

$= zF(z, s) - sF_2(z, s)$. Переходя к пределу при $s \rightarrow 0$, получаем требуемое соотношение (9).

В заключение скажем несколько слов об операции обращения. Исходя из общего вида рассматриваемых оригиналов, можно утверждать, что при соответствующем выборе натурального n функция $t^n f(t)$ будет представлять классический оригинал. Так как операции умножения оригинала на t соответствует операция $(-d/dz)$ в пространстве изображений, то становится понятной идея обращения.

Теорема 3. Если функция комплексного переменного $\dot{F}(z)$ является изображением Лапласа — Эйлера функции действительного переменного $f(t)$ со степенной особенностью нецелого типа в нуле, то выражается через $F(z)$ с помощью следующих равенств:

$$1. f(t) = (-1)^n \frac{f_1(t)}{t^n}; \quad 2. f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F^{(n)}(z) e^{zt} dz, \quad (10)$$

в которых n зависит от $f(t)$ и $c > \alpha_1$, где α_1 — степень роста функции $f(t)$ на бесконечности.

Теорема 4. Если функция комплексного переменного $F(z)$ такова, что все ее производные, начиная с некоторого порядка k , отличны от нуля и удовлетворяют условиям обращения обычного преобразования Лапласа, то она принадлежит пространству изображений Лапласа — Эйлера и соответствующий ей оригинал $f(t)$ определяется с помощью формул (10) при любом $n \geq k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахович А. С. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1978, № 3, с. 46.

2. Гахович А. С. Операционное исчисление функций с неинтегрируемой особенностью в нуле. — Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2238-77. Деп. от 06.06.77.

Поступила в редакцию
02.12.79.

Кафедра ЭММ

УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ, Ю. И. КАШИНСКИЙ

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ЗАПРЕТАМИ

Рассматривается область определения транспортной задачи с запретами, организованными специальным образом:

$$M_{m \times n}^s(a, b) = \left\{ x = \|x_{ij}\|_{m \times n} \mid \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \right. \\ \left. i = \overline{1, m}, x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in G, x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \overline{G} \right\},$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ — векторы с действительными положительными компонентами; $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$; s — натуральное

число; $G = [\overline{\{1, m\}} \times \overline{\{1, n_s\}}] \setminus \bigcup_{p=1}^s (M_p \times N_p)$. Здесь $M_p = \{\overline{m_{p-1} + 1}, \overline{m_p}\}$,

$N_p = \{\overline{n_{p-1} + 1}, \overline{n_p}\}$, а m_p, n_p — такие числа, что $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_s < n_{s+1} = n$, $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_s = m$. Такую систему запретов имеет, например, задача распределения топливных ресурсов на коммунально-бытовые нужды [1]. Решение этой задачи, так же как и задачи, рассмотренной нами в [2, 3], направлено на повышение уровня рационального использования топливных ресурсов республики.

Заметим, что при $s = 1$ многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ становится транспортным. Такой многогранник достаточно подробно исследован в литературе (см., например, [4—8]).

В данной статье для многогранников $M_{m \times n}^s(a, b)$, $s \geq 2$ найдены условия непустоты, выделены классы многогранников минимальной и максимальной размерности, указаны пределы изменения числа их граней. Показано, что всякий многогранник не максимальной размерности представим в виде произведения многогранников меньшего порядка аналогичной структуры.

1. Критерий непустоты.

Теорема 1. Пусть $s \geq 2$. Многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ непуст тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\sum_{i \in M_p} a_i \geq \sum_{j \in N_p} b_j, \quad p = \overline{1, s}, \quad (1)$$

причем, по меньшей мере, одно из них является строгим.

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Из условий (1) следует существование неотрицательных чисел $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$, для которых выполняются равенства

$$\sum_{i \in M_p} a'_i = \sum_{j \in N_p} b_j, \quad p = \overline{1, s}. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться, что матрица x' , компоненты которой определяются по формулам

$$x'_{ij} = \begin{cases} \frac{a'_i \cdot b_j}{\sum_{j \in N_p} b_j}, & \text{если } (i, j) \in M_p \times N_p, \quad p = \overline{1, s}, \\ \frac{(a_i - a'_i) \cdot b_j}{\sum_{j \in N_{s+1}} b_j}, & \text{если } (i, j) \in \{1, m\} \times N_{s+1}, \\ 0, & \text{если } (i, j) \in G, \end{cases} \quad (3)$$

принадлежит многограннику $M_{m \times n}^s(a, b)$. Теорема 1 доказана.

2. Размерность. Ясно, что максимальная размерность многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ равна числу $d = mt_{s+1} - m - n + 1 + \sum_{p=1}^s k_p t_p$, где $k_p = m_p - m_{p-1}$, $t_p = n_p - n_{p-1}$.

Теорема 2. Пусть $s \geq 2$. Многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ имеет максимальную размерность d тогда и только тогда, когда все неравенства (1) являются строгими.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\dim M_{m \times n}^s(a, b) = d$ и существует число $r \in \{1, s\}$ с условием $\sum_{i \in M_r} a_i \leq \sum_{j \in N_r} b_j$. Тогда на основании теоремы 1, должно выполняться равенство $\sum_{i \in M_r} a_i = \sum_{j \in N_r} b_j$. Это означает, что для любой точки $x \in M_{m \times n}^s(a, b)$ справедливы соотношения $x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in M_r \times N_{s+1}$. Следовательно, $\dim M_{m \times n}^s(a, b) < d$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Так как все неравенства (1) являются строгими, то найдутся положительные числа a'_i , $a'_i < a_i$, $i = \overline{1, m}$, для которых выполняются условия (2). Поэтому в силу существования матрицы $x' \in M_{m \times n}^s(a, b)$ с положительными компонентами, выражающимися формулами (3), неравенства $x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in G$ не являются жесткими ограничениями многогранника. Значит, $\dim M_{m \times n}^s(a, b) = d$. Теорема 2 доказана.

Аналогично доказывается справедливость следующих двух утверждений.

Теорема 3. Пусть $k_1 \geq \dots \geq k_{r-1} > k_r = k_{r+1} = \dots = k_s$, $r \geq 1$, $s \geq 2$ ($k_{r-1} = +\infty$, если $r = 1$). Многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ имеет минимальную размерность $\sum_{p=1}^s (k_p - 1)(t_p - 1) + t_{s+1}(k_s - 1)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\sum_{i \in M_p} a_i = \sum_{j \in N_p} