — расстояние до ближайшей полосы, Δc_2 — ширина полос, $n_2 = 0, 1, 2, \dots$ порядковые номера полос.

Полученные последовательности отрезков моделируют импульсные последовательности. При этом равенства

$$\Delta x_{n_1} = x''_{n_1} - x'_{n_1}, \quad (5)$$

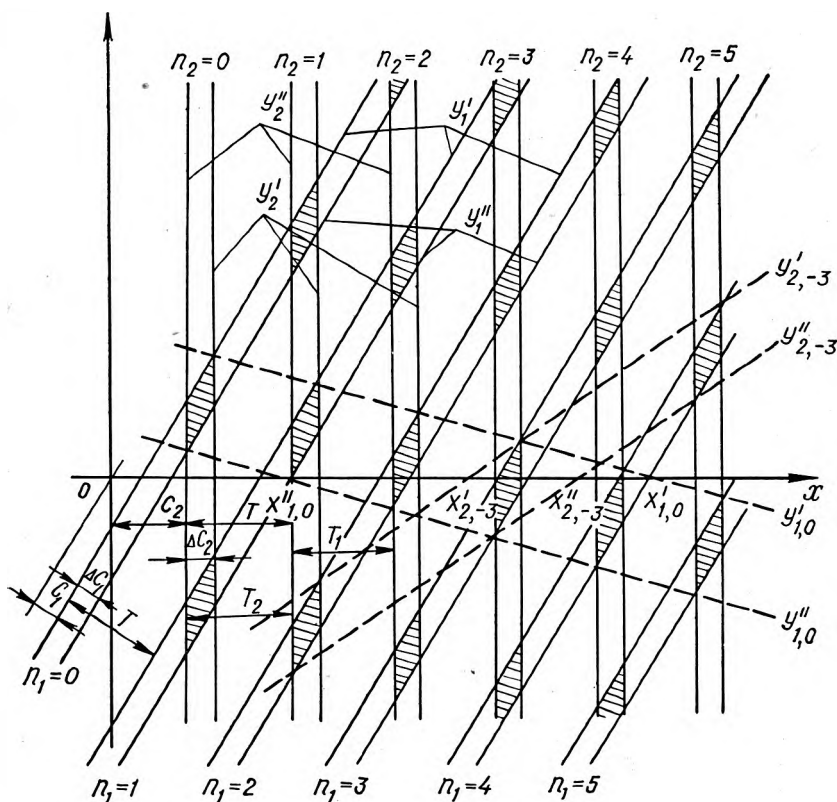
$$\Delta x_{n_2} = x_{n_2}^* - x_{n_2}' \quad (6)$$

определяют длительности Δx_{n_1} и Δx_{n_2} импульсов первой и второй последовательностей, соответственно, а равенства

$$T_1 = x_{n_1+1}' - x_{n_1}', \quad (7)$$

$$T_2 = T \quad (8)$$

определяют периоды T_1 и T_2 следования импульсов первой и второй последовательностей. Моменты запуска первой и второй последовательностей определяются как координаты x_{n_1}' и x_{n_2}' при $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ соответственно. Изменяя угол наклона полос первого раstra в пределах $0 < \varphi < 90^\circ$, можно моделировать изменение периода следования импульсов первой последовательности в пределах $T < T_1 < \infty$, сохраняя значение периода следования импульсов второй последовательности постоянными $T_2 = T$, и исследовать совпадения при различных сочетаниях периодов сравниваемых последовательностей.



Двухрастровое сопряжение полосовых растров

Как видно из рисунка, общие точки при пересечении полос растров образуют параллелограммы, а вершины этих параллелограммов образуют точки пересечения прямых, которые ограничивают полосы сопрягаемых растров. Прямые, проходящие через противоположные вершины параллелограммов, задают полосы, внутри которых содержатся все точки пересечения полос растров. Очевидно, что совпадения могут реализоваться лишь внутри тех отрезков оси X , которые образованы пересечением этой оси с полосами, содержащими точки пересечения полос растров.

Соответствующим образом выбирая пары из семейств прямых Y'_1, Y''_1 и Y'_2, Y''_2 , можно образовать двухрастровые сопряжения линейных растров и определить уравнения линий, проходящих через точки пересечения указанных прямых [1]. В рассматриваемом случае необходимо воспользоваться характеристическим уравнением вида $p = n_2 - kn_1$. При этом получаются уравнения:

$$y' = -\frac{x'_i(1 - k \sin \varphi)}{k \cos \varphi} + \frac{pT + c_2 + \Delta c_2 - kc_1}{k \cos \varphi}, \quad (9)$$

$$y'' = -\frac{x''(1 - k \sin \varphi)}{k \cos \varphi} + \frac{pT + c_2 + \Delta c_2 - kc_1}{k \cos \varphi}, \quad (10)$$

которые описывают два семейства прямых $Y'_{k,p}$ и $Y''_{k,p}$, проходящих через точки пересечения прямых Y'_1 и Y''_2 и через точки пересечения прямых Y''_1 и Y'_2 , соответственно. Параметр $k = 1, 2, 3, \dots$ задает углы наклона, а параметр $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ задает номера прямых $Y'_{k,p}$ и $Y''_{k,p}$. На рисунке пунктиром изображены прямые $Y'_{1,0}$ и $Y''_{1,0}$, определяющие границы полос при $k = 1$ и $p = 0$, а также прямые $Y'_{2,-3}$ и $Y''_{2,-3}$ при $k = 2$ и $p = -3$.

Из уравнений (9) и (10) при $y' = 0$ и $y'' = 0$ находятся координаты границ отрезков, содержащих совпадения, и с учетом равенств (1)–(8) представляются соотношениями

$$x'_{k,p} = \frac{pT_1T_2}{T_1 - kT_2} + x'_{n_1=0} + \Delta x_{n_1} + \frac{T_1(x'_{n_2=0} - x'_{n_1=0} - \Delta x_{n_1})}{T_1 - kT_2}, \quad (11)$$

$$x''_{k,p} = \frac{pT_1T_2}{T_1 - kT_2} + x''_{n_1=0} + \frac{T_1(x'_{n_2=0} + \Delta x_{n_2} - x'_{n_1=0})}{T_1 - kT_2}, \quad (12)$$

в правые части которых уже входят параметры сравниваемых импульсных последовательностей. Нетрудно заметить, что при

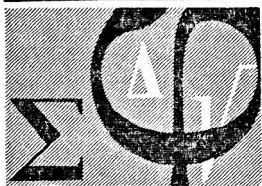
$$|x'_{k,p} - x''_{k,p}| > T_1 + \Delta x_n \quad (13)$$

внутри отрезков $[x'_{k,p}, x''_{k,p}]$ всегда реализуется хотя бы одно совпадение.

Уравнения (11) и (12) совместно с неравенством (13) описывают нелинейное преобразование и могут применяться для определения необходимых расчетных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Преснухин Л. Н., Шаньгин В. Ф., Шаталов Ю. А. Муаровые растровые датчики положения и их применение.— М., 1969.



УДК 65.011.56 : 681.3.06

*В. И. ВОЮШ, В. И. ДРАВИЦА, А. И. ЗМИТРОВИЧ,
Ю. П. МЕЛЕШКО, Н. В. САБАНАЕВА*

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОЦЕДУР РАБОТЫ С БАЗАМИ ДАННЫХ

В связи с перспективным использованием систем управления базами данных (СУБД) в задачах обработки данных (АСУ, САПР и др.) одним из важных направлений в теории и практике баз данных (БД) является создание инструментальных средств для разработчиков прикладных программ и администратора БД. Появление новых СУБД и расширение функциональных возможностей существующих систем, существенное расширение круга решаемых задач на основе БД, необходимость совершенствования технологии работы с БД требуют создания теории проектирования БД, которая может определить набор инструментальных средств.

Процесс проектирования можно разделить на следующие основные этапы: инфологическое моделирование, логическое проектирование, физическое проектирование и оценка результатов в процессе функционирования БД или путем моделирования работы БД на контрольных задачах. Процесс проектирования БД в целом, как и его отдельные этапы, можно рассматривать с точки зрения степени их формализации и в связи с этим возможны различные направления практической реализации процесса проектирования, а именно:

а) ручное проектирование (низкая степень формализации), при котором практически все решения принимает разработчик БД;

б) автоматизированное проектирование (средняя степень формализации), предполагающее, помимо участия специалистов, наличие формальных алгоритмов процесса проектирования БД, на основе которых разработана и функционирует система автоматизации проектирования (САП) БД;

в) автоматическое проектирование (высокая степень формализации), когда САП БД автоматически проектирует БД на основе модели представления знаний о предметной области.

Важными процедурами проектирования БД являются разработки описаний для ее схемы, подсхем и написание операторов обращения к СУБД. Так, анализ структуры и состава программ АСУ одним приборостроительным заводом, построенных с использованием СУБД ОКА и предназначенных для решения 42 задач подсистем УТПП, ТЭП, ОУОП, УМТС, показывает, что описание несложной по структуре БД (таблицы DBD и РСВ) включает около 1000 строк. В каждой из прикладных программ используется в среднем 4—5 обращений к СУБД ОКА, каждое из которых составляет около 20 строк.

Анализ структуры прикладных программ, построенных на основе БД, показывает, что их можно разделить на отдельные блоки (описание,

поиск, манипуляции над данными, вывод), каждый из которых поддается формальному описанию, что позволяет использовать принципы генерации для их автоматического построения.

Анализ описаний наборов данных СУБД СЕТОР (СЕТКА, СЕДАН) и обращений к системе дает следующие данные: процедура вставки 10 строк (145 знаков); процедура удаления 8 строк (137 знаков); процедура замены 11 строк (160 знаков); процедура поиска/чтения 7 строк (120 знаков); описание на языке описания данных для основного набора данных 5 строк (80 знаков) и для зависимого 5 строк (160 знаков).

Мы рассмотрим одну из важных частей инструментальных средств проектирования БД — автоматизацию проектирования описаний БД, описаний структуры БД для прикладных программ и описаний обращения к СУБД из прикладных программ, покажем возможность формализации процесса проектирования указанных описаний и создания на этой основе САП основных процедур работы с БД [1].

Принципы проектирования, как и сама САП, ориентированы на СУБД ОКА, хотя нет принципиальных трудностей для их применения к другим СУБД.

САП процедур работы с БД использует два программных средства: систему разделения времени и универсальный макрогенератор. Система разделения времени (СРВ) является наиболее эффективным программным средством проектирования в связи с тем, что она позволяет с дисплея (абонентского пункта) использовать команды СРВ для ввода, корректировки таких данных, как характеристики БД, сегменты с их характеристиками и совокупностью полей, поля данных с их характеристиками и т. д.

Универсальный макрогенератор дает возможность оформлять в виде макроопределений произвольный текст (этим текстом может быть и набор операторов любого языка программирования). Такое макроопределение может затем вызываться посредством непроцедурного макровывода, имеющего упрощенный синтаксис. При вызове текст макроопределения может модифицироваться в соответствии с заданными значениями операндов макровывода, что позволяет очень эффективно использовать универсальный макрогенератор для генерации процедур работы с БД.

Генерация описания физической, логической базы данных и блоков связи прикладной программ. Блок DBD физической БД включает предложения SEGM, описывающие характеристики сегментов и предложения FIELD, определяющие характеристики полей, содержащихся в сегментах.

В процессе проектирования используются следующие наборы данных.

1. Набор данных, определяющий иерархическую структуру физической БД с записью следующей структуры:

<имя исходного сегмента> <имя подчиненного сегмента>

2. Набор данных имен сегментов с именами полей, входящих в сегменты, с записью следующего вида:

<имя сегмента> <имена полей сегмента>

3. Набор данных имен полей с их характеристиками, запись которого имеет следующую структуру:

<имя поля> <характеристики поля>

Набор данных (1), определяющий иерархическую структуру физической БД, может автоматически получаться программой проектирования оптимальной сетевой структуры БД или вводиться с терминала или с перфокарт.

На основании рассмотренных данных генератор проектирует блок DBD физической базы данных.

При проектировании описания логической БД необходимо создать блоки DBD от одной или нескольких физических БД, на основании которых создается логическая БД. В описании физических БД могут появляться предложения LCHILD, описывающие сегменты, которые связаны с сегментами той же или другой физической БД, и которые являют-

ся логически исходными. Блок DBD для логической БД включает также предложения SEGM.

Входной информацией для универсального макрогенератора при проектировании описаний логической БД являются те же наборы данных (1), (2) и (3), что и для проектирования описаний физической БД, а также набор данных о связях между сегментами с записями следующей структуры:

<имя БД-1> <имя сегмента> <имя БД-2> <имя сегмента>

Для генерации блоков РСВ программист с терминала задает последовательность имен сегментов. Блок РСВ генерируется, транслируется и загружается, а программисту на экран выдается имя РСВ (если он его сам не указал).

Используются следующие наборы данных: 1) структура всех ФБД, ЛБД в форме, удобной для просмотра; 2) набор данных, содержащий имена уже созданных РСВ.

Универсальный макрогенератор из операторов подязыка данных ВЕТА в СУБД ОКА порождает наборы операторов, реализующих манипуляции с БД. Подязык данных ВЕТА является надстройкой над одним из базовых языков программирования (ПЛ/1, КОБОЛ или АССЕМБЛЕР) и представляет собой набор условных операторов. Операторы считаются условными потому, что программист не использует их в явном виде, а сразу в прикладной программе записывает их в виде набора операторов базового языка программирования.

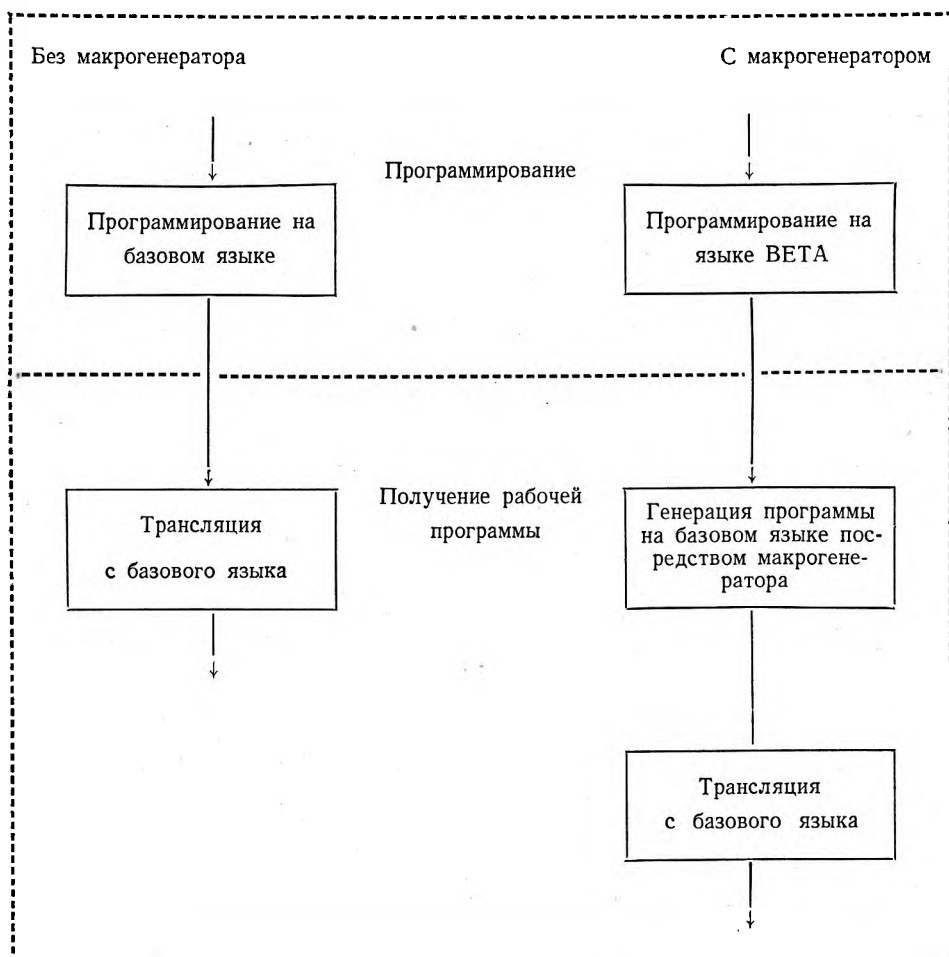


Рис. 1. Схема процесса разработки прикладной программы, работающей с базами данных

Обращение к СУБД для выполнения требуемой функции происходит с помощью операторов базового языка. В связи с тем, что обращение к СУБД на базовом языке имеет типовую структуру и стандартный состав операторов, имеется возможность использовать универсальный макрогенератор для получения такого обращения (рис. 1).

Язык ВЕТА составляют операторы, реализующие операции над базами данных, и определяющие блок связи с программой (PCB). При программировании на базовом языке для реализации каждой операции над базами данных программист должен написать несколько операторов присваивания, устанавливающих аргументы поиска массива, и вызов программы, реализующей операцию над данными. При использовании универсального макрогенератора для этого достаточно написать один макровывод, а макрогенератор построит для него нужный набор операторов на базовом языке. Операторы, реализующие операции над базами данных, записываются в стандартном формате:

```
<оператор> ::= <код> <код языка> <пробелы> <операнд 1>
[<, операнд N>...]
<код> ::= GUOKA|GNOKA|GNPOKA|GHUOKA|GHNOKA|
GHNPOKA|ISRTOKA|DELOKA|REPOKA
<пробелы> ::= <пробел> [<пробел>...]
<операнд 1> ::= название PCB
<операнд N> ::= (<название поля>, <'значение поля'>)
<код языка> ::= P|K (P — для ПЛ/1, K — для КОБОЛА)
```

Код определяет операцию над базами данных OKA. В принципе синтаксис операторов может быть выбран таким, чтобы определяемым языком программирования не только удобно было пользоваться программисту, но и чтобы генерация на базовый язык программирования шла максимально эффективно. В данном случае операнды оператора задаются в виде списков, каждый из которых соответствует сегменту базы данных, первый элемент задает сегмент базы данных, второй — поле сегмента, третий — аргумент поиска сегмента (APC — SSA). Третий или второй и третий элементы списка могут опускаться.

Кроме операций над базами, нужно определить аргумент поиска сегмента. Оператор для определения SSA может иметь следующий синтаксис:

```
<оператор> ::= <DCLOKA> <код> <пробелы> <имя PCB>
<, операнд 1> [<, операнд N>...]
<операнд 1> ::= (<название SSA>, <длина области, выделяемой
для SSA>)
<операнд N> ::= (<имя поля>, <тип поля>, <длина поля>,
<'значение поля'>)
<имя поля> ::= <имя переменной, которая используется для опреде-
ления аргумента SSA>
<тип поля> ::= тип переменной
<длина поля> ::= длина области, выделяемой для аргумента SSA.
```

Определение APC требует обычно задания нескольких структур, является громоздким и поэтому оператор DCLOKA упрощает его задание. В пределах одной программной системы во многих программах используются одинаковые APC. Такие APC выгодно оформить в виде макроопределений и вызывать их посредством универсального макрогенератора, что значительно сокращает объем прикладной программы.

В качестве примера рассмотрим БД с физической структурой, изображенной на рис. 2.

На рис. 3 приведен пример программы, выбирающей сегменты DET, которые содержат в поле КД значения 'М' при условии, что деталь относится к группе изделия 'NEW'.

Предполагая, что PCB для данного примера оформлено в виде макроопределения и вызывается посредством макровывода PCBIOKA, этот фрагмент программы при использовании универсального макрогенератора будет выглядеть следующим образом:

GUOKA_PCBNI, (GI,'NEW'__'),(KD,'M')

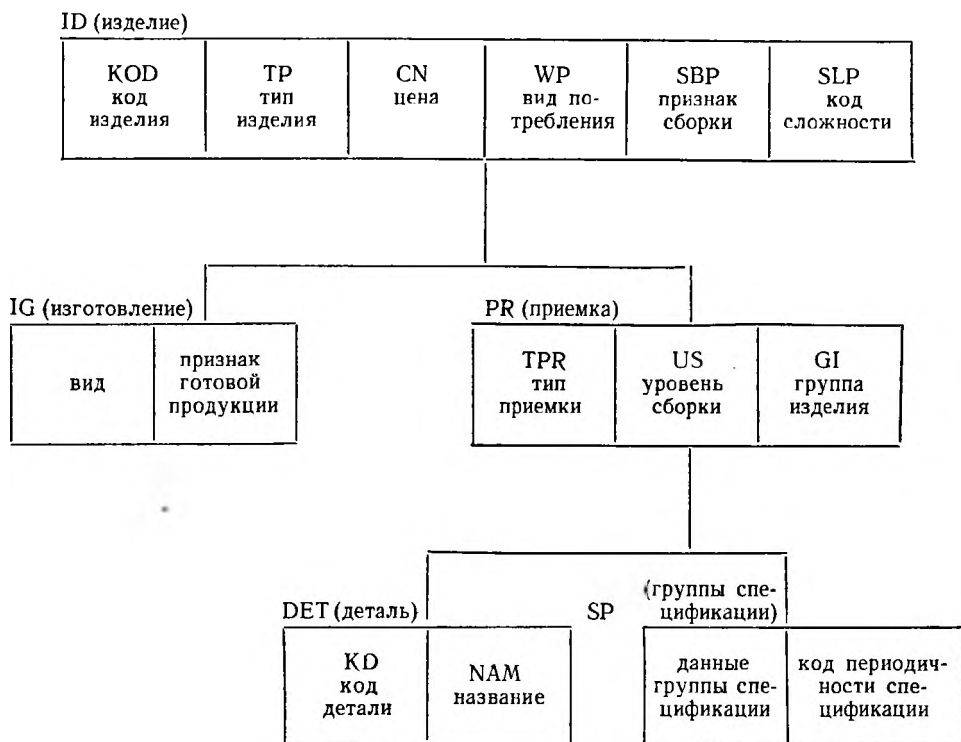


Рис. 2. Структура базы данных

```

BETTPLI: PROC(BASE1) APTIONS(MAIN);
  DCL 1 PCBN1 BASED(BASE1),
    2 DCBDN CHAR(8),
    2 SEGLEV CHAR(2),
    2 STATUS CHAR(2),
    2 PRCPOT CHAR(4),
    2 SEGNAME CHAR(8),
    2 LENGKEY FIXED BIN(31, 0),
    2 NUMBSEG FIXED BIN(31, 0);
  DCL BASE1 POINTER;
  DCL KOLPAR FIXED BIN(31, 0) INIT(5) STATIC;
  DCL OPERATION CHAR(4) INIT('GU__');
  DCL REZULT CHAR(23);
  DCL SEG1 CHAR(23);
    1 S1 DEF SEG1 UNAL,
    2 KOD1 FIXED(14),
    2 TP1 CHAR(1),
    2 CN1 FIXED(4),
    2 WP1 CHAR(1),
    2 SBP1 FIXED(2),
    2 SLP1 CHAR(1);
  DCL SEG2 CHAR(8),
    1 S2 DEF SEG2 UNAL,
    2 TPR2 CHAR(1),
    2 US2 FIXED(2),
    2 GI2 CHAR(5);
  DCL SEG3 CHAR(7),
    1 S3 DEF SEG3 UNAL,
    2 KD3 CHAR(1),
    2 NAM3 CHAR(6);

```

```

GI2='NEW___';
KD3='M';
CALL PLITBETT(KOLPAR, OPER, PCBN1, SEG1, SEG2, SEG3);
END1: END BETTPLI;

```

Рис. 3. Фрагмент программы работы с БД на ПЛ/1

Макроопределения, соответствующие приведенным операторам языка ВЕТА, должны программироваться на языке универсального макрогенератора с использованием базового языка программирования. Без больших сложностей программировать макроопределения можно только, используя эффективные макрогенерации, которыми обладает универсальный макрогенератор [2]: средства обработки переменного количества операндов макровывоза, использование глобальных индексированных переменных разных типов, возможность удобной обработки элементов списка, записанного в качестве операндов макровывоза.

Средства базовых языков высокого уровня (ПЛ/1, КОБОЛ) не имеют подобных возможностей и поэтому не могут выполнять препроцессорную обработку макроопределений, соответствующих операторам ВЕТА. Языки программирования КОБОЛ и ПЛ/1 позволяют только вызывать определенные наборы операторов языка, но возможности преобразования этих наборов сильно ограничены. Поэтому средства этих языков создают определенные удобства при работе с базами данных при вызове подготовленных часто используемых типовых процедур работы с БД, но практически бесполезны в прикладных программах при разнообразных логических базах данных. Для автоматического проектирования таких процедур эффективным средством является универсальный макрогенератор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дравица В. И., Змитрович А. И., Лепешинский Н. А. Об одной системе автоматизированного проектирования баз данных: Первая Всесоюзная конференция «Банки данных». — Тбилиси, 1980.
2. В о ю ш В. И. — Программирование, 1979, № 4.

Поступила в редакцию
03.02.81.

Кафедра математического обеспечения АСУ

УДК 517.966

А. А. ЛЕВАНОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ОДНА ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; $T = [t_0, t_1]$ — отрезок в R ; μ — мера Лебега на T , κ — множество всех непустых замкнутых подмножеств E ; $\alpha(A, B) = \max \{ \sup_{x \in A} \rho(x, B), \sup_{y \in B} \rho(A, y) \}$ — отклонение по Хаусдорфу множеств $A, B \in \kappa$. Последовательность (A_n) , $A_n \in \kappa$ называют сходящейся, если существует $A \in \kappa$ такое, что $\alpha(A_n, A) \rightarrow 0$. Как известно [1], если $\alpha(A_n, A_m)_{n, m \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, то последовательность (A_n) является сходящейся. Последовательность многозначных отображений $(A_n(\cdot))$, $A_n(\cdot): J \rightarrow \kappa$, $J \subset T$, назовем сходящейся почти при всех $t \in J$ к $A(\cdot)$ (равномерно на J к $A(\cdot)$), если $\alpha(A_n(t), A(t)) \rightarrow 0$ почти при всех $t \in J$ (равномерно на J). Функцию $a(\cdot): T \rightarrow E$ называют сечением многозначного отображения $A(\cdot): T \rightarrow \kappa$, если $a(t) \in A(t)$ почти при всех $t \in T$. Многозначное отображение $A(\cdot): T \rightarrow \kappa$ назовем интегрируемым, если существует счетное семейство $\{x_n(\cdot)\}$, $n = 1, 2, \dots$, интегрируемых по Бохнеру сечений отображения $A(\cdot)$ таких, что $\{x \in E \mid x = x_n(t), n = 1, 2, \dots\}$ плотны в $A(t)$ почти при всех $t \in T$. Интегралом $\int_{t_0}^{t_1} A(t) d\mu$ называем мно-

жество в E , точки которого — интегралы всех интегрируемых по Бохнеру сечений $A(\cdot)$. Из теоремы Дербе—Кастена [2] и теорем 3. 5. 2, 3. 7. 4 [3] следует, что измеримое многозначное отображение $A(\cdot): T \rightarrow \kappa$ [2] является интегрируемым, если $\|v\| \leq m(t)$ для всех $v \in A(t)$, $t \in T$, где $m(\cdot): T \rightarrow R$ интегрируемая по Лебегу функция.

Предложение 1. Если последовательность $(A_n(\cdot))$, $A_n(\cdot): T \rightarrow \kappa$, измеримых многозначных отображений сходится к $A(\cdot)$ почти при всех $t \in T$, то $A(\cdot)$ измеримое отображение.

Доказательство. Следует из теоремы Дербе — Кастена, теоремы 2' [4, с. 284] и соотношения $\rho(x, A_n(t)) \rightarrow \rho(x, A(t))$, которое имеет место почти при всех $t \in T$, при всех $x \in E$.

Предложение 2. Если отображения $A(\cdot)$, $B(\cdot): T \rightarrow \kappa$ измеримы, то измерима и функция $t \rightarrow \alpha(A(t), B(t))$.

Доказательство. Функция $\rho(x, B(t))$ измерима по t при каждом $x \in E$ и непрерывна по x при каждом $t \in T$. Пусть $\{x_i(\cdot)\}$, $i=1, 2, \dots$, измеримые сечения отображения $A(\cdot)$ такие, что $\{x \in E | x = x_i(t), i=1, 2, \dots\}$ плотны в $A(t)$ почти при всех $t \in T$. Функции $t \rightarrow \rho(x_i(t), B(t))$ измеримы при всех i . Это утверждение следует из следствия к предложению 8 [5, стр. 345], которое доказано в [5] для случая $E = R^n$. Однако, используя теорему Дербе — Кастена, его можно аналогично доказать и в случае, когда E — сепарабельное банахово пространство. Так как $\sup_{x \in A(t)} \rho(x, B(t)) = \sup_{1 \leq i < \infty} \rho(x_i(t), B(t))$ почти при всех $t \in T$, то функция $t \rightarrow \sup_{x \in A(t)} \rho(x, B(t))$ измерима. Аналогично доказывается измеримость функции $t \rightarrow \sup_{y \in B(t)} \rho(A(t), y)$. Отсюда следует измеримость функции α .

Предложение 3. Пусть последовательность измеримых многозначных отображений $(A_n(\cdot))$ сходится почти при всех $t \in T$ к $A(\cdot)$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $T_\delta \subset T$, что 1) $\mu(T_\delta) = \mu(T) - \delta$, 2) на T_δ последовательность $(A_n(\cdot))$ сходится к $A(\cdot)$ равномерно.

Доказательство. В силу предложения 1 функция $A(\cdot): T \rightarrow \kappa$ измерима. Согласно предложению 2, измерима и функция $t \rightarrow \alpha(A_n(t), A(t))$. Положим $E_n^m = \bigcap_{i \geq n} \{x | \alpha(A_n(t), A(t)) < \frac{1}{m}\}$. Дальнейшее доказательство такое же, как доказательство теоремы Егорова [4].

Используя предложение 3, аналогично теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла [4] можно доказать следующее утверждение.

Предложение 4. Если последовательность $(A_n(\cdot))$ измеримых многозначных отображений сходится почти при всех $t \in T$ к $A(\cdot)$ и при всех n , $\|v\| \leq m(t)$, $v \in A_n(t)$, $t \in T$, где $m(\cdot): T \rightarrow R$ интегрируемая по Лебегу

функция, то $A(\cdot)$ интегрируемо на T и $\int_{t_0}^{t_1} A_n(t) d\mu \rightarrow \int_{t_0}^{t_1} A(t) d\mu$.

Многозначную функцию $X(\cdot): T \rightarrow \kappa$ называют непрерывной в точке t , если $\alpha(X(t), X(t')) \rightarrow 0$ при $t' \rightarrow t$, $t, t' \in T$.

Предложение 5. Пусть отображение $F: (t, x) \rightarrow F(t, x)$, $(t, x) \in T \times E$, $F(t, x) \in \kappa$ измеримо по t при каждом x и непрерывно по x почти при всех t . Тогда для каждой непрерывной многозначной функции $X(\cdot): T \rightarrow \kappa$ отображение $t \rightarrow F(t, X(t))$ измеримо.

Доказательство. Пусть $B \in \kappa$ и $\{b_i\}$, $i=1, 2, \dots$, — плотное подмножество B . Из соотношения $\rho(x, F(t, B)) = \sup_{1 \leq i < \infty} \rho(x, F(t, b_i))$ и теоремы Дербе-Кастена следует измеримость отображения $t \rightarrow F(t, B)$, поэтому измеримо при каждом $n=1, 2, \dots$ отображение

$$t \rightarrow \Phi_n(t) = \begin{cases} F(t, X(t_0)), & t \in [t_0, t_0 + h_n], \\ \dots & \dots \\ F(t, X(t_0 + (n-1)h_n)), & t \in [t_0 + (n-1)h_n, t_1], \quad h_n = \frac{t_1 - t_0}{n}. \end{cases}$$

Так как $\rho(x, \Phi_n(t)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho(x, F(t, X(t)))$ почти при всех $t \in T$, то функция $t \rightarrow \rho(x, F(t, X(t)))$ измерима при каждом $x \in E$, что равносильно измеримости отображения $t \rightarrow F(t, X(t))$.

Рассмотрим следующую задачу

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in S(x_0, r)$; $S(x_0, r)$ — замкнутый шар в E с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$; $t \in T$; $F: T \times S(x_0, r) \rightarrow \kappa$. Решением (1) назовем непрерывную многозначную функцию $X(\cdot): T_1 \rightarrow \kappa$, $T_1 = [t_0, \bar{t}] \subset T$, удовлетворяющую соотношению

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) d\mu, \quad t \in T_1 \quad (\bar{P} — замыкание множества $P \in E$).$$

Пусть функция $\varphi: (t, x) \rightarrow \varphi(t, x) \in R$, $(t, x) \in T \times R$, измерима по t при каждом x и непрерывна по x почти при всех t ; $\varphi(t, 0) \equiv 0$, $t \in T$; $|\varphi(t, x)| \leq n(t)$, $(t, x) \in T \times R$, где $n(\cdot)$ — интегрируемая по Лебегу на T функция; неравенству $0 \leq x(t) \leq \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau)) d\mu$ удовлетворяет лишь одна непрерывная функция $x(t) \equiv 0$, $t \in T$.

Теорема. Предположим, что отображение $F: T \times S(x_0, r) \rightarrow \kappa$ удовлетворяет условиям:

i) $\|v\| \leq m(t)$ для всех $v \in F(t, x)$, $t \in T$, $x \in S(x_0, r)$, $m(\cdot)$ — интегрируемая по Лебегу на T функция;

ii) измеримо по t при каждом $x \in S(x_0, r)$;

iii) $\alpha(F(t, X), F(t, Y)) \leq \varphi(t, \alpha(X, Y))$ для всех непустых замкнутых подмножеств X, Y из $S(x_0, r)$.

Тогда задача (1) имеет решение.

Доказательство. Пусть $M = \int_{t_0}^{\bar{t}} m(t) d\mu$, $T_1 = [t_0, \bar{t}]$, $\bar{t} = \min\left\{t_1, \frac{r}{M}\right\}$, $h_n = \frac{\bar{t} - t_0}{n}$. Построим последовательность функций $(X_n(\cdot))$, $X_n(\cdot): T_1 \rightarrow \kappa$ следующим образом:

$$X_n(t) = x_0, \quad t \in [t_0 - h_n, t_0], \quad X_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X_n(\tau - h_n)) d\mu, \quad t \in T_1. \quad (2)$$

Из условий i), ii), iii) и предложения 5 следует, что последовательность $(X_n(\cdot))$ может быть построена. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \alpha(X_n(t), X_m(t)) &\leq \int_{t_0}^t \alpha(F(\tau, X_n(\tau - h_n)), F(\tau, X_m(\tau - h_m))) d\mu = \\ &= \int_{t_0}^t \alpha(F(\tau, X_n(\tau)), F(\tau, X_m(\tau))) d\mu + \varepsilon_{n,m}(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_{n,m}(t) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ почти при всех $t \in T_1$. Из (3) и условия iii) имеем $\alpha(X_n(t), X_m(t))_{n, m \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ почти при всех $t \in T_1$. Следовательно, $X_n(t) \rightarrow X(t)$ почти при всех $t \in T_1$. Последовательность $(F(t, X_n(t - h_n)))$ удовлетворяет всем условиям предложения 4. Из (2) имеем $X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) d\mu$, $t \in T_1$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Свойства многозначных отображений, установленные в предложениях 1—5, являются обобщением известных свойств одностепенных векторных функций [3], [4].

2. Доказанная теорема является обобщением теоремы существования [6, стр. 21] для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

3. Введенное понятие решения отличается от общепринятого. Обычно, под решением задачи (1) понимают абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot): T_1 \rightarrow E$ такую, что $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$, где $v(\cdot)$ суммируемое по Бохнеру сечение $F(t, x(t))$. Ясно, что решение (в обычном смысле) является сечением решения (в смысле введенном в заметке).

ЛИТЕРАТУРА

1. Castaing C., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions, 1977.
2. Иоффе А. Д., Левин В. Л.—Труды Моск. матем. об-ва, 1972, т. 26.
3. Хилле Э., Филиппс Р. Функциональный анализ и полугруппы.—М., 1962.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М., 1968.
5. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.—М., 1974.
6. Мамедов Я. Д. Односторонние оценки в условиях исследования дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.—Баку, 1971.

Поступила в редакцию
14.04.80.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.925.11

А. П. САДОВСКИЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГОЛОМОРФНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В СЛУЧАЕ ЦЕНТРА

Будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + Q(x, y)}{y + P(x, y)}, \quad (1)$$

где P, Q — голоморфные в окрестности $x=y=0$ функции без свободных и линейных членов.

Теорема 1. Для того чтобы начало координат уравнения (1) было центром, необходимо и достаточно существование единственного голоморфного в окрестности $x=Y=0$ преобразования

$$y = Y + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) Y^{2k} \equiv Y + v(x, Y^2) \quad (2)$$

($\varphi_0(0) = \varphi'_0(0) = 0$), приводящего (1) к виду

$$Y Y' = -x - f(x, Y^2), \quad (3)$$

где $f(x, z)$ — голоморфная в окрестности $x=z=0$ функция, $f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$.

Доказательство. Достаточность очевидна, см., например, [1].

Необходимость. Пусть $O(0, 0)$ является центром уравнения (1). На основании теоремы Ляпунова [1, 2] для (1) существует голоморфный в окрестности $x=y=0$ интеграл

$$x^2 + \varphi(x) + y\varphi_1(x) + y^2[1 + \psi(x, y)] = C, \quad (4)$$

где $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi_1(0) = \varphi'_1(0) = \psi(0, 0) = 0$.

Преобразуем теперь левую часть интеграла (4) при помощи некоторой голоморфной замены (2). Имеем

$$\begin{aligned} x^2 + \varphi(x) + (Y+v)\varphi_1(x) + (Y^2+2Yv+v^2)[1 + \\ + \psi(x, Y+v)] \equiv x^2 + \varphi(x) + (Y+v)\varphi_1(x) + \\ + (Y^2+2Yv+v^2)[1 + \psi_1(x, Y^2, v) + Y\psi_2(x, Y^2, v)] \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv x^2 + \varphi(x) + v\varphi_1(x) + (Y^2 + v^2)(1 + \psi_1) + 2Y^2v\psi_2 + \\ + Y[\varphi_1(x) + 2v + 2v\psi_1 + (Y^2 + v^2)\psi_2]. \quad (5)$$

Рассмотрим далее уравнение

$$F(x, z, v) = 0, \quad (6)$$

где $F(x, z, v) \equiv \varphi_1(x) + 2v + 2v\psi_1(x, z, v) + (z + v^2)\psi_2(x, z, v)$.

Ясно, что $F(0, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial F(0, 0, 0)}{\partial v} = 2 \neq 0$. На основании теоремы о неявной функции уравнение (6) имеет единственное решение $v = v(x, z)$, где $v(x, z)$, $v(0, 0) = 0$ — голоморфная в окрестности $x = z = 0$ функция. Из (4), (5) следует, что замена (2), где $v(x, z)$ — решение уравнения (6) с $v(0, 0) = 0$, приводит уравнение (1) к виду (3). Единственность преобразования (2) следует из [3]. Теорема доказана.

Следствие. Начало координат уравнения нелинейных колебаний

$$yy' = -x - Q(x, y) \quad (7)$$

будет центром тогда и только тогда, когда существует единственное голоморфное в окрестности $x = Y = 0$ преобразование $y = Y + v_1(x, Y^2)Y^2$, приводящее (7) к виду (3).

Положим $P(x, Y + v) \equiv P_1(x, Y^2, v) + YP_2(x, Y^2, v)$, $Q(x, Y + v) \equiv Q_1(x, Y^2, v) + YQ_2(x, Y^2, v)$. С помощью теоремы 1 легко можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Особая точка $O(0, 0)$ уравнения (1) является центром тогда и только тогда, когда уравнение в частных производных

$$(v^2 - z + 2vP_1 - 2zP_2 + P_1^2 - zP_2^2) \frac{\partial v}{\partial x} + (2xz + 2zQ_1 + 2xzP_2 + \\ + 2zP_2Q_1 - 2zvQ_2 - 2zP_1Q_2) \frac{\partial v}{\partial z} + xv - zQ_2 + vQ_1 + xP_1 + P_1Q_1 - zP_2Q_2 = 0 \\ (P_i = P_i(x, z, v), Q_i = Q_i(x, z, v), i = 1, 2)$$

имеет единственное голоморфное в окрестности $x = z = 0$ решение

$$v = v(x, z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x^2, z) + xg_k(x^2, z)], \quad (8)$$

где $f_k(u, z)$, $g_k(u, z)$ — однородные полиномы k -ой степени.

Находя последовательно методом неопределенных коэффициентов полиномы f_k и g_k из (8), можно получить необходимые и достаточные условия центра для (1).

Для уравнения нелинейных колебаний (7) можно составить уравнение в частных производных для функции $v_1(x, z)$. В развернутом виде это уравнение содержится в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. — Кишинев, 1976.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. — М. — Л., 1956, т. 2.
3. Садовский А. П. Функциональный метод составления условий центра. Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 6, с. 492.

Поступила в редакцию
20.11.80.

Кафедра высшей математики
и математической физики

УДК 62-507.019.3

А. Е. ЛЮЛЬКИН

ОДИН ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПОДМНОЖЕСТВ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ ЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЫ

В последнее время широкое распространение получили структурные методы построения проверяющих тестов логических схем (D — алгоритм [1], активизация одномерных путей [2], моделирование неисправностей на

псевдослучайных входных наборах [3, 4] и т. д.). Однако трудоемкость упомянутых методов непосредственно зависит от числа рассматриваемых неисправностей в схеме. Знание подмножеств эквивалентных неисправностей (ПЭН) позволяет существенно уменьшить это число и, кроме того, значительно облегчает задачу построения диагностического теста.

Постановка задачи. Для упрощения описания предлагаемого метода построения ПЭН будем рассматривать одновыходные комбинационные схемы.

Пусть L_0 — одновыходная комбинационная схема; $x_1, x_2, \dots, x_n$ — переменные, соответствующие входным полюсам схемы; $Z_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция, реализуемая схемой; $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ — множество одиночных константных неисправностей в схеме. Поставим в соответствие схеме L_0 ориентированный граф G_0 , вершины которого соответствуют входным полюсам схемы, элементам и выходному полюсу схемы, а дуги — линиям в схеме. При этом вершины графа помечаются функциями, реализуемыми соответствующими логическими элементами, или переменными (для вершин, соответствующих входным и выходным полюсам схемы), а дуги — переменными. Тогда неисправности f_i соответствует граф G_i , в котором переменные, помечающие некоторые дуги, принимают константные значения, и функция $Z_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, реализуемая схемой с неисправностью.

Две неисправности f_i и f_j называются эквивалентными, если $Z_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = Z_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Требуется вычислить совокупность ПЭН множества F .

Решение задачи. ПЭН можно построить, вычислив и сравнив функции, реализуемые схемой с неисправностями из F . Однако такой способ вычисления ПЭН весьма трудоемок. В настоящей работе предлагается метод нахождения ПЭН, основанный на использовании приближенных алгоритмов построения ПЭН. Понятие «приближенный алгоритм» употребляется здесь в том смысле, что получаемые с помощью его ПЭН не обязательно являются полными, т. е. содержат все эквивалентные между собой неисправности. Основная идея метода заключается в последовательном выполнении приближенных алгоритмов построения ПЭН. При этом очередной алгоритм использует в качестве исходных данных ПЭН, полученные в результате выполнения предыдущего алгоритма, и отличается тем, что позволяет получить более полные ПЭН, хотя и является более трудоемким.

На первом этапе выполняется следующий алгоритм построения ПЭН.

1. Строятся ПЭН для логических элементов и входных и выходных полюсов схемы.

2. Строятся всевозможные пересечения полученных подмножеств. Если пересечение некоторых подмножеств не пусто, то они заменяются одним подмножеством, которое является их объединением. Пункт 2 алгоритма выполняется до тех пор, пока есть пересекающиеся между собой подмножества.

Приведенный алгоритм вычисления ПЭН основан на следующем очевидном утверждении. Если выход логического элемента (входной полюс схемы) соединен со входом другого логического элемента и не имеет разветвления, то неисправности на выходе логического элемента (входном полюсе схемы) эквивалентны аналогичным неисправностям входа другого элемента.

Пусть логические элементы схемы L_0 реализуют функции, зависящие от всех аргументов, соответствующих их входам. Тогда справедлива

Теорема. Если в L_0 отсутствуют сходящиеся разветвления, то с помощью описанного алгоритма строятся полные ПЭН, т. е. подмножества, содержащие все эквивалентные между собой неисправности.

Из теоремы следует, что для схем, имеющих небольшое число разветвлений, приведенный алгоритм позволяет построить ПЭН, близкие к полным.

Пусть схема построена на элементах И, ИЛИ, НЕ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ. Если необходимо найти множество F' неисправностей, содержащее по одной неисправности из каждого ПЭН, полученного по описанному алгоритму, то для этого нет необходимости строить ПЭН. Множество F' можно построить, включив в него следующие неисправности: 1) обе константные неисправности на выходном полюсе схемы; 2) обе константные неисправности на тех выходах элементов и входных полюсах схемы, которые имеют разветвления; 3) по одной неисправности на каждом входе элементов типа И, ИЛИ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ («константа 1» на входах элементов И, И-НЕ и «константа 0» на входах элементов ИЛИ, ИЛИ-НЕ).

Следующий алгоритм построения ПЭН основан на преобразовании графа G_i для каждой неисправности f_i из F' [5]. В результате преобразования неисправности f_i ставится в соответствие помеченный ориентированный граф G_i . Преобразование выбирается таким образом, чтобы изоморфным графам, помеченным в результате преобразования, соответствовали эквивалентные неисправности.

Преобразование графа G_i для неисправности $f_i \in F'$ состоит в следующем.

1. В G_i удаляются те дуги, которым соответствуют переменные, принимающие константные значения, если таких дуг нет, то — конец алгоритма. При этом, если удаляется дуга, заходящая в некоторую вершину, то функция, помечающая эту вершину, заменяется функцией, которая получается после подстановки в исходную функцию значения переменной, соответствующей удаляемой дуге.

2. Последовательно удаляются те вершины вместе с заходящими в них дугами, которые не соответствуют выходным полюсам схемы и не имеют исходящих из них дуг.

3. Если в результате выполнения п. 1 некоторые вершины помечены константами, то значения констант присваиваются переменным, помечающим дуги, исходящие из этих вершин. Переход к п. 1.

В результате выполнения описанной процедуры для неисправностей из F' строится множество графов $G'_1, G'_2, \dots, G'_{N_1}$, где $N_1 = |F'|$. Если некоторые графы из полученного множества изоморфны, то соответствующие им неисправности объединяются в одно множество. Множество неисправностей F'' строится путем выбора по одной неисправности из каждого полученного множества. ПЭН множества F можно вычислить, построив объединения тех ПЭН, полученных после применения первого алгоритма, представители которых попали в одно ПЭН в результате выполнения второго алгоритма для множества F' .

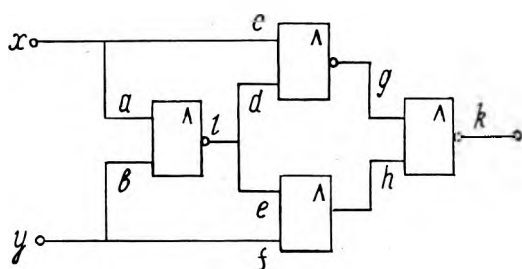
Заметим здесь, что второй из рассмотренных алгоритмов позволяет получить решение рассматриваемой задачи, более близкое к точному, чем первый алгоритм. Это обусловлено тем, что второй алгоритм позволяет в ряде случаев устанавливать эквивалентность неисправностей в начале и конце сходящегося разветвления (см. пример: неисправности $k|0$ и $l|0$).

В том случае, когда требуется получить точное решение, можно вычислить и сравнить функции, реализуемые схемой с неисправностями из F'' .

Предлагаемый метод построения ПЭН является более эффективным, чем тривиальное решение, что достигается за счет использования на первом и втором этапах менее трудоемких приближенных методов построения ПЭН. Кроме того, после выполнения любого из рассмотренных алгоритмов, процесс вычисления ПЭН можно прекратить, если не требуется получить полные ПЭН.

Рассмотренные алгоритмы могут быть использованы для вычисления ПЭН как комбинационных так и последовательностных схем.

Остановимся несколько на особенностях применения описанных алгоритмов для построения ПЭН многовыходных схем. В этом случае можно рассматривать эквивалентность неисправностей относительно



Комбинационная схема

заданного выходного полюса схемы или относительно всех выходных полюсов схемы. В первом случае рассмотренные алгоритмы необходимо применять к подсхеме исходной схемы, соответствующей заданному выходному полюсу. Во втором случае описанные алгоритмы применяются к исходной схеме и позволяют вычислить ПЭН относительно всех выходных полюсов схемы.

Пример. Рассмотрим схему, показанную на рисунке. Пусть исходное множество неисправностей содержит все константные неисправности на различных линиях в схеме. Неисправность «константа α » на i -ой линии будем обозначать через $i|\alpha$. Применение первого приближенного алгоритма дает следующие ПЭН:

$$\begin{aligned}
 F_1^1 &= \{x|0\} & F_6^1 &= \{a|1\} & F_{11}^1 &= \{d|1\} \\
 F_2^1 &= \{x|1\} & F_7^1 &= \{b|1\} & F_{12}^1 &= \{e|0; f|0; h|1\} \\
 F_3^1 &= \{y|0\} & F_8^1 &= \{l|0\} & F_{13}^1 &= \{e|1\} \\
 F_4^1 &= \{y|1\} & F_9^1 &= \{c|0; d|0; q|1\} & F_{14}^1 &= \{f|1\} \\
 F_5^1 &= \{a|0; b|0; l|1\} & F_{10}^1 &= \{c|1\} & F_{15}^1 &= \{q|0; h|0; k|1\} \\
 & & & & F_{16}^1 &= \{k|0\}.
 \end{aligned}$$

Второй алгоритм позволяет вычислить следующие ПЭН:

$$\begin{aligned}
 F_1^2 &= \{x|0\} & F_6^2 &= \{a|1\} & F_{11}^2 &= \{e|0; f|0; h|1\} \\
 F_2^2 &= \{x|1\} & F_7^2 &= \{b|1\} & F_{12}^2 &= \{e|1\} \\
 F_3^2 &= \{y|0\} & F_8^2 &= \{c|0; d|0; q|1\} & F_{13}^2 &= \{f|1\} \\
 F_4^2 &= \{y|1\} & F_9^2 &= \{c|1\} & F_{14}^2 &= \{q|0; h|0; k|1\} \\
 F_5^2 &= \{a|0; b|0; l|1\} & F_{10}^2 &= \{d|1\} & F_{15}^2 &= \{k|0; l|0\}.
 \end{aligned}$$

Вычисление функций, реализуемых схемой с неисправностями, позволяет найти следующие полные ПЭН:

$$\begin{aligned}
 F_1^3 &= \{x|0\} & F_6^3 &= \{a|1; e|0; f|0; h|1\} \\
 F_2^3 &= \{x|1\} & F_7^3 &= \{b|1; c|0; d|0; q|1\} \\
 F_3^3 &= \{y|0\} & F_8^3 &= \{c|1; f|1\} \\
 F_4^3 &= \{y|1\} & F_9^3 &= \{q|0; h|0; k|1\} \\
 F_5^3 &= \{a|0; b|0; d|1; e|1; l|1\} & F_{10}^3 &= \{k|0; l|0\}.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Roth J. P., Bouricius W. G., Schneider P. R.—IEEE Trans. Comput., 1967, v. 16, N 5, p. 567.
2. Чжен Г., Мэннинг Е., Метц Г. Диагностика отказов цифровых вычислительных систем.—М., 1972.
3. Левин А. Г., Уткин А. А.—В сб. III Всесоюзное совещание по технической диагностике: Тез. докл.—М., 1975, с. 48.
4. Люлькин А. Е. Практические алгоритмы моделирования логических схем.—Рукопись деп. в ВИНТИ. № 317-78. Деп. от 26.01.78.
5. Mc Cluskey E. J., Clegg F. W.—IEEE Trans. Comput., 1971, v. 20, N 11, p. 1286.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ

В работах по проблемам устойчивости [1, 2] содержатся отдельные результаты по исследованию структуры окрестности устойчивых (неустойчивых) движений. По аналогии с этим в настоящей статье проводится исследование качественного поведения ограниченных по Иосидзаве Т. [3] решений.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, n -мерному евклидову пространству; функция $f: R^{n+1} \rightarrow R^n$ непрерывна. Предположим, что через каждую точку $(\xi, \tau) \in R^{n+1}$ проходит единственное решение $x(\xi, \tau, t)$ системы (1), определенное в своем максимальном интервале $[a(\xi, \tau), b(\xi, \tau)]$.

1. Ограниченные решения. Следуя [3], рассмотрим

Определение 1. Решения системы (1) называются ограниченными, если $\forall \tau \in R, \forall A > 0 \exists R_2 = R_2(A, \tau)$ такое, что $\|\xi\| \leq A \Rightarrow \|x(\xi, \tau, t)\| \leq R_2 \forall t \geq \tau$.

Если $R_2 = R_2(A) \forall \tau \in I$, где I — интервал R , решения системы (1) равномерно ограничены по $\tau \in I$.

Определение 2 [1]. Функция $\sigma: R \rightarrow R$ называется бесконечно большой, если $\sigma(v) \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Положим $\delta(v, \tau) = \inf_{\tau < t} \|x(\xi, \tau, t)\|$, $v > 0$.

$$a(\xi, \tau) < t \leq \tau, \|\xi\| = v$$

1. Если функция $\sigma_c(v) = \inf_{\tau > c} \sigma(v, \tau)$ ($c \geq -\infty$) бесконечно большая, то решения системы (1) равномерно ограничены по $\tau > c$.

2. Если решения системы (1) равномерно ограничены, по $\tau < d$ ($d \leq \infty$), то функция $\sigma_d(v) = \inf_{\tau < d} \sigma(v, \tau)$ является бесконечно большой.

Доказательство 1. Пусть функция $\sigma_c(v)$ является бесконечно большой. Покажем, что решения равномерно ограничены по $\tau > c$. Предположим противное, т. е. $\exists \beta > 0, \exists \{\xi_n\} (\|\xi_n\| \leq \beta), \exists \{\tau_n\} (\tau_n > c), \exists$ — неограниченно возрастающая последовательность $\{t_n\} (t_n > \tau_n)$ такие, что $\|x(\xi_n, \tau_n, t_n)\| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. По числу β , согласно определению 2, укажем число $B = B(\beta)$, при котором $\sigma_c(v) > \beta$, если $v > B$. Кроме того, с учетом сделанных построений можно указать число $N = N(B)$ такое, что $\|x(\xi_n, \tau_n, t_n)\| > B \forall n > N$. Поэтому для точки $\eta_n = x(\xi_n, \tau_n, t_n)$ по определению функции $\sigma_c(v)$ будем иметь соотношение: $\|x(\eta_n, t_n, \tau_n)\| = \|\xi_n\| \geq \sigma_c(B) > \beta$, противоречащее выбору ξ_n . Это и доказывает 1.

Доказательство 2. Пусть решения равномерно ограничены по $\tau < d$, но функция $\sigma_d(v)$ не является бесконечно большой. Другими словами, существует неограниченно возрастающая последовательность $\{v_n\}$ и число $\Sigma < \infty$, для которого $\sigma_d(v_n) \leq \Sigma, \forall n \geq 1$. В соответствии с определением $\sigma_d(v)$ это значит, что $\exists \{\xi_n\} (\|\xi_n\| = v_n), \exists \{\tau_n\} (\tau_n < d), \exists \{t_n\} (t_n < \tau_n)$ такие, что $\|x(\xi_n, \tau_n, t_n)\| \leq \Sigma$. В таком случае для точки $\eta_n = x(\xi_n, \tau_n, t_n)$ имеем: $\|\eta_n\| \leq \Sigma$, но $\|x(\eta_n, t_n, \tau_n)\| = \|\xi_n\| \rightarrow \infty$. Однако это противоречит определению 1 (по $\tau < d$) Теорема доказана.

Следствие 1. Для равномерной ограниченности решений системы (1) по $\tau \in R$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\inf \sigma(v, \tau), \tau \in R$, являлась бесконечно большой.

Предположим теперь, что существует непрерывная функция $\varphi: R \rightarrow R$ $\varphi(\tau) > 0, \tau \in R$, такая что

$$\|f(\xi, \tau)\| \leq \varphi(\tau) \|\xi\|, \forall \xi \in R^n, \quad (2)$$

$$\int_a^{a+\beta} \varphi(v) dv \leq \Delta(\beta) < \infty. \quad \forall a \in R, \forall \beta > 0. \quad (3)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (2), (3) и решения системы (1) ограничены. Тогда решения системы (1) равномерно ограничены по $\tau \in [\alpha, \alpha + \beta] \forall \alpha \in R$ и $\forall \beta, 0 < \beta < \infty$.

Доказательство. Используя интегральное представление решений системы (1) и лемму Гронуолла — Беллмана [4] можно показать, что для всякого решения $x(\xi, \tau, t)$ справедлива оценка $\|x(\xi, \tau, t)\| \leq \| \xi \| \exp \Delta(\beta) \forall t \in [\tau, \tau + \beta], \forall \tau \in [\alpha, \alpha + \beta]$.

Поэтому $\forall v > 0$ и числа $B = v \exp \Delta(\beta)$ можем записать условие

$$\| \xi \| \leq v \Rightarrow \| x(\xi, \tau, t) \| \leq B \forall \tau \in [\alpha, \alpha + \beta], \forall t \in [\tau, \tau + \beta]. \quad (4)$$

По числу B в силу определения 1 найдется число $R_0 = R_0(B, \alpha + \beta)$, для которого

$$\| \eta \| \leq B \Rightarrow \| x(\eta, \alpha + \beta, t) \| \leq R_0 \forall t \geq \alpha + \beta. \quad (5)$$

Следовательно, из (4), (5) получаем: $\| \xi \| \leq v \Rightarrow \| x(\xi, \tau, t) \| \leq R_0(v) \forall t \geq \tau, \forall \tau \in [\alpha, \alpha + \beta]$, что и требовалось доказать.

II. Предельно ограниченные решения.

Определение 3 [3]. Решения системы (1) называются предельно ограниченными, если существует число $R_1 > 0$ такое, что $\forall A > 0, \forall \tau \in R$ можно указать число $T = T(A, \tau)$, для которого из условия $\| \xi \| \leq A$ следует неравенство

$$\| x(\xi, \tau, t) \| \leq R_1 \forall t \geq \tau + T.$$

Если число T можно выбрать не зависящим от $\tau \in I$, где I — интервал R , то решения системы (1) равномерно предельно ограничены по $\tau \in I$.

Лемма 2. Если решения системы (1) равномерно предельно ограничены по $\tau > c$ ($\tau < d$) и выполнены условия (2), (3), то они и равномерно ограничены по $\tau > c$ (соответственно по $\tau < d$).

На самом деле, согласно равномерной предельной ограниченности $\exists R_1, \forall A > 0 \exists T = T(A) > 0$, что $\| \xi \| \leq A \Rightarrow \| x(\xi, \tau, t) \| \leq R_1 \forall t \geq \tau + T, \forall \tau > c$. Кроме того, из (2), (3) имеем оценку $\| x(\xi, \tau, t) \| \leq \| \xi \| \exp \Delta(T) = A \exp \Delta(T), \tau \leq t \leq \tau + T$. Следовательно, $\forall A > 0 \exists R_2 = \max \{ R_2 A \exp \Delta(T) \}$ такое, что $\| \xi \| \leq A \Rightarrow \| x(\xi, \tau, t) \| \leq R_2 \forall t \geq \tau, \forall \tau > c$, что и требуется для определения 1. Аналогично рассматривается и случай $\tau < d$.

Лемма 3. Пусть решения системы (1) равномерно ограничены по $\tau > c$. Если существует число $\Gamma > 0$ такое, что $\forall \xi \in R^n$ и $\forall \tau > c$ можно указать неограниченно возрастающую последовательность $\{t_n\}$, для которой $\| x(\xi, \tau, t_n) \| \leq \Gamma$, то решения системы (1) предельно ограничены.

Доказательство. В силу равномерной ограниченности по $\tau > c$ решений системы (1) имеем: для $\Gamma > 0, \exists R_3 = R_3(\Gamma) > 0$ такое, что $\| \xi \| \leq \Gamma \Rightarrow \| x(\xi, \tau, t) \| \leq R_3 \forall t \geq \tau, \forall \tau > c$. Предположим, что решения не являются предельно ограниченными. Тогда для произвольного числа $R_1 \geq R_3$ существует состояние $\bar{\xi} \in R^n$, момент $\bar{\tau} > c$ и неограниченно возрастающая последовательность чисел $\{\bar{t}_n\}$ такие, что $\| x(\bar{\xi}, \bar{\tau}, \bar{t}_n) \| > R_3$. Кроме того, по условию леммы можно указать неограниченно возрастающую последовательность моментов времени $\{t_k\}$, для которых $\| x(\bar{\xi}, \bar{\tau}, t_k) \| \leq \Gamma$. Зафиксировав $t_k > c$, положим $\eta_k = x(\bar{\xi}, \bar{\tau}, t_k)$. В этом случае для точки $\eta_k, \| \eta_k \| \leq \Gamma$, в силу сделанных построений будем иметь: $\| x(\eta_k, t_k, t) \| \leq R_3 \forall t \geq t_k, t_k > c$. Но тогда для $\bar{t}_n > t_k \| x(\eta_k, t_k, \bar{t}_n) \| = \| x(\bar{\xi}, \bar{\tau}, \bar{t}_n) \| \leq R_3$, что противоречит построению последовательности $\{\bar{t}_n\}$. Лемма доказана.

Для всякой точки $(\xi, \tau) \in R^{n+1}$ множество $\gamma^-(\xi, \tau) = \{ (x(\xi, \tau, t), t) \in R^{n+1} : t \leq \tau \}$ принято называть отрицательной полутраекторией.

Лемма 4. Предположим, что решения системы (1) равномерно предельно ограничены по $\tau < d$ ($d \leq \infty$) и число R_1 соответствует определению 3. Положим $Z = \{ \xi \in R^n : \| \xi \| > R_1 \}$. Тогда множество $\{ \gamma^-(\xi, \tau) \in Z \times R : \xi \in Z, \tau < d \}$ отрицательных полутраекторий системы (1) пусто.

Действительно, в силу определения 3 равномерной предельной ограниченности решений всякое решение (1) не может находиться в Z на про-

межутке времени больше, чем заданное число $T=T(A)$. Это и доказывает лемму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М., 1959.
2. Зубов В. И.— Матем. сб., 1959. т. 48, № 2, с. 149.
3. Иосифова Т. Математика: Сб. переводов.— М., 1955. т. 9, № 5, с. 95.
4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М., 1954.

Поступила в редакцию
19.04.79.

Кафедра МОУ

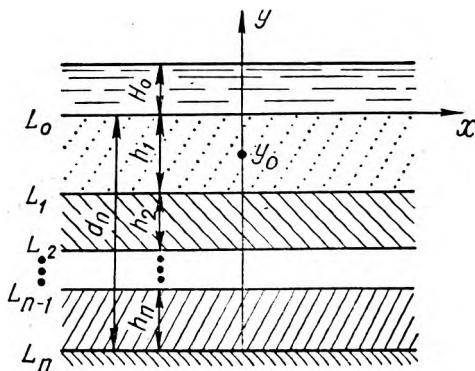
УДК 532.545

И. А. ВЕРЕМЧУК

СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБЛАСТИ С ТОЧЕЧНЫМ СТОКОМ

Стационарная фильтрация жидкости в многослойном анизотропном грунте с точечным стоком имеет важное значение при решении таких проблем, как определение запасов подземных вод и гидротехническое строительство. Схематически рассматриваемая задача представлена на рисунке.

Обозначим через H_r ($r=1, n$) значения напора в r -ом слое. Считаем, что жидкость и среда несжимаемы, а фильтрация подчиняется линейному закону, тогда фильтрация в каждом из слоев описывается уравнением [1]:



$$c'_{11} \frac{\partial^2 H_r}{\partial x^2} + 2c'_{12} \frac{\partial^2 H_r}{\partial x \partial y} + c'_{22} \frac{\partial^2 H_r}{\partial y^2} = 0 \quad (r=\overline{1, n}), \quad (1)$$

где c'_{11} , c'_{12} , c'_{22} — константы.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 \text{ на } L_0, \\ H_r &= H_{r+1}, \quad c'_{12} \frac{\partial H_r}{\partial x} + c'_{22} \frac{\partial H_r}{\partial y} = c'^{r+1}_{12} \frac{\partial H_{r+1}}{\partial x} + c'^{r+1}_{22} \frac{\partial H_{r+1}}{\partial y} \\ &\text{на } L_r \quad (r=1, n-1), \\ c''_{12} \frac{\partial H_n}{\partial x} + c''_{22} \frac{\partial H_n}{\partial y} &= 0 \text{ на } L_n. \end{aligned} \quad (2)$$

К поставленным условиям добавляем требование, что $|H_r| < M < \infty$ везде, кроме окрестности стока.

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой

$$F_r^0(\xi_r) + Q_r^0(\xi_r) = H_r + i\eta_r \quad (r=\overline{1, n}), \quad (3)$$

где $F_r^0(\xi_r)$ и $Q_r^0(\xi_r)$ — аналитические функции от $\xi_r = x + \lambda'_r y$ в соответствующих областях фильтрации, за исключением точки ξ_0 (где находится сток), $\lambda'_0 = \lambda'_{01} + i\lambda'_{02}$ — комплексная константа.

Считая, что функции η_r удовлетворяют условиям, аналогичным (2), на основании формулы (3) получим

$$F_1^0(\xi_1) + Q_1^0(\xi_1) = H_0 \text{ на } L_0,$$

$$F_r^0(\xi_r) + Q_r^0(\bar{\xi}_r) = F_{r+1}^0(\xi_{r+1}) + Q_{r+1}(\xi_{r+1}) \kappa_0^r (F_r(\xi_r) - Q_r(\bar{\xi}_r)) = \kappa_0^{r+1} (F_{r+1}(\xi_{r+1}) - Q_{r+1}(\bar{\xi}_{r+1})) \text{ на } L_r (r = \overline{1, n-1}),$$

$$F_n(\xi_n) - Q_n(\bar{\xi}_n) = 0 \text{ на } L_n,$$

$$\text{где } \kappa_0^r = \sqrt{c_{11}^r c_{22}^r - (c_{12}^r)^2}, \quad F_r(\xi_r) = \frac{d}{d\xi_r} F_r^0(\xi_r).$$

Функции $F_1(\xi_1)$ и $Q_1(\bar{\xi}_1)$ будем искать в виде

$$F_1(\xi_1) = m_0(\xi_1 - \xi_0)^{-1} + \int_0^\infty (A_1(\alpha) e^{i\alpha\xi_1} + B_1(\alpha) e^{-i\alpha\xi_1}) d\alpha,$$

$$Q_1(\bar{\xi}_1) = m_0(\xi_1 - \bar{\xi}_0)^{-1} + \int_0^\infty (M_1(\alpha) e^{i\alpha\bar{\xi}_1} + N_1(\alpha) e^{-i\alpha\bar{\xi}_1}) d\alpha,$$

а остальные функции $F_r(\xi_r)$ и $Q_r(\bar{\xi}_r)$ ($r = \overline{2, n}$) в виде интеграла Фурье

$$F_r(\xi_r) = \int_0^\infty (A_r(\alpha) e^{i\alpha\xi_r} + B_r(\alpha) e^{-i\alpha\xi_r}) d\alpha,$$

$$Q_r(\bar{\xi}_r) = \int_0^\infty (M_r(\alpha) e^{i\alpha\bar{\xi}_r} + N_r(\alpha) e^{-i\alpha\bar{\xi}_r}) d\alpha,$$

Здесь $m_0 = q/4\pi\lambda_0^1$; q — мощность стока; $A_r(\alpha)$, $B_r(\alpha)$, $M_r(\alpha)$, $N_r(\alpha)$ ($r = \overline{1, n}$) — комплексные функции действительной переменной α .

Подставляя в условия (4) выражения (5), (6) и приравнявая коэффициенты при $\exp(i\alpha x)$ и $\exp(-i\alpha x)$ получаем следующую систему уравнений для определения неизвестных $A_r(\alpha)$, $B_r(\alpha)$, $M_r(\alpha)$, $N_r(\alpha)$:

$$A_1 + M_1 = a_0, \quad B_1 + N_1 = a_0, \quad \frac{A_1}{\alpha_{11}} + M_1 \bar{\alpha}_{11} - \frac{A_2 + M_2}{\alpha_{21}} = a_1,$$

$$B_1 \alpha_{11} + \frac{N_1}{\alpha_{11}} - (B_2 + N_2) \alpha_{21} = a_1, \quad \frac{A_1}{\alpha_{11}} - M_1 \bar{\alpha}_{11} - \frac{A_2 - M_2}{\alpha_{21}} \kappa_0^{21} = a_1,$$

$$B_1 \alpha_{11} - \frac{M_1}{\alpha_{11}} - \left(B_2 \alpha_{21} - \frac{N_2}{\alpha_{21}} \right) \kappa_0^{21} = a_1, \quad \frac{A_2}{\alpha_{22}} + M_2 \bar{\alpha}_{22} - \frac{A_3}{\alpha_{32}} - \frac{M_3}{\alpha_{32}} = 0,$$

$$B_2 \alpha_{22} + \frac{N_2}{\alpha_{22}} - B_3 \alpha_{32} - \frac{N_3}{\alpha_{32}} = 0,$$

.....

$$\frac{A_n}{\alpha_{nn}} - M_n \bar{\alpha}_{nn} = 0, \quad B_n \alpha_{nn} - \frac{N_n}{\alpha_{nn}} = 0.$$

Здесь $a_0 = im_0 \exp(-i\alpha\xi_0)$, $a_1 = im_0(i\alpha(\xi_0 + \lambda_0^1 d_1))$, $\kappa_0^{sr} = \kappa_0^s / \kappa_0^r$ ($s = \overline{2, n}$),

$$\alpha_{rj} = \exp(i\alpha\lambda_0^r d_j), \quad d_j = \sum_{k=1}^j h_k.$$

Определив из системы $A_r(\alpha)$, $B_r(\alpha)$, $M_r(\alpha)$ и $N_r(\alpha)$ по формуле (3) найдем значения напоров H_r в каждом из слоев.

Особый интерес представляют частные случаи этой задачи. Исследуем их:

1) при $n=2$

$$H_1 = 2m_0 \left[\ln \left| \frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_1 - \bar{\xi}_0} \right| + 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda_{12} + e^{-\alpha h_1}}{\alpha(\lambda_{12} + \lambda_{21} e^{-\alpha h_2} + e^{\alpha h_1})} (\cos \alpha(\xi_1 - \xi_0) - \cos \alpha(\xi_1 - \bar{\xi}_0)) d\alpha \right] + H_0,$$

$$H_2 = 2m_0 \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda_{21}(1 + e^{-\alpha h_2})}{\alpha(\lambda_{12} + \lambda_{21} e^{-\alpha h_2} + e^{\alpha h_1})(1 + e^{\alpha h_2})} [(e^{-i\alpha\xi_0} - e^{-i\alpha\bar{\xi}_0}) \times$$

$$\times (e^{i\alpha} ((\lambda_0^2 - \lambda_0^1) d_1 + \xi_0) + (e^{i\alpha \xi_0} - e^{i\alpha \bar{\xi}_0}) e^{-i\alpha (\bar{\lambda}_0^2 - \lambda_0^1) d_1 + i l_2 + \xi_0})] d\alpha + H_0.$$

2) при $n = 2$, $h_2 = \infty$, $\lim_{\xi_r \rightarrow \infty} H_r = 0$

$$H_1 = 2m_0 \left[\ln \left| \frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_1 - \bar{\xi}_0} \right| + \sum_{l=1}^{\infty} (-\lambda_{12})^l \ln \left| \frac{(\xi_1 - \xi_0)^2 - l^2 l_1^2}{(\xi_1 - \bar{\xi}_0)^2 - l^2 l_1^2} \right| \right] + H_0,$$

$$H_2 = 2m_0 \lambda_{21} \sum_{l=0}^{\infty} (-\lambda_{12})^l \ln \left| \frac{\xi_2 - \xi_0 + (\lambda_0^2 - \lambda_0^1) d_1 - i l l_1}{\xi_2 - \bar{\xi}_0 + (\lambda_0^2 - \lambda_0^1) d_1 - i l l_1} \right| + H_0.$$

3) при $n = 1$

$$H = 2m_0 \left[\ln \left| \frac{\xi - \xi_0}{\xi - \bar{\xi}_0} \right| + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \ln \left| \frac{\xi - \xi_0 + i l l_1}{\xi - \bar{\xi}_0 - i l l_1} \right| \right] + H_0.$$

$$\text{Здесь } l_1 = \frac{2x_0^1}{c_{22}^1} d_1, \quad l_2 = \frac{2x_0^2}{c_{22}^2} d_2, \quad \lambda_{12} = \frac{x_0^1 - x_0^2}{x_0^1 + x_0^2}, \quad \lambda_{21} = \frac{2x_0^1}{x_0^1 + x_0^2}.$$

Следует отметить, что, полагая $k'_{11} = k'_{22} = k_r$, из решения данной задачи получим, как частный случай, решение аналогичной задачи для многослойной области, состоящей из однородных изотропных слоев, приведенное в работах [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И. А., Веремчук И. А.—Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1974, № 1.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод.—М., 1952.
3. Богомолов Г. В. и др. Искусственное восполнение запасов подземных вод.—М., 1978.

Поступила в редакцию
13.12.79.

Кафедра теоретической механики

УДК 519.717

Я. А. НОВИКОВ

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ИМПЛИКАТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Для любой формулы алгебры логики (ФАЛ), реализующей булеву функцию, существует ей равносильная ФАЛ над множеством булевых операторов G , где $G = \{\Rightarrow, \neg\}$, называемая импликативной нормальной формой (ИНФ) [1]. Среди нормальных форм алгебры логики ИНФ выделяется особенностью своего строения, являясь единственной нормальной формой однофункционального типа [2]. Для построения ИНФ используется табличный метод [1]. Необходимость формирования таблицы истинности булевой функции затрудняет применение такого метода в том случае, когда функция задана ФАЛ. В данной статье рассматривается алгебраический метод, который позволяет избежать этапа построения таблицы истинности булевой функции. Метод заключается в выполнении последовательности эквивалентных преобразований в классе формул над множеством G .

Условимся, что используемые ниже индексы принимают целочисленные положительные значения, то есть запись $j \leq r$ означает, что $1 \leq j \leq r$. Определим r -местную импликацию, как выражение вида $(B_1 \Rightarrow (B_2 \Rightarrow \Rightarrow (\dots (B_{r-1} \Rightarrow \neg B_r) \dots)))$, или в короткой записи $(\Rightarrow B_j)_{j < r}$. Заметим, что одноместная импликация равна $\neg B_1$. Согласно [2], r -местная импликация допускает любые перестановки символов B_j , где $j \leq r$. Поэтому для $n_1 n_2 \dots n_k$ -местной импликации иногда будем использовать обозначение $(\Rightarrow B_{i_1}, \dots, i_k)$, полагая при этом, что индексы изменяются в порядке $i_1 < n_1, \dots, i_k < n_k$.

$i_1, i_2, \dots, i_k$. Пусть $\delta \in \{0, 1\}$ и $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \bar{x}$ — в противном случае. Тогда при принятых обозначениях ИНФ, реализующей функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, называется k -местная импликация, для которой $B_j = (x_{j1}^{v_{j1}} \Rightarrow \Rightarrow (x_{j2}^{v_{j2}} \Rightarrow \dots (x_{jn_j}^{v_{jn_j}} \Rightarrow \neg x_{jn_j}^{v_{jn_j}}) \dots))$, где $n_j \geq 1$ и $x_{ij} \in \{x_1, \dots, x_n\}$, и имеет место равенство $f(x_1, \dots, x_n) = (\Rightarrow (\Rightarrow x_{jk}^{v_{jk}}))$, причем допустимо, что $x_{ji}^{v_{ji}} = x_{jk}^{v_{jk}}$ при $i \neq k$.

Условимся в дальнейшем для наглядности изложения круглые скобки в ФАЛ заменять на квадратные или фигурные. Далее нам потребуются равносильности

$$\neg \neg A \equiv A, \quad (1)$$

$$\neg (A \Rightarrow \neg \{B \Rightarrow C\}) \equiv \{A \Rightarrow B\} \Rightarrow \neg \{A \Rightarrow \neg C\}, \quad (2)$$

$$\neg \{A \Rightarrow B\} \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow \{\neg B \Rightarrow C\}, \quad (3)$$

$$\neg A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow A, \quad (4)$$

справедливость которых легко установить.

Лемма. Для любых $n_1 \geq 1$ и $n_2 \geq 1$ имеет место равносильность

$$(\Rightarrow X_{1i_1}) \Rightarrow \neg (\Rightarrow X_{2i_2}) \equiv \neg (\Rightarrow B_{i_1, i_2}), \quad (5)$$

где $B_{i_1, i_2} = (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2})$, а X_{ri_r} — произвольная ФАЛ.

Доказательство. При $n_1 = 1, n_2 = 1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что (5) имеет место при $n_1 = k_1, n_2 = k_2$. Докажем (5) для $n_1 = k_1, n_2 = k_2 + 1$. Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} ((\Rightarrow X_{1i_1}) \Rightarrow \neg (\Rightarrow X_{2i_2})) &\stackrel{(1)}{\equiv} \neg \neg (\neg (\Rightarrow X_{1i_1}) \Rightarrow \neg \{X_{21} \Rightarrow [\Rightarrow X_{2i_2}]\}) \stackrel{(2)}{\equiv} \\ &\equiv \neg (\{(\Rightarrow X_{1i_1}) \Rightarrow X_{21}\} \Rightarrow \neg \{[\Rightarrow X_{1i_1}] \Rightarrow [\Rightarrow X_{2i_2}]\}) \stackrel{(2)}{\equiv} \text{(в силу индук-} \\ &\text{тивного предположения)} \equiv \neg (\{[\Rightarrow X_{1i_1}] \Rightarrow X_{21}\} \Rightarrow \{[\Rightarrow X_{1i_1}] \Rightarrow (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2})\}). \\ \text{Полученную формулу обозначим через } \Phi_1. \text{ Псылка в } \Phi_1 \text{ преобразуется} \\ \text{следующим образом: } \{[\Rightarrow X_{1i_1}] \Rightarrow X_{21}\} &\stackrel{(1), (4)}{\equiv} \neg \neg \{X_{21} \Rightarrow [\Rightarrow X_{1i_1}]\} \stackrel{(2)}{\equiv} \\ &\equiv \neg \{X_{21} \Rightarrow X_{11}\} \Rightarrow \neg \{X_{21} \Rightarrow [\Rightarrow X_{1i_1}]\} \stackrel{(2), (2)}{\equiv} \dots \equiv \neg \{X_{21} \Rightarrow (\neg X_{21} \Rightarrow X_{1i_1})\} \stackrel{(4)}{\equiv} \\ &\equiv \neg [\Rightarrow (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{21})]. \text{ Таким образом, } \Phi_1 \equiv \neg (\neg [\Rightarrow (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{21})]) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\Rightarrow (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2})]. \end{aligned}$$

Докажем теперь равносильность

$$\neg [\Rightarrow C_i] \Rightarrow [\Rightarrow D_j] \equiv (C_1 \Rightarrow (C_2 \Rightarrow (\dots (C_n \Rightarrow [\Rightarrow D_j]) \dots))). \quad (6)$$

Действительно, $\neg [\Rightarrow C_i] \Rightarrow [\Rightarrow D_j] \stackrel{(3)}{\equiv} (C_1 \Rightarrow \{[\Rightarrow C_i] \Rightarrow [\Rightarrow D_j]\}) \stackrel{(3), (3)}{\equiv} \dots \equiv$
 $\stackrel{(3)}{\equiv} (C_1 \Rightarrow (C_2 \Rightarrow (\dots (C_{n-1} \Rightarrow (\neg \neg C_n \Rightarrow [\Rightarrow D_j]) \dots))) \equiv \Phi_2$, где Φ_2 — правая часть равносильности (6). Если принять, что в (6) $C_i = \{\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2}\}$, $n = k_1$, а $D_j = \{\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2}\}$, $k = k_1 k_2$, получим $\Phi_1 \equiv \neg (\Rightarrow (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2}))$, и, следовательно, равносильность (5) справедлива при рассмотренных значениях n_1 и n_2 . Случай, когда $n_1 = k_1 + 1, n_2 = k_2$, легко свести к предыдущему, выполнив в правой и левой частях устанавливаемой равносильности (5) преобразование (4). Лемма доказана.

В формулировке теорем 1, 2 символы X, Y используются вместо переменных x, y или их отрицаний x^0, y^0 . Пусть $X = \neg x$, и так как $X^0 =$

$= \neg X$, то $X^0 = \neg \neg x^{(1)} = x$. Поэтому далее символ X^0 при $X = \neg x$ обозначает вхождение в ИНФ переменной x .

Теорема 1. Отрицание ИНФ $A = (\Rightarrow (\Rightarrow X_{li}))$ равносильно ИНФ $A_1 = (\Rightarrow_{i_1 < n_1, \dots, i_k < n_k} (X_{1i_1}^0 \Rightarrow (X_{2i_2}^0 \Rightarrow (\dots (X_{k-1 i_{k-1}}^0 \Rightarrow \neg X_{ki_k}^0) \dots)))$.

Доказательство. Из равносильности $A \equiv \neg A_1$, в силу (1), следует справедливость равносильности $\neg A \equiv A_1$. В связи с этим достаточно доказать равносильность

$$(\Rightarrow (\Rightarrow X_{li})) \equiv \neg (\Rightarrow_{i_1 < n_1, \dots, i_k < n_k} (\neg X_{1i_1} \Rightarrow (\dots (\neg X_{k-1 i_{k-1}} \Rightarrow X_{ki_k}) \dots))). \quad (7)$$

Для $k=1$ она очевидна. Предположим, что (7) имеет место при $k=r-1$. Пусть $k=r$, тогда $(\Rightarrow (\Rightarrow X_{li})) \equiv$ (по индуктивному предположению) $\equiv ((\Rightarrow_{i_1 < n_1} X_{1i_1}) \Rightarrow \neg (\Rightarrow_{i_2 < n_2, \dots, i_r < n_r} (\neg X_{2i_2} \Rightarrow (\neg X_{3i_3} \Rightarrow (\dots (\neg X_{r-1 i_{r-1}} \Rightarrow X_{ri_r}) \dots)))))) \equiv \neg (\Rightarrow_{i_1 < n_1, \dots, i_r < n_r} (\neg X_{1i_1} \Rightarrow (\neg X_{2i_2} \Rightarrow (\dots (\neg X_{r-1 i_{r-1}} \Rightarrow X_{ri_r}) \dots))))$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть A и B — ИНФ, причем $A = (\Rightarrow (\Rightarrow X_{li}))$ и $B = (\Rightarrow_{p < r} D_p)$, где $D_p = (\Rightarrow_{j_p < m_p} Y_{pj_p})$. Тогда формула $A \Rightarrow B$ равносильна ИНФ $A_2 = (C_1 \Rightarrow (C_2 \Rightarrow (\dots (C_{n_1 n_2 \dots n_k} \Rightarrow (\Rightarrow_{p < r} D_p)) \dots)))$. Здесь символами C_i , $i \leq n_1 n_2 \dots n_k$, обозначены все возможные k -местные импликации вида $(X_{1i_1}^0 \Rightarrow (\dots (X_{k-1 i_{k-1}}^0 \Rightarrow \neg X_{ki_k}^0) \dots)))$, где $i_l \leq n_l$, $l \leq k$.

Доказательство. Используя (7), получим $A \Rightarrow B = (\Rightarrow_{l < k} (\Rightarrow_{i_l < n_l} (\Rightarrow_{p < r} D_p))) \equiv \neg (\Rightarrow_{i_1 < n_1, \dots, i_k < n_k} (X_{1i_1}^0 \Rightarrow (X_{2i_2}^0 \Rightarrow (\dots (X_{k-1 i_{k-1}}^0 \Rightarrow \neg X_{ki_k}^0) \dots)))) \equiv \neg (\Rightarrow_{p < r} D_p) = \Phi_3$. Полагая здесь и в (6), что $C_i = (X_{1i_1}^0 \Rightarrow (X_{2i_2}^0 \Rightarrow (\dots (X_{k-1 i_{k-1}}^0 \Rightarrow \neg X_{ki_k}^0) \dots)))$, где $i \leq n_1 n_2 \dots n_k$, $i_l \leq n_l$, $l \leq k$, убедимся в справедливости теоремы: $\Phi_3 = \neg (\Rightarrow_{i \leq n_1, n_2, \dots, n_k} C_i) \Rightarrow (\Rightarrow_{p < r} D_p) \equiv (C_1 \Rightarrow (C_2 \Rightarrow (\dots (C_{n_1 n_2 \dots n_k} \Rightarrow (\Rightarrow_{p < r} D_p)) \dots)))$.

Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 позволяют преобразовать к ИНФ произвольную ФАЛ, заданную над множеством G . Действительно, если заменить на ИНФ вида $\neg (\neg x^\delta)$ каждое вхождение в ФАЛ символов переменных x^δ , где $\delta \in \{0, 1\}$, а затем применить достаточное число раз равносильности, доказанные теоремами 1 и 2, то получим некоторую ИНФ исходной ФАЛ. Эффективность данной процедуры построения ИНФ можно повысить, если в исходной ФАЛ сразу выделить множество подформул, которые являются ИНФ. Кроме того, можно уменьшить громоздкость преобразований по теоремам 1, 2, упростив ИНФ вида $(\Rightarrow_{j < k} B_j)$ по следующим правилам, которые аналогичны соответствующим приемам преобразования дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм.

I. Приведение подобных членов: в r -местной импликации B_j , содержащей многократные вхождения символа переменной x^δ , может быть оставлено только одно вхождение символа x^δ .

II. Удаление константы: r -местная импликация B_j , содержащая символы x^δ и $x^{\bar{\delta}}$, тождественна единице и может быть удалена из ИНФ.

III. Поглощение: если r_1 — местная импликация B_j содержит вхождения только переменных $x_l^{i_l}$, $i_l \leq r_1$, а $(r_1 + r_2)$ — местная импликация B_p , $p \neq j$, включает в себя вхождения тех же переменных и, кроме того, может содержать вхождения переменных $y_l^{i_l}$, $l \leq r_2$ ($r_2 \geq 0$), то импликация B_p может быть удалена из ИНФ.

Доказательство I—IV несложно. Установим, например, справедливость III. Так как в k -местной импликации $(\Rightarrow B_i)_{i \leq k}$ допустимы любые перестановки символов $B_i, i \leq k$, то достаточно доказать, что $B_p \Rightarrow \neg B_j \equiv \neg B_j$ или $(y_1^{b_1} \Rightarrow (y_2^{b_2} \Rightarrow (\dots (y_{r_2}^{b_{r_2}} \Rightarrow B_j) \dots))) \Rightarrow \neg B_j \equiv \neg B_j$. Рассмотрим два случая. Пусть при некоторых значениях переменных $x_i^{b_i}, i \leq r$, имеет место: 1) $B_j = 0$, 2) $B_j = 1$. Тогда получим, что 1) $B_p \Rightarrow \neg B_j = B_p \Rightarrow \neg 0 \equiv 1 = \neg B_j$, 2) $B_p \Rightarrow \neg B_j = (y_1^{b_1} \Rightarrow (y_2^{b_2} \Rightarrow (\dots (y_{r_2}^{b_{r_2}} \Rightarrow 1) \dots))) \Rightarrow \neg 1 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0 = \neg B_j$, — при любых значениях переменных $y_l^{b_l}, l \leq r_2$. Утверждение доказано. Доказательство остальных утверждений аналогично данному.

Легко видеть, что если сразу преобразовать Φ_4 по теореме 1, не используя при этом правил I—IV, то получим ИНФ, которая будет содержать $n_1 n_2 \dots n_9 = 3^9$ вхождений символов переменных против 14 в нашем случае. Данный пример иллюстрирует полезность применения правил I—IV при построении ИНФ алгебраическим методом.

60

отмеченные трудности отсутствуют. Идея, положенная в основу этого метода, является, в сущности, реализацией общего подхода, использованного в работах [1, 2].

Рассмотрим комплекснозначные функции действительного переменного, представимые в виде

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{t^\lambda} \ln^k t \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где λ — комплексный параметр; $\varphi(t)$ — локально интегрируемая на $(0, +\infty)$ функция с ограниченной степенью роста на бесконечности и непрерывная справа в нуле. Для функций вида (1) определим интеграл

$$F(z, s) = \int_0^\infty t^s f(t) e^{-zt} dt. \quad (2)$$

Очевидно, он аналитичен по совокупности переменных z и s соответственно в областях $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \lambda - 1$ и $\operatorname{Re} z > \alpha_1$, где α_1 — степень роста функции $f(t)$ на бесконечности.

Определение 1. Обозначим через L_c класс функций $f(t)$, для которых функция $F(z, s)$, определяемая соотношением (2), допускает аналитическое продолжение по переменной s в односвязную область D_s , включающую достаточно большие по модулю точки s и точку $s=0$.

Определение 2. Изображением Лапласа — Эйлера функции класса назовем функцию $F(z)$, определяемую по правилу $F(z) = \lim_{s \rightarrow 0} F(z, s)$.

Элементы класса L_c будем называть оригиналами Лапласа — Эйлера со степенной особенностью в нуле.

Очевидно, при $\operatorname{Re} \alpha < 1$, функция $F(z, s)$ аналитична в точке $s=0$ при $\operatorname{Re} z > \alpha_1$, и в данных условиях отпадает необходимость аналитического продолжения. Отсюда следует, что в случае классического оригинала вида (1) изображение Лапласа — Эйлера существует и совпадает с

обычным изображением Лапласа. Действительно, $F(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty t^s f(t) e^{-zt} dt =$

$= \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = F_L(z)$. Полученный результат равносителен утверждению, что класс L_c не пуст. Покажем, что функции вида (1), преобразуемые по Лапласу, не исчерпывают всего L_c .

Теорема 1. Комплексозначная функция действительного переменного $f(t)$, представимая в виде (1) с $\varphi(t)$, аналитической в нуле, принадлежит L_c при $\lambda \neq n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Доказательство проведем для частного случая, когда $f(t) = \frac{\varphi(t)}{t^\lambda}$.

Общий случай не имеет каких-либо принципиальных особенностей, но сопряжен с громоздкими выкладками.

Пусть функция $\varphi(t)$ представима степенным рядом $\varphi(t) = \sum_0^\infty a_k t^k$ с отличным от нуля радиусом сходимости R . Рассмотрим функцию $F(z, s)$, соответствующую $f(t)$: $F(z, s) = \int_0^\infty t^s f(t) e^{-zt} dt = \int_0^a t^s f(t) e^{-zt} dt + \int_a^\infty t^s f(t) e^{-zt} dt =$
 $= F_1(z, s) + F_2(z, s)$, ($0 < a < 1$). Функция $F_2(z, s)$ аналитична по z в области $\operatorname{Re} z > \alpha_1$ и по s во всей конечной комплексной плоскости. Изучим функцию $F_1(z, s)$.

$$F_1(z, s) = \int_0^a t^s f(t) e^{-zt} dt = \int_0^a t^{s-\lambda} e^{-zt} \left(\sum_0^\infty a_k t^k \right) dt \quad (3)$$

При $Re s > Re \lambda$ в (3) допустимо почленное интегрирование: $F_1(z, s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{a < R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda} dt = \sum_{k < Re \lambda} a_k \int_0^{a < R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda} dt + \sum_{k > Re \lambda} a_k \int_0^{a < R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda} dt = F_{11}(z, s) + F_{12}(z, s)$. Функция $F_{12}(z, s)$ аналитична по s в области $Re s > -1$. Это следует из равномерной по s в замыкании области $\beta > > Re s > \alpha - 1$ оценки (α, β — соответственно сколь угодно малое и сколь угодно большое положительные числа): $\left| \sum_{k > Re \lambda} a_k \int_0^{a < R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda} dt \right| \leq \sum_{k > Re \lambda} |a_k| \times \times \frac{\alpha^{Re(s+k-\lambda)+1}}{Re(s+k-\lambda+1)} \leq \frac{M}{\alpha} \sum_{k > Re \lambda} |a_k| \alpha^k \leq M_1$, справедливой при $Re z > 0$. Остается исследовать функцию $F_{11}(z, s)$.

$$F_{11}(z, s) = \sum_{k < Re \lambda} a_k \int_0^{a < R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda} dt = \sum_{k < Re \lambda} a_k \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{s+k-\lambda} dt - - \sum_{k < Re \lambda} a_k \int_{a < R}^{\infty} e^{-zt} t^{s+k-\lambda} dt \quad (Re z > 0). \quad (4)$$

С позиций определения 1 последний интеграл в выражении (4) не вызывает затруднений. Покажем, что в условиях теоремы 1 и первое слагаемое в (4) допускает аналитическое продолжение в точку $s=0$. При $z > 0$ после замены $zt = u$ имеем

$$\sum_{k < Re \lambda} a_k \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{s+k-\lambda} dt = \sum_{k < Re \lambda} \frac{a_k}{z} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{z}\right)^{s+k-\lambda} du = = \sum_{k < Re \lambda} \frac{a_k}{z^{k+1+s-\lambda}} \Gamma(s+k+1-\lambda). \quad (5)$$

Выражение (5) зависит от гамма-функции Эйлера, поэтому исследуемое слагаемое представляет собой аналитическую функцию в окрестности точки $s=0$ при λ , не равном целому положительному числу.

Воспользовавшись принципом аналитического продолжения функций двух комплексных переменных, убеждаемся, что $F(z, s)$ аналитически продолжима в область D_s удовлетворяющую необходимым требованиям. Следуя определению 1, можно утверждать, что при указанных функции $f(t) \in L_c$.

Доказательство общего случая проводится аналогично, лишь на заключительном этапе вместо гамма-функции придется рассматривать ее k -ую производную.

З а м е ч а н и е. Теорема 1 решает в общем случае вопрос, является ли данная функция $f(t)$ оригиналом Лапласа — Эйлера. Однако в некоторых частных случаях использование ее приводит к определению явного вида изображения, соответствующего исходному оригиналу. Например, для случая $f(t)$, представимой в виде (1) с $\varphi(t)$, являющейся целой функцией экспоненциального роста на бесконечности, можно получить следующие соотношения:

$$F(z, s) = \int_0^{\infty} t^s f(t) e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} t^{s-\lambda} e^{-zt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \ln^k t dt = = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} (t^{n-\lambda+s} \ln^k t) e^{-zt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{z}\right)^{n+s-\lambda} \ln^k \left(\frac{u}{z}\right) du = = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+s-\lambda+1}} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i \ln^k z^{-i} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n+s-\lambda} \ln^i u du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+s-\lambda+1}} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i \ln^{k-1} z \Gamma^{(i)}(n+s+1-\lambda). \quad (6)$$

Из выражения (6) получаем операционное соответствие:

$$\frac{\varphi(t)}{t^\lambda} \ln^k t \div \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n-\lambda+1}} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i \ln^{k-i} z \Gamma^{(i)}(n+1-\lambda), \quad (7)$$

в котором $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $\Gamma^{(i)}(z)$ — i -ая производная гамма-функции Эйлера.

Из соотношения (7), представляющего достаточно общий вид, можно получить некоторые частные случаи:

1. $\varphi(t) \equiv 1 \quad \frac{\ln^k t}{t^\lambda} \div \frac{1}{z^{1-\lambda}} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i \ln^{k-i} z \Gamma^{(i)}(1-\lambda).$
2. $\varphi(t) \equiv 1, \lambda = 0 \quad \ln^k t \div \frac{1}{z} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i \ln^{k-i} z \Gamma^{(i)}(1).$
3. $\varphi(t) \equiv 1, \lambda = 0, k = 1 \quad \ln t \div \frac{1}{z} (-\ln z + \Gamma'(1)) = -\frac{\ln z + \gamma}{z}.$
4. $\varphi(t) \equiv 1, k = 0 \quad \frac{1}{t^\lambda} \div \frac{\Gamma(1-\lambda)}{z^{1-\lambda}}. \quad (8)$

Если операционное равенство (8) переписать в виде $t^\alpha \div \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$,

где $\alpha = -\lambda \neq -1, 2, \dots$, получим известное соотношение классического операционного исчисления, полученное там путем аналитического продолжения по параметру α . Оригиналы, полученные таким образом, названы особыми. В нашем случае это обычные оригиналы Лапласа — Эйлера.

Кратко коснемся вопроса о допустимых операциях в L_c и обращении преобразования Лапласа — Эйлера для рассматриваемого класса функций.

В операционном исчислении определяют, как правило, следующие основные операции:

1. умножение оригинала на t ; 2. деление оригинала на t ; 3. дифференцирование оригинала; 4. интегрирование оригинала; 5. умножение оригинала на e^{at} (смещение изображения); 6. запаздывание аргумента; 7. свертка оригиналов.

Так как предметом исследований служат функции с неинтегрируемой степенной особенностью в нуле, естественно, что в данном случае операции интегрирования и свертки оригиналов лишены смысла. Операции 1, 2, 5, 6 допустимы, соответствующие операционные правила имеют тот же вид, что и в классическом операционном исчислении, и их вывод не составляет труда. Некоторое исключение представляет операционное правило дифференцирования оригинала. Остановимся на нем с целью иллюстрации вывода операционных правил для оригиналов рассматриваемого вида.

Теорема 2. Если $f'(t) \in L_c$, то $f(t)$ также из L_c и справедливо операционное соотношение

$$\dot{f}(t) \div z F(z) \quad (9)$$

при условии, что $f(t) \div F(z)$.

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем функцию } F_1(z, s) \text{ для } f'(t): F_1(z, s) &= \int_0^\infty t^s f'(t) e^{-zt} dt = \\ &= e^{-zt} t^s f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) d(e^{-zt} t^s) = z \int_0^\infty t^s f(t) e^{-zt} dt - s \int_0^\infty t^s \left(\frac{f(t)}{t} \right) e^{-zt} dt = \end{aligned}$$

$= zF(z, s) - sF_2(z, s)$. Переходя к пределу при $s \rightarrow 0$, получаем требуемое соотношение (9).

В заключение скажем несколько слов об операции обращения. Исходя из общего вида рассматриваемых оригиналов, можно утверждать, что при соответствующем выборе натурального n функция $t^n f(t)$ будет представлять классический оригинал. Так как операции умножения оригинала на t соответствует операция $(-d/dz)$ в пространстве изображений, то становится понятной идея обращения.

Теорема 3. Если функция комплексного переменного $\dot{F}(z)$ является изображением Лапласа — Эйлера функции действительного переменного $f(t)$ со степенной особенностью нецелого типа в нуле, то выражается через $F(z)$ с помощью следующих равенств:

$$1. f(t) = (-1)^n \frac{f_1(t)}{t^n}; \quad 2. f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F^{(n)}(z) e^{zt} dz, \quad (10)$$

в которых n зависит от $f(t)$ и $c > \alpha_1$, где α_1 — степень роста функции $f(t)$ на бесконечности.

Теорема 4. Если функция комплексного переменного $F(z)$ такова, что все ее производные, начиная с некоторого порядка k , отличны от нуля и удовлетворяют условиям обращения обычного преобразования Лапласа, то она принадлежит пространству изображений Лапласа — Эйлера и соответствующий ей оригинал $f(t)$ определяется с помощью формул (10) при любом $n \geq k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахович А. С. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1978, № 3, с. 46.

2. Гахович А. С. Операционное исчисление функций с неинтегрируемой особенностью в нуле. — Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2238-77. Деп. от 06.06.77.

Поступила в редакцию
02.12.79.

Кафедра ЭММ

УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ, Ю. И. КАШИНСКИЙ

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ЗАПРЕТАМИ

Рассматривается область определения транспортной задачи с запретами, организованными специальным образом:

$$M_{m \times n}^s(a, b) = \left\{ x = \|x_{ij}\|_{m \times n} \mid \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \right. \\ \left. i = \overline{1, m}, x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in G, x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \overline{G} \right\},$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ — векторы с действительными положительными компонентами; $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$; s — натуральное

число; $G = [\overline{\{1, m\}} \times \overline{\{1, n_s\}}] \setminus \bigcup_{p=1}^s (M_p \times N_p)$. Здесь $M_p = \{\overline{m_{p-1} + 1}, \overline{m_p}\}$,

$N_p = \{\overline{n_{p-1} + 1}, \overline{n_p}\}$, а m_p, n_p — такие числа, что $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_s < n_{s+1} = n$, $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_s = m$. Такую систему запретов имеет, например, задача распределения топливных ресурсов на коммунально-бытовые нужды [1]. Решение этой задачи, так же как и задачи, рассмотренной нами в [2, 3], направлено на повышение уровня рационального использования топливных ресурсов республики.

Заметим, что при $s = 1$ многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ становится транспортным. Такой многогранник достаточно подробно исследован в литературе (см., например, [4—8]).

В данной статье для многогранников $M_{m \times n}^s(a, b)$, $s \geq 2$ найдены условия непустоты, выделены классы многогранников минимальной и максимальной размерности, указаны пределы изменения числа их граней. Показано, что всякий многогранник не максимальной размерности представим в виде произведения многогранников меньшего порядка аналогичной структуры.

1. Критерий непустоты.

Теорема 1. Пусть $s \geq 2$. Многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ непуст тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\sum_{i \in M_p} a_i \geq \sum_{j \in N_p} b_j, \quad p = \overline{1, s}, \quad (1)$$

причем, по меньшей мере, одно из них является строгим.

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Из условий (1) следует существование неотрицательных чисел $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$, для которых выполняются равенства

$$\sum_{i \in M_p} a'_i = \sum_{j \in N_p} b_j, \quad p = \overline{1, s}. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться, что матрица x' , компоненты которой определяются по формулам

$$x'_{ij} = \begin{cases} \frac{a'_i \cdot b_j}{\sum_{j \in N_p} b_j}, & \text{если } (i, j) \in M_p \times N_p, \quad p = \overline{1, s}, \\ \frac{(a_i - a'_i) \cdot b_j}{\sum_{j \in N_{s+1}} b_j}, & \text{если } (i, j) \in \{1, m\} \times N_{s+1}, \\ 0, & \text{если } (i, j) \in G, \end{cases} \quad (3)$$

принадлежит многограннику $M_{m \times n}^s(a, b)$. Теорема 1 доказана.

2. Размерность. Ясно, что максимальная размерность многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ равна числу $d = mt_{s+1} - m - n + 1 + \sum_{p=1}^s k_p t_p$, где $k_p = m_p - m_{p-1}$, $t_p = n_p - n_{p-1}$.

Теорема 2. Пусть $s \geq 2$. Многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ имеет максимальную размерность d тогда и только тогда, когда все неравенства (1) являются строгими.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\dim M_{m \times n}^s(a, b) = d$ и существует число $r \in \{1, s\}$ с условием $\sum_{i \in M_r} a_i \leq \sum_{j \in N_r} b_j$. Тогда на основании теоремы 1, должно выполняться равенство $\sum_{i \in M_r} a_i = \sum_{j \in N_r} b_j$. Это означает, что для любой точки $x \in M_{m \times n}^s(a, b)$ справедливы соотношения $x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in M_r \times N_{s+1}$. Следовательно, $\dim M_{m \times n}^s(a, b) < d$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Так как все неравенства (1) являются строгими, то найдутся положительные числа a'_i , $a'_i < a_i$, $i = \overline{1, m}$, для которых выполняются условия (2). Поэтому в силу существования матрицы $x' \in M_{m \times n}^s(a, b)$ с положительными компонентами, выражающимися формулами (3), неравенства $x'_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in G$ не являются жесткими ограничениями многогранника. Значит, $\dim M_{m \times n}^s(a, b) = d$. Теорема 2 доказана.

Аналогично доказывается справедливость следующих двух утверждений.

Теорема 3. Пусть $k_1 \geq \dots \geq k_{r-1} > k_r = k_{r+1} = \dots = k_s$, $r \geq 1$, $s \geq 2$ ($k_{r-1} = +\infty$, если $r = 1$). Многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ имеет минимальную размерность $\sum_{p=1}^s (k_p - 1)(t_p - 1) + t_{s+1}(k_s - 1)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\sum_{i \in M_p} a_i = \sum_{j \in N_p} b_j$, $p = \overline{1, s}$, $p \neq q$, где число q удовлетворяет условиям $r \leq q \leq s$.

Теорема 4. Пусть $s \geq 2$. Число различных значений функции $\dim M_{m \times n}^s(a, b)$ на классе многогранников $M_{m \times n}^s(a, b)$ не превосходит числа $2^s - 1$, причем равенство достигается лишь в случае, когда числа $k_1, k_2, \dots, k_s$ удовлетворяют неравенству $\sum_{p \in S_1} k_p \neq \sum_{p \in S_2} k_p$ для любых различных собственных подмножеств S_1 и S_2 множества $\{1, 2, \dots, s\}$.

3. Теорема о представлении. Многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ будем называть правильным, если его размерность максимальна, т. е. $\dim M_{m \times n}^s(a, b) = d$. В частности, всякий транспортный многогранник является правильным.

Рассмотрим вопрос о представлении многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$, не являющегося правильным, в виде произведения правильных многогранников меньшего порядка. Под произведением двух многогранников M_1 в E_{r_1} и M_2 в E_{r_2} понимаем множество $\{(x^1, x^2) \mid x^i \in M_i, i = 1, 2\}$, где E_r — евклидово действительное r -мерное пространство.

Для многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ определим множество $S(a, b) = \{p \in \overline{1, s} \mid \sum_{i \in M_p} a_i = \sum_{j \in N_p} b_j\}$. Очевидно, многогранник $M_{k_{s'} \times t_{s'}}^{s'}(a^{s'}, b^{s'}) = \{\|x_{ij}\|_{k_{s'} \times t_{s'}} \mid \sum_{j \in N'} x_{ij} = a_i \ \forall i \in M, \sum_{i \in M} x_{ij} = b_j \ \forall j \in N', x_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in G', x_{ij} \geq 0 \ \forall (i, j) \in G'\}$, где $S'(a, b) = \overline{1, s} \setminus S(a, b)$, $M = \bigcup_{p \in S'(a, b)} M_p$, $N = \bigcup_{p \in S'(a, b)} N_p$, $N' = N \cup N_{s+1}$, $s' = |S'(a, b)|$, $k_{s'} = |M|$, $t_{s'} = |N'|$, $G' = (M \times N) \setminus \bigcup_{p \in S'(a, b)} (M_p \times N_p)$, является правильным, а в случае, когда $s' = 1$, транспортным.

Всякому числу $p \in S(a, b)$ будем ставить в соответствие транспортный многогранник $M_{k_p \times t_p}^1(a^p, b^p) = \{\|x_{ij}\|_{k_p \times t_p} \mid \sum_{j \in N_p} x_{ij} = a_i \ \forall i \in M_p, \sum_{i \in M_p} x_{ij} = b_j \ \forall j \in N_p, x_{ij} \geq 0 \ \forall (i, j) \in M_p \times N_p\}$.

Аналогом теоремы 2 [9] является следующая

Теорема 5. Всякий непустой многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$, не являющийся правильным, представим в виде произведения правильных многогранников $M_{k_{s'} \times t_{s'}}^{s'}(a^{s'}, b^{s'})$, $M_{k_p \times t_p}^1(a^p, b^p)$, $p \in S(a, b)$ и точки R с координатами $x_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in M_p \times (N \setminus N_p)$, $p \in S(a, b)$, причем единственным образом.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что для любой точки $x \in M_{m \times n}^s(a, b)$ выполняются равенства $x_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in M_p \times N_{s+1}$, $p \in S(a, b)$.

Через $\text{diam } M_{m \times n}^s(a, b)$, $r(M_{m \times n}^s(a, b))$, $f_l(M_{m \times n}^s(a, b))$ будем обозначать соответственно диаметр, радиус, число l -мерных граней многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)^*$. Из теоремы 5 вытекают следующие утверждения:

$$1) \dim M_{m \times n}^s(a, b) = \sum_{p \in Q(a, b)} \dim M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p),$$

* Диаметром (радиусом) многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ называется диаметр (радиус) графа [10], являющегося реберным остовом многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$.

$$2) \operatorname{diam} M_{m \times n}^s(a, b) = \sum_{p \in Q(a, b)} \operatorname{diam} M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p),$$

$$3) r(M_{m \times n}^s(a, b)) = \sum_{p \in Q(a, b)} r(M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p)),$$

$$4) f_l(M_{m \times n}^s(a, b)) = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_q = l \\ i_1, \dots, i_q \geq 0}} \prod_{p \in Q(a, b)} f_{i_p}(M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p)),$$

$$l = 0, 1, \dots, d-1,$$

5) задача нахождения минимума функции $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$ на многограннике $M_{m \times n}^s(a, b)$, не являющемся правильным, сводится к решению q подзадач: $\min \{ \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_p} f(x_{ij}^p) \mid \|x_{ij}^p\|_{k_p \times t_p} \in M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p) \}$, $p \in Q(a, b)$.
Здесь $Q(a, b) = S(a, b) \cup \{s'\}$, $q = |Q(a, b)|$, $s_p = 1$, $\forall p \in S(a, b)$, $s_{s'} = s'$, $M_{s'} = M$, $N_{s'} = N'$.

4. Грани. Под гранью правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ понимаем грань максимальной размерности, т. е. $(d-1)$ -мерную грань. Ясно, что гранями многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ могут быть лишь непустые множества вида $F_{ij}(a, b) = \{x = \|x_{ij}\|_{m \times n} \in M_{m \times n}^s(a, b) \mid x_{ij} = 0\}$, $(i, j) \in \overline{(1, m)} \times \overline{(1, n)} \setminus G$.

Теорема 6. Пусть $k_p \geq t_p + t_{s+1}$, $p = \overline{1, s}$, $t_p \geq 2$, $p = \overline{1, s}$. Всякое целое число вида $\sum_{p=1}^s k_p t_p + m(t_{s+1} - 1) + q$, где $0 \leq q \leq m$, и только оно реализуется как число граней правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$.

Доказательство. Очевидно, что в сделанных предположениях, для числа граней всякого правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ справедливы неравенства

$$\sum_{p=1}^s k_p t_p + m(t_{s+1} - 1) < f_{d-1}(M_{m \times n}^s(a, b)) < \sum_{p=1}^s k_p t_p + m t_{s+1}.$$

Покажем, что всякое целое число в этом интервале реализуется как число граней некоторого правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$. Рассмотрим многогранник $M_{m \times n}^s(a^q, b^q)$, определенный векторами $a^q = (a_1^q, a_2^q, \dots, a_m^q)$ и $b^q = (b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q)$, где

$$a_{m_{p-1}+1}^q = \begin{cases} t_p + \frac{1}{m}, & \text{если } m_{p-1} + 1 \leq q, \quad p = \overline{1, s}, \\ t_p + \alpha, & \text{если } m_{p-1} + 1 > q, \quad p = \overline{1, s}, \end{cases}$$

$$a_{m_{p-1}+q_p}^q = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{если } m_{p-1} + q_p \leq q, \quad q_p = \overline{2, k_p}, \quad p = \overline{1, s}, \quad m_{p-1} + q_p \neq m, \\ \alpha, & \text{если } m_{p-1} + q_p > q, \quad q_p = \overline{2, k_p}, \quad p = \overline{1, s}, \quad m_{p-1} + q_p \neq m, \end{cases}$$

$$a_m^q = \begin{cases} t_{s+1} - 1 + \frac{1}{m}, & \text{если } q = m, \\ t_{s+1} - 1 + \alpha, & \text{если } q < m, \end{cases}$$

$$b_j^q = \begin{cases} \alpha(m - q) + \frac{q}{m}, & \text{если } j = n_s + 1, \\ 1 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь α — целое, $\alpha \geq m$, $k_p \geq t_p + t_{s+1}$, $p = \overline{1, s}$, $t_p \geq 2$, $p = \overline{1, s}$. Согласно

теореме 2, этот многогранник является правильным. Легко видеть, что гранями многогранника $M_{m \times n}^s(a^q, b^q)$ являются множества $F_{ij}(a^q, b^q)$, $(i, j) \in [(\overline{1, m}) \times N_{s+1}] \setminus \bigcup_{l=1}^q \{(l, n_s + 1)\} \cup \bigcup_{p=1}^s (M_p \times N_p)$, и только они.

Следовательно, $f_{d-1}(M_{m \times n}^s(a^q, b^q)) = \sum_{p=1}^s k_p t_p + m(t_{s+1} - 1) + q$. Теорема 6 доказана.

В заключение статьи для многогранника $M_{m \times n}^s(a^0, b^0)$, определенного при доказательстве теоремы 6, приведем следующие легко доказываемые утверждения: $f_0(M_{m \times n}^s(a^0, b^0)) = m^{t_{s+1}-1} \prod_{p=1}^s k_p^{t_p}$, $\text{diam } M_{m \times n}^s(a^0, b^0) = n - 1$, $r(M_{m \times n}^s(a^0, b^0)) = n - 1$.

Для доказательства их достаточно заметить, что для любой точки $x \in M_{m \times n}^s(a^0, b^0)$ справедливы неравенства $x_{i_{n_s+1}} > 0$, $i = \overline{1, m}$, а всякий j -й столбец ($j \neq n_s + 1$) матрицы, представляющей вершину многогранника $M_{m \times n}^s(a^0, b^0)$, содержит только одну положительную компоненту и она может находиться на любом месте.

З а м е ч а н и е. Пусть $k_p \geq t_p + t_{s+1}$, $p = \overline{1, s}$, $t_p \geq 2$, $p = \overline{1, s}$. По-видимому, минимальный радиус правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ равен числу $n - 1$, однако доказано это лишь для $s = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов М. К. и др.— В сб.: Автоматизированные системы плановых расчетов в республиканских плановых органах.— Минск, 1978, вып. 13, с. 6.
2. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 3, с. 50.
3. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И.— В сб.: Математические модели и методы оптимального планирования.— Минск, 1980, с. 21.
4. Кравцов М. К., Емеличев В. А.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1976, № 5, с. 97.
5. Кравцов М. К.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1979, № 3, с. 5.
6. Емеличев В. А., Кравцов М. К.— Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 5, с. 1025.
7. Емеличев В. А. и др.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 3, с. 532.
8. Jemelitschew W. A., Krawzow M. K.— Forschungsergebnisse, Friedrich-schiller-universitat Jena, 1980.
9. Кравцов М. К., Корзников А. Д.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1979, № 4, с. 12.
10. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М., 1977.

Поступила в редакцию
15.11.80.

НИИ ЭМП при Госплане БССР

ИОСИФ СТЕПАНОВИЧ ПЯТОСИН (К 100-летию со дня рождения)



В 1982 г. исполняется 100 лет со дня рождения одного из первых профессоров-математиков Белорусского государственного университета И. С. Пятосина (1882—1938).

Иосиф Степанович Пятосин родился в семье белорусского крестьянина в Бобруйском уезде Минской губернии. В 1906 г. он окончил Московский университет и был назначен преподавателем математики и физики старших классов Шавельской мужской гимназии (г. Шяуляй Литовской ССР). В 1910 г. Иосифа Степановича переводят в г. Вильну на должность преподавателя математики Виленского учительского института.

Во время первой мировой войны, в 1915 г. вместе с Виленским учительским институтом он был эвакуирован в г. Самару, где шесть лет работал в различных вузах, а в 1919—1921 гг. — в Самарском государственном университете.

В октябре 1921 г. в связи с открытием Белорусского государственного университета Наркомпрос БССР пригласил И. С. Пятосина на работу в БГУ, где Иосиф Степанович работал в должности преподавателя, доцента, профессора.

В организационный период И. С. Пятосин исполнял обязанности декана педагогического факультета (июль — сентябрь 1922), в течение ряда лет был заместителем декана педагогического факультета (1922—1924) и заведующим физико-математическим отделением этого факультета (1924—1931). И. С. Пятосин одновременно преподавал в Белорусском энергетическом (1931—1938) и в Белорусском политехническом институтах (1933—1938).

В Белорусском государственном университете Иосиф Степанович читал следующие курсы: введение в анализ и дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, дифференциальная геометрия, теория вероятностей, теория конечных разностей, вариационное исчисление, методика математики (для студентов физико-математического отделения), высшая математика (для студентов естественного отделения).

И. С. Пятосин участвовал в работе Всесоюзных математических съездов (Харьков, 1930; Ленинград, 1934), в работе республиканских конференций преподавателей математики и физики. Иосиф Степанович был активным членом физико-математической секции научного общества при Белорусском государственном университете, выступал с лекциями перед работниками народного просвещения в различных городах республики.

Иосиф Степанович Пятосин принимал активное участие в работе математической секции Главной терминологической комиссии Института белорусской культуры. В задачи этой секции входило совершенствование белорусской терминологии элементарной математики и создание белорусской терминологии высшей математики. Результатом работы секции явилось опубликование «Словника математической терминологии» (Белорусская научная терминология, выпуск XIV, Минск, 1927).

В настоящее время математика в Белоруссии достигла высокого уровня развития: сложились сильные математические школы, труды белорусских ученых широко известны не только в нашей стране, но и за ее пределами.

Отмечая высокий уровень развития современной белорусской математики, мы с благодарностью вспоминаем тех, кто закладывал фундамент этого развития, кто положил начало математическому образованию в нашей республике. Среди них почетное место принадлежит профессору Иосифу Степановичу Пятосину.

Г. М. Гусак, А. А. Гусак

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ *

УДК 535.42

В. С. Белов, Р. Б. Мационашвили, Э. И. Подольный, В. Е. Ямный. Опто-электронный метод обработки информации в реальном масштабе времени. № 792-79. Деп. от 05.03.79.

Излагаются принципы построения многопараметрического голографического процессора. Приводятся характеристики УЗМС двух модификаций, работающих в Брэгговском режиме. Представлены блок-схемы и осциллограммы, иллюстрирующие прилагаемые принципы.

УДК 681.142.621

В. Е. Ямный, Фам Туан Фан. Исследование устройств запоминания максимального значения сигнала. № 793-79. Деп. от 05.03.79.

Рассматриваются две схемы устройств для запоминания максимального значения сигнала. Приводятся аналитические выражения, характеризующие работу схем и погрешности, а также пути их уменьшения. Представлены экспериментальные результаты исследования.

УДК 517.928

Г. К. Игнатъева. О характеристических показателях систем с m -возмущениями. № 1663-79. Деп. от 17.04.79.

Построен гомеоморфизм H и окрестность B начала такие, что показатели решений $y(t, \xi)$, $y(0, \xi) = \xi \in B$ системы $\dot{y} = A(t)y + f(t, y)$ с m -возмущениями $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq N(\|y_1\| + \|y_2\|)^{m-1}\|y_1 - y_2\|$, $m > 1$, и решений $x(t, H(\xi))$ правильной системы первого приближения $\dot{x} = A(t)x$ с показателями $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < 0$, $\lambda_1/\lambda_n < m$ совпадают.

УДК 517.5

В. Т. Ерофеев, Н. В. Кочерго. Теоремы сложения, связывающие сфероидальные решения с цилиндрическими и сферическими решениями уравнения Лапласа. № 2879-79. Деп. от 02.08.79.

Получены новые теоремы сложения, связывающие решения вытянутого и сплюснутого сфероидов с цилиндрическими и сферическими решениями уравнения Лапласа. На основании этих теорем решена задача электростатики для кругового цилиндра со сфероидальным включением.

УДК 539.182, 539.184.01

В. В. Полегенький. Влияние магнитного момента ядра на вероятности мультипольных переходов в водородоподобных атомах. № 407-80. Деп. от 04.02.80.

Рассматривается вопрос о влиянии магнитного момента ядра на вероятности мультипольных переходов (ВМП) в атомах. Расчеты проводятся методом теории возмущения.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комплекс ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

ний в релятивистском случае. Приводится общий вид волновых функций (ВФ) в первом порядке теории возмущений по константе взаимодействия магнитного момента точечного ядра со спином I с электронной оболочкой, а также дается вид поправочных ВФ для некоторого значения квантового числа n_r в случае кулоновского потенциала. С помощью полученных ВФ устанавливаются формулы для ВМП как электрического, так и магнитного типов, соответствующие им правила отбора и дается оценка поправки к ВМП в случае водородоподобных атомов. Проводится обсуждение полученных результатов.

УДК 530.145

В. А. Коробов. Принцип суперпозиции в конечном пространстве-времени. № 680-80. Деп. от 25.02.80.

Рассматривается введение принципа суперпозиции в конечном пространстве-времени, построенном из орграфов. Состоянию физической системы сопоставляется некоторый набор орграфов. При этом оказывается, что происходит интерференция состояний.

УДК 530.12 : 531.51

В. И. Кудин, А. В. Минкевич. Статическое внутреннее решение для шара из идеальной жидкости в калибровочной теории гравитации с квадратичным лагранжианом. № 1072-80. Деп. от 20.03.80.

В рамках калибровочной теории гравитации в пространстве с кручением при наиболее простом выборе квадратичного относительно тензора кривизны гравитационного лагранжиана рассматривается вопрос получения внутреннего решения для шара из идеальной жидкости. Показано, что в статическом случае в силу уравнений поля число независимых компонент тензора кривизны сокращается с 6 до 4, а количество функций кручения уменьшается с 4 до 2. Для статического нежимаемого шара при использовании ограничений на допустимые значения плотности массы получены приближенные выражения для метрики, давления и кручения, обобщающие внутреннее решение Шварцшильда общей теории относительности.

УДК 532.591

А. А. Новик. Общая схема решения задачи Коши — Пуассона. № 1073-80. Деп. от 20.03.80.

Приводится метод решения задачи Коши — Пуассона, основанный на общих свойствах гармонических функций. Решение плоской задачи строится в виде свертки решения Томсона и начальных условий. Различные записи этой свертки приводятся к формулам Коши, Пуассона, Л. И. Седова. Для решения пространственной задачи разработан «метод подъема», позволяющий по известному решению плоской задачи сразу записывать решение пространственной задачи. Предлагаемая схема построения решения может быть применена к другим задачам теории волновых движений жидкости.

УДК 519.152 : 621.396

В. В. Апанасович, А. П. Бык, В. В. Ревинский. Программно-управляемый генератор потоков сигналов. № 1361-80. Деп. от 09.04.80.

Предложены структурная схема и аналитическая модель программно-управляемого генератора случайных импульсных потоков сигналов. С использованием модели получены выражения для вычисления оптимального размера буферной памяти в случае простейшего генерируемого потока. Разработана имитационная модель программно-управляемого генератора, предназначенная для исследования заполнения буферной памяти при генерации рекуррентных потоков.

УДК 519.10

В. М. Лихачев. О диаметре и гранях аксиального транспортного многогранника. № 1362-80. Деп. от 09.04.80.

Доказано, что минимальный диаметр аксиального транспортного многогранника

(РЖ Мат., 1972, 9В470) порядка $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$, $p \geq 2$, равен $d = \sum_{s=1}^p n_s - (p-1) -$

— $\max_{1 \leq i < p} n_i$.

Показано, что множество граней максимальной размерности аксиального транспортного многогранника с минимальным числом вершин разбивается на $p-1$ классов эквивалентности, при этом к одному и тому же классу относятся грани с одинаковым числом вершин. Получены формулы для подсчета числа граней и вершин, принадлежащих граням, в каждом классе эквивалентности. Доказано, что диаметр всякой грани из любого класса равен d .

УДК 621.315.592

П. Ф. Лугаков, И. М. Филиппов. Радиационные дефекты в *n*-кремнии, облученном электронами 600 МэВ. № 1363-80. Деп. от 09.04.80.

Изучались процессы компенсации материала, рассеяния и рекомбинации носителей заряда в выращенных зонной плавкой кристаллах кремния *n*-типа ($\rho = 400 \text{ Ом}\cdot\text{см}$), облученных ($t \leq 65^\circ\text{C}$) электронами с энергией 600 МэВ. Определены энергетический спектр уровней радиационных дефектов, эффективность их введения и коэффициенты радиационного повреждения концентрации (k_n), холловской подвижности (k_μ) и времени жизни носителей заряда (k_τ) при таком облучении. Полученные результаты интерпретируются в предположении образования электронами 600 МэВ областей скопления дефектов, являющихся основными рассеивающими центрами в облученном материале.

УДК 681.321

В. В. Апанасович, А. П. Бык, В. В. Ревинский, А. М. Старовойтов. Определение периода насыщения статистических моделей. № 1366-80. Деп. от 09.04.80.

Проведен анализ переходного режима статистических моделей однофазных и многофазных систем массового обслуживания. Получены зависимости периода насыщения от числа фаз для экспоненциального и постоянного времени обслуживания при различных загрузках системы.

УДК 519.2.281

Г. А. Хацкевич. Адаптивная идентификация параметров стохастических дискретных систем. № 1367-80. Деп. от 09.04.80.

Разработан рекуррентный алгоритм оценивания элементов канонической формы параметров линейной стохастической системы с дискретным временем. Доказаны строгая состоятельность и асимптотическая несмещенность оценок, вычисляемых по рекуррентной процедуре.

УДК 518 : 517(944)947

П. А. Вакульчик. Разностные схемы метода характеристик расчета ударных волн сжатия. № 1367-80. Деп. от 09.04.80.

Строятся и исследуются разностные схемы с явным выделением особенностей решения, основанные на известном методе характеристик. Эти схемы выделяют ударную волну, разбивающую область, в которой ищется решение, на две области непрерывного течения. Ударная волна локализуется между двумя соседними точками разностной сетки. Вне ударной волны дифференциальные уравнения аппроксимируются разностными схемами метода характеристик. Исследованы на сходимость разностные схемы с опережением метода характеристик второго порядка точности (в том числе схемы, учитывающие кривизну характеристик).

УДК 519.95

В. В. Краснопрошин. Приближение частично-определенных функций логики монотонными функциями. № 1724-80. Деп. от 29.04.80.

Решается задача нахождения монотонной функции, наилучшим образом приближающей заданную, не всюду определенную функцию трехзначной логики. На множестве наборов E_n^3 трехзначной *n*-мерной решетки вводится бинарное отношение, задающее частичный порядок. С учетом этого исходная задача сводится к специальной задаче на орграфе G_f . Вводится понятие оптимального решения, формулируется критерий монотонности. Доказан ряд теорем о свойствах графов G_f , на основании которых формулируется алгоритм построения оптимального решения.

УДК 51(091)

А. А. Гусак, Г. М. Гусак. Математика в Белоруссии в 1922—1941 гг. № 1725-80. Деп. от 29.04.80.

Исследования по математике в 1922—1941 гг. проводились в Белорусском государственном университете, Белорусской государственной академии сельского хозяйства, Физико-техническом институте АН БССР, Витебском педагогическом институте. Основные направления научных исследований: дифференциальные уравнения, геометрия, алгебра, теория функций, численные и графические методы, приближенные методы в алгебре, теория вероятностей, математическая обработка результатов наблюдений, математическая физика, математические методы в механике, методика преподавания, методологические проблемы математики. В этот период в области математики работали: академик АН БССР Ц. Л. Бурстин, профессора И. К. Богоявленский, Я. П. Громмер,

Ч. Ч. Домбровский, В. К. Дыдырко, И. С. Пятосин, свыше 10 кандидатов наук, доцентов.

УДК 621.327.535

Ю. П. Макаров, А. Ф. Чернявский, Л. В. Лазарева. **Полихроматор импульсно-непрерывного спектрорадиометра. Ч. 2.** № 1726-80. Деп. от 29.04.80.

Приведены результаты расчета и оптическая схема полихроматора импульсно-непрерывного спектрорадиометра с телевизионной регистрацией спектра в рабочем диапазоне длин волн 400—1100 нм. Ширина области дисперсии прибора 50 нм.

УДК 517.97

В. П. Қирлица, Рамон Бланко. **Принцип максимума для систем со сложным запаздыванием по выходным переменным.** № 1727-80. Деп. от 29.04.80.

Получены необходимые условия оптимальности для задачи терминального управления в системе с запаздыванием по состоянию. Запаздывание является неотрицательной, кусочно-непрерывной справа и кусочно-дифференцируемой функцией. Установлено, что для систем, линейных по состоянию, с выпуклой функцией качества принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности управления.

УДК 551.501

В. И. Белобровик, Д. А. Ашкинадзе. **Вопросы безопасности работы лазерных локаторов при зондировании атмосферы.** № 2058-80. Деп. от 26.05.80.

Рассмотрены механизмы действия лазерного излучения на сетчатку глаза, определены возможные плотности энергии на роговице при прямом попадании зондирующего луча в глаз наблюдателя. Расчетным путем установлены радиусы зон, в которых при этом плотность энергии на роговице может превысить предельно допустимые нормы. Исследованы зависимости величин этих радиусов от характеристик лидаров и от состояния атмосферы. Приведен ряд рекомендаций по предотвращению возможных поражений глаз излучением. Расчетным путем установлено, что для разработанных авторами локаторов в штатном режиме опасная зона имеет размеры от 0,5 до 0,9 км.

УДК 551.501

Д. А. Ашкинадзе, В. И. Белобровик, А. Л. Спиридович. **Исследование влияния световой перегрузки фотоприемника на точность измерений при локации атмосферы.** № 2059-80. Деп. от 26.05.80.

Работа посвящена экспериментальному исследованию явления перегрузки фотоумножителей мощным сигналом рассеяния от ближних слоев атмосферы при проведении работ по лазерному зондированию. Опыты проводились на установке, неоднократно использовавшейся при дистанционном определении аэрозольного загрязнения атмосферы; установлены количественные характеристики явления перегрузки, предложен ряд новых, относительно простых средств борьбы с ним. Описана конструкция магнитного затвора для управления работой ФЭУ. Введение соответствующих изменений в конструкцию установки позволило повысить точность данных, получаемых при зондировании.

УДК 517.977.52

Р. Габасов, Э. А. Салиев. **К теории необходимых условий оптимальности в системах управления с запаздываниями.** № 2060-80. Деп. от 26.05.80.

Рассматривается задача оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями с запаздываниями по фазовым координатам и управлению, при наличии терминальных ограничений на траекторию. Приводятся новые необходимые условия оптимальности, при доказательстве которых на функции запаздываний не налагается традиционных ограничений.

УДК 539.1.074

В. В. Изох, Э. И. Табачник. **Моделирование на ЭВМ двухпороговой схемы временной привязки.** № 2451-80. Деп. от 19.06.80.

Приводятся результаты статистического моделирования на ЭВМ схемы временной привязки, использующей метод двойной выборки. Исследовалась зависимость временного положения выходного импульса формирователя от его инерционности, соотношения пороговых уровней, динамического диапазона изменения амплитуд и времени нарастания переднего фронта входных сигналов, формы переднего фронта входных сигналов, шумов. Точность измерения временного положения импульсов оценивалась с помощью трех критериев: дисперсионного, информационного и квантильных значений погрешности.

УДК 539.1.074

В. В. Изох, Э. И. Табачник. Моделирование на ЭВМ схемы временной привязки с ДНЗ. № 2452-80. Деп. от 19.06.80.

Описывается методика и приводятся результаты статистического моделирования на ЭВМ двухпороговой схемы временной привязки, использующей для измерения крутизны фронта входного сигнала и коррекции временного положения выходного хронизирующего импульса, ДНЗ. Исследуется зависимость временного положения выходного импульса схемы привязки от ее инерционности, параметров ДНЗ, соотношения пороговых уровней, изменения амплитуд и времени нарастания переднего фронта входных сигналов, формы переднего фронта входных сигналов, флуктуаций формы. Моделирование позволяет оптимизировать параметры схемы привязки.

УДК 539.1.143

И. З. Рутковский, Г. Г. Федорук. О причине анизотропии излучений при поляризации ядер в церий-магниево-нитрате. № 2453-80. Деп. от 19.06.80.

Проанализирован эксперимент по обнаружению асимметрии β -излучения при поляризации ядер Co^{60} , выполненный в 1957 г. Ву, Амблером и другими и интерпретированный как подтверждение гипотезы о несохранении четности при слабых взаимодействиях. На основе результатов исследования электронной парамагнитной релаксаций показано, что асимметрия наблюдалась до момента установления ядерной поляризации и в силу этого рассматриваемый эксперимент не содержит данных о несохранении четности. Сделан вывод о том, что наблюдаемая при поляризации радиоактивных ядер анизотропия излучений определяется влиянием неравновесных внутрикристаллических полей.

УДК 621.012.08

Ю. П. Макаров. Определение относительной и абсолютной спектральных характеристик с помощью ОМА. № 2649-80. Деп. от 27.06.80.

Описана методика калибровки импульсно-непрерывного спектро радиометра и алгоритмы расчета относительной и абсолютной спектральных характеристик источников оптического излучения. Особое внимание уделено специфике импульсных измерений. Рассмотрен вопрос о точности юстировки оптического тракта спектро радиометра. Работа дополнена необходимым справочным материалом.

УДК 519.95

В. М. Ракецкий. К двойственным методам квадратичного программирования. № 2650-80. Деп. от 27.06.80.

Работа является развитием подхода, предложенного Р. Габасовым и Ф. М. Кирилловой для исследования задач линейного программирования. Предлагаются два новых двойственных метода квадратичного программирования, основанных на понятиях обобщенной опоры и согласованного обобщенного опорного коплана, являющихся естественным развитием понятий опоры и опорного коплана в линейном программировании. Первый метод — двойственный аналог прямого опорного метода, ранее разработанного автором (РЖМат, 1978, 7В993ДЕП). При положительно определенной матрице целевой функции он решает задачу квадратичного программирования за конечное число итераций без каких-либо предположений типа невырожденности, обычно встречающихся в известных методах квадратичного программирования.

УДК 517.944.22

В. Л. Мережа. К теории полной управляемости систем с запаздыванием. № 2651-80. Деп. от 30.06.80.

Исследуется полная управляемость систем с запаздывающим аргументом. Получены критерии полной квазиуправляемости; полной управляемости по состоянию на гиперплоскости. Подробно рассматриваются системы второго порядка.

УДК 621.3.042

М. И. Тарасик, А. М. Янченко. Постановка лабораторной работы «Определение сдвига энергетического уровня дефектов при одноосном сжатии кремния». № 2652-80. Деп. от 30.06.80.

Разработана лабораторная работа для студентов, специализирующихся по физике полупроводников, которая позволяет практически ознакомиться с пьезоэлектрическими характеристиками кремния. Цель работы состоит в получении зависимости энергии иони-

зации уровня $E_c=0,17$ эВ, принадлежащего комплексу кислород — вакансия, от величины одноосной нагрузки P при сжатии образцов вдоль кристаллографических направлений $\langle 111 \rangle$ и $\langle 100 \rangle$.

Влияние одноосных давлений на электропроводность кремния n -типа рассмотрено на примере полупроводника с мелким донорным и глубоким акцепторным уровнями ($N_d > N_a$). Показано, что изменение концентрации носителей заряда $n(P)$ в зоне проводимости при частичной ионизации глубокого уровня определяется в этом случае изменением эффективной плотности состояний $N_c(P)$ и энергии ионизации $E_a(P)$ глубокого уровня. $E_a(P)$ находится из зависимости $n(P)$, которая определяется из измерений напряжения Холл-эффекта $V_x(P)$ либо электропроводности $\sigma(P)$; $N_c(P)$ при этом рассчитывается.

Описана экспериментальная установка для получения $V_x(P)$ и $\sigma(P)$ при фиксированной температуре в интервале 100—300 К.

УДК 539.1.001.5 : 681.322-181.4

Н. М. Абрамчук, В. Л. Гурачевский, С. С. Шущкевич. Практикум по ядерной физике на линии с ЭВМ. № 2653-80. Деп. от 30.06.80.

Описаны принципы построения практикума по ядерной физике с применением мини-ЭВМ «Электроника-100И». Модульная организация интерфейса позволяет осуществить простое сопряжение с магистралью ЭВМ различных экспериментальных установок. Применение ЭВМ в реальном масштабе времени предоставляет широкие возможности для постановки содержательных физических работ и обучения методам автоматизации исследований.

УДК 519.246.8

Ю. В. Меленец. О существовании стационарных квазипериодических решений уравнений авторегрессии второго порядка с коррелированными правыми частями. № 2654-80. Деп. от 30.06.80.

Рассматриваются уравнения авторегрессии второго порядка с коррелированными правыми частями. Получены условия на коэффициенты уравнений и их правые части, при выполнении которых указанные уравнения имеют стационарные квазипериодические решения.

УДК 551.465.6

М. М. Чепинного, Б. С. Белозеров. Плоские задачи о гравитационных волнах. 1. № 2655-80. Деп. от 30.06.80.

Рассматриваются собственные и вынужденные колебания несжимаемой вязкой жидкости конечной постоянной глубины со свободной поверхностью. Задачи решаются в линейной постановке при условии частичного проскальзывания; принято, что трение и поверхностное натяжение на свободной поверхности отсутствуют. Определены коэффициент затухания, частота колебания, скорость распространения волны и другие величины, характеризующие волновые движения жидкости; показано, какие изменения в расчетные формулы вносит условие частичного скольжения жидкости у дна.

УДК 518.74

В. В. Голенков, А. П. Астрейко. Представление математических текстов в виде графовых грамматик, ч. 1. № 3032-80. Деп. от 14.07.80.

Рассмотрены языковые средства графового кода ГКИ (терминальный текст, распознающая грамматика, ГКИ-правило, сложная распознающая грамматика) на примере записи математических текстов (геометрии Евклида). Запись информации в коде ГКИ есть запись информации в виде семантических сетей, причем запись информации в коде ГКИ — внутреннее представление информации в памяти многопроцессорного графового автомата, которая является нелинейной памятью с изменяемой смежностью и неизменяемым состоянием элементов. В работе рассматривается решение проблемы введения логических кванторов в семантическую сеть путем использования графовых грамматик.

УДК 518.74

В. В. Голенков, А. П. Астрейко. Представление математических текстов в виде графовых грамматик, ч. 2. № 3032-80. Деп. от 14.07.80.

Рассмотрены языковые средства графового кода ГКИ (сложное истинное ГКИ-правило, альтернативное ГКИ-правило, обратные ГКИ-правила, ГКИ-вывод, особые языковые средства кода ГКИ) на примере записи фрагментов геометрии Евклида. Запись информации в коде ГКИ есть запись информации в виде семантических сетей, причем за-

пись информации в коде ГКИ — внутреннее представление информации в памяти многопроцессорного графового автомата, которая является нелинейной памятью с изменяемой смежностью и неизменяемым состоянием элементов.

УДК 518.74

В. В. Голенков, В. П. Сидоренко. Графовый код ГКИ: принципы построения. № 3033-80. Деп. от 14.07.80.

Рассматриваются принципы построения кода ГКИ — средства представления информации в памяти многопроцессорного графового автомата, которая является нелинейной памятью с изменяемой смежностью и неизменяемым состоянием элементов. Это позволяет заложить основу для исследования вопросов распараллеливания обработки информации и работы со структурно изменяемой памятью.

УДК 535

Б. Ю. Ханох, В. В. Долинин, В. А. Фигаро. Основные характеристики излучения и статистические модели инфракрасного фона дневного неба в окнах прозрачности земной атмосферы. № 3034-80. Деп. от 14.07.80.

Сделан обзорный анализ имеющихся в научной литературе сведений о физической природе и методах описания инфракрасного излучения небесных фонов, а также их основных гипотетических моделях и имитаторах, применяемых для расчетов и испытаний оптико-электронных приборов. Приведены результаты измерений основных статистических характеристик излучения фона неба в окнах прозрачности атмосферы (2,1—2,4; 3,3—4,2; 4,5—5,1; 8—13 мкм).

УДК 537.635

И. З. Рутковский, Г. Г. Федорук. Динамика резонансного взаимодействия микроволнового излучения с парамагнитными системами. № 3035-80. Деп. от 14.07.80.

Представлены результаты исследования осцилляций абсорбционных сигналов ЭПР. Использование методики со скачкообразным установлением резонансных условий путем изменения поляризующего магнитного поля позволило впервые провести изучение начального участка указанных сигналов. В разрез с предсказаниями существующей теории осциллирующий сигнал максимален в момент установления резонансных условий и является косинусоидой. Полученный результат объяснен периодическим превращением микроволнового излучения в резонансные фононы и обратно. На основе предложенной модели сделан вывод об отсутствии у электрона спинового магнетизма.

УДК 621.317.75

М. В. Комар. Устройство отображения информации. № 3036-80. Деп. от 14.07.80.

Описано устройство отображения информации на основе телевизионного кинескопа 16ЛК1Б. Приведены электрические принципиальные схемы усилителя горизонтального отклонения луча, восьмиразрядного цифро-аналогового преобразователя, используемого в качестве генератора горизонтальной развертки, высоковольтного блока.

УДК 519.85

В. В. Кацубо. Оптимизация обслуживания требований на одном приборе при наличии директивных интервалов обслуживания. № 3511-80. Деп. от 07.08.80.

Исследуется задача минимизации максимального штрафа при обслуживании конечного множества N требований на одном приборе. Для каждого требования $i \in N$ известны время его обслуживания p_i , директивный интервал обслуживания $[a_i, b_i]$ и возрастающие функции штрафа g_i и h_i за нарушение соответственно сроков начала a_i и окончания b_i обслуживания. Прерывание обслуживания требований не допускается.

При некоторых ограничениях на штрафные функции ($g_i \leq g_j$ для любых $i, j \in N$ таких, что $a_i \leq a_j$ и $h_i \leq h_j$ для любых $i, j \in N$ таких, что $b_i \geq b_j$) описываются способы декомпозиции задачи. Предлагается алгоритм построения оптимального расписания обслуживания требований, построенный на основе схемы метода ветвей и границ. Получены условия элиминации, существенно сужающие дерево вариантов задачи.

УДК 621.372.51

В. Г. Лукьянец. Условие широкополосного согласования поглощающей среды, обладающей дисперсией, с помощью диэлектрического слоя. № 3512-80. Деп. от 07.08.80.

Получены и проанализированы выражения для частотных зависимостей комплексного показателя преломления и комплексной диэлектрической проницаемости поглощающей среды, при которых диэлектрический слой без потерь обеспечивает согласование поглощающей среды со свободным пространством в широком диапазоне частот.

ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ ИЗОХ



Белорусская наука и высшая школа понесли тяжелую утрату. На 48-ом году жизни скончался доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики и электроники сверхвысоких частот Владимир Васильевич Изох.

Владимир Васильевич Изох родился 1 августа 1934 г. в деревне Прудичи Логойского района Минской области в семье учителя. С Белорусским государственным университетом имени В. И. Ленина Владимира Васильевича Изоха связывали не только студенческие, но и все последующие годы жизни. Окончив в 1961 г. аспирантуру, В. В. Изох успешно защитил кандидатскую диссертацию и был избран заведующим кафедрой радиофизики и электроники сверхвысоких частот, которой бессменно руководил в течение 16 лет.

На протяжении 20 лет Владимир Васильевич плодотворно трудился в области радиофизики, круг его научных интересов — анализ и синтез информационно-измерительных систем. В. В. Изох не терпел шаблонных решений, разработанные им методы оригинальны и, как правило, высокоэффективны. Достижения В. В. Изоха в области электроники получили широкое признание в целом ряде научных организаций СССР.

В 1970 г. В. В. Изох успешно защитил

докторскую диссертацию на тему: «Разработка и исследование электронных методов автоматизации радиационных измерений».

Работая вначале на физическом, а затем на радиофизическом факультетах, Владимир Васильевич проявил себя незаурядным организатором: кафедра радиофизики и электроники сверхвысоких частот стала ведущей на факультете. Его новаторство, как черта характера, проявилось в постоянном поиске и совершенствовании новых форм вовлечения студентов в научную работу уже с первых курсов. Именно на этой кафедре в 1969 г. впервые в университете была создана студенческая научно-исследовательская лаборатория (СНИЛ), которая переросла впоследствии в отраслевую лабораторию.

В 1974 г. на базе научно-исследовательского сектора кафедры был организован отдел гидроакустики при НИИ прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко; научным руководителем этого отдела являлся Владимир Васильевич.

Под руководством В. В. Изоха, талантливого ученого и педагога, выросли молодые кадры исследователей из числа выпускников кафедр факультета. Под его непосредственным руководством защищено 29 кандидатских диссертаций (А. С. Ключников, В. И. Вишневецкий, В. И. Лесников, И. К. Данейко, А. В. Прокуров, В. И. Миклулович, Н. И. Козловский и др.).

Перу В. В. Изоха принадлежит более 150 научных статей и учебных пособий, опубликовано 10 авторских свидетельств.

Широта научных интересов В. В. Изоха проявилась и в педагогической деятельности. Для научного и педагогического стиля работы В. В. Изоха были характерны широта исходных принципов и умение предвидеть актуальность разрабатываемой научной темы.

Научная эрудиция, принципиальность, высокая партийность, человечность в решении любых вопросов снискали Владимиру Васильевичу уважение и авторитет в коллективе университета.

За плодотворную научную и педагогическую деятельность В. В. Изох был награжден двумя Почетными грамотами Верховного Совета БССР и медалью «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина».

Светлый образ Владимира Васильевича Изоха, талантливого ученого-радиофизика, видного организатора и педагога, навсегда останется в памяти всех, кто его знал и работал рядом с ним.

РЕФЕРАТЫ

УДК 621.382.23

Громенко Г. И., Лойко В. И. Привлечение задачи Герца для анализа распределения напряжений в плоском твердом теле при деформации сферическими иглами.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Рассмотрен случай деформации плоского твердого тела сферической иглой (пндентором), когда микротвердость иглы равна микротвердости твердого тела или несколько больше ее. Показано, что при деформации плоского твердого тела сферической иглой образуется деформированная область со сложным распределением нормальных и касательных напряжений, которое существенно зависит от упругих свойств и геометрических размеров деформирующей иглы.

Библ. 6 назв., ил. 2.

УДК 535.372

Гайсенко В. А., Коява В. Т., Попечиц В. И., Саржевский А. М. Расчет функции флуктуационного распределения флуоресцентных центров в полярном растворе по частотам чисто электронного перехода.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Предложен простой метод нахождения функции флуктуационного распределения флуоресцентных центров по частотам чисто электронного перехода, на основе которого рассчитаны указанные функции для некоторых твердых и жидких растворов 3-амино-N-метилфталмида.

Библ. 13 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 621.362

Некрашевич И. Г., Смирнов А. В., Баринев В. Н. Приэлектродные явления в импульсном вакуумном разряде.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Изучено влияние теплофизических свойств материала анода и формы аперийодических импульсов тока на величину порогового тока I_{ap} образования анодного пятна вакуумной дуги. Получена зависимость I_{ap} для алюминиевого анода от количества ионов, поставляемых в плазму катодами из различных материалов. Приводятся экспериментальные данные, указывающие на существование взаимосвязи между процессами, развивающимися в приэлектродных областях импульсного вакуумного разряда.

Библ. 8 назв., ил. 3, табл. 2.

УДК 539.12

Кухто Т. В., Шумейко Н. М. Электромагнитные поправки к поляризационной асимметрии в глубоконеупругом IN -рассеянии.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат., мех., 1982, № 1.

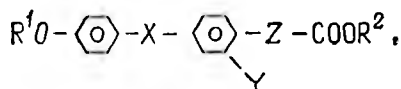
Получены точные лоренц-инвариантные формулы для электромагнитной поправки низшего порядка в глубоконеупругом рассеянии поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах. Проведены численные расчеты поляризованной асимметрии с учетом поправок при энергии до 20 ГэВ для ep -рассеяния и до 500 ГэВ для μp -рассеяния. Найдено, что поправки к асимметрии могут достигать десятков процентов.

Библ. 18 назв., ил. 3.

УДК 547 : 574 : 535.58

Абдулин А. З., Безбородов В. С., Бубель О. Н., Минько А. А., Рачкевич В. С. Мезоморфные свойства некоторых производных бензойной и коричной кислот.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

С целью изучения закономерностей изменения жидкокристаллических свойств смектогенных соединений в зависимости от мостиковых звеньев и других фрагментов молекул синтезированы мезоморфные эфиры структуры



где $R^1=CH_3, C_2H_5, C_3H_7, C_{10}H_{21}$; $R^2=C_3H_7, S-CH_3C_4H_9$; $X=CH=N, N=N, CH=CH, COO-, N-N$; $Y=H, Cl$; $Z=CH=C(CH_3)-$, и исследованы важные для практического

использования общезначимые и электрооптические свойства.

Библ. 17 назв., табл. 1, ил. 3.

УДК 621.372.832

Рудницкий А. С. Расчет объемных калейдоскопических резонаторов методом разделения переменных с учетом свойств симметрии.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Показано, что собственные типы колебаний (СТК) калейдоскопических резонаторов можно рассчитать методом разделения переменных, дополненным свойствами симметрии задачи. Путем учета перестановочного вырождения электромагнитных колебаний построены СТК кубического и трех тетраэдрических резонаторов.

Библ. 10 назв., ил. 2.

УДК 669.76 : 539.389.3

Прокошин В. И., Шепелевич В. Г. Термоэлектрический коэффициент мощности деформированных сплавов Bi—12 ат.% Sb.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Исследовано влияние пластической деформации на удельное электросопротивление, дифференциальную термо-э. д. с. и термоэлектрический коэффициент мощности сплавов Bi—12 ат.% Sb, Bi—12 ат.% Sb—0,05 ат.% Te и Bi—12 ат.% Sb—0,5 ат.% Pb. Установлено, что термоэлектрический коэффициент мощности легированных сплавов увеличивается, если процессы переноса определяются преимущественно электронами или дырками.

Библ. 10 назв., ил. 3.

УДК 621.317.08

Емельяненко В. И. О нониусном преобразовании сигналов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

На основе анализа муаровых двухрастровых сопряжений получены универсальные уравнения, описывающие функциональную зависимость координат совпадений и параметров сравниваемых импульсных последовательностей, а также определены условия, выполнение которых позволяет использовать их в качестве расчетных соотношений при измерениях.

Библ. 1 назв., ил. 1.

УДК 65.011.56 : 681.3.06

Воюш В. И., Дравица В. И., Змитрович А. И., Мелешко Ю. П., Сабаняева Н. В. Автоматизация проектирования процедур работы с базами данных.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Рассматриваются вопросы автоматизации проектирования описаний логических и физических баз данных, блоков связи прикладных программ и типовых процедур работы с базами данных с использованием универсального макрогенератора.

Библ. 2 назв., ил. 3.

УДК 517.966

Леваков А. А. Некоторые свойства многозначных отображений и одна теория существования решений дифференциальных включений.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Устанавливается ряд свойств многозначных отображений хорошо известных для однозначных функций. Вводится понятие решения дифференциального включения, отличное от общепринятого, и доказывается теорема существования.

Библ. 6 назв.

УДК 517.925.11

Садовский А. П. Существование голоморфного преобразования специального вида в случае центра.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 3.

Для уравнения в случае центра доказывается существование голоморфного преобразования с симметричной нелинейностью, приводящего к уравнению с симметричными интегральными кривыми.

Библ. 3 назв.

УДК 62-507.019.3

Люлькин А. Е. Один подход к вычислению подмножеств эквивалентных неисправностей логической схемы.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Предлагается метод вычисления подмножеств эквивалентных неисправностей (ПЭН) логической схемы. Метод основывается на последовательном выполнении приближенных алгоритмов вычисления ПЭН. Обосновывается последовательность выполнения используемых алгоритмов, обсуждается их качество (точность получаемого решения, трудоемкость). Приводится пример применения предложенного метода.

Библ. 5 назв., ил. 1.

УДК 517.9

Калитин Б. С. Некоторые признаки ограниченности решений.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Рассматриваются два свойства: ограниченность решений и предельная ограниченность решений нестационарных обыкновенных дифференциальных систем. Исследуется взаимосвязь этих понятий и их равномерность по отношению к начальному моменту времени.

Библ. 4 назв.

УДК 532.546

Веремчук И. А. Стационарная фильтрация в многослойной анизотропной области с точечным стоком.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат., и мех., 1982, № 1.

С помощью специального представления комплексной переменной исследуется стационарная фильтрация жидкости в многослойной области, состоящей из горизонтальных слоев с различной однородной прямолинейной анизотропией. Сверху область фильтрации покрыта слоем жидкости, нижняя граница непроницаема. В верхнем слое находится точечный сток. Приведены решения частных случаев этой задачи, когда область фильтрации состоит из одного и двух слоев, с нижним слоем конечной и бесконечной мощности.

Библ. 3 назв., ил. 1.

УДК 519.717

Новиков Я. А. Алгебраическое построение импликативной нормальной формы.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Предлагается метод построения импликативной нормальной формы для булевой функции, заданной формулой алгебры логики. Метод заключается в выполнении последовательности эквивалентных преобразований в классе формул над множеством G , где $G = \{\Rightarrow, \neg\}$.

Библ. 2 назв.

УДК 517.5

Гахович А. С. Оригиналы Лапласа — Эйлера со степенной особенностью нецелого типа в нуле.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1.

Рассмотрен вопрос пополнения пространства оригиналов операционного исчисления за счет функций, обладающих неинтегрируемой степенной особенностью нецелого типа в нуле.

$\mathcal{U} = \{\Rightarrow, \neg\}$

Библ. 2 назв.

УДК 519.10

Кравцов М. К., Кашинский Ю. И. О структуре множества допустимых решений транспортной задачи с запретами.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2.

Рассматривается область определения транспортной задачи с запретами, организованная специальным образом:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in G, \quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \bar{G}$$

где $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, $G = [\{\overline{1, m} \times \{\overline{1, n_s}\}] \setminus \bigcup_{p=1}^s \{(\overline{m_{p-1}+1, m_p}) \times (\overline{n_{p-1}+1, n_p})\}$.

s — натуральное число, а m_p, n_p — такие числа, что $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_s = m$, $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_s < n_{s+1} = n$. Для таких многогранников исследованы вопросы представления их в виде произведения многогранников меньшего порядка аналогичной структуры, найдены условия непустоты, выделены классы многогранников минимальной и максимальной размерности, указаны пределы изменения числа их граней.

Библ. 10 назв.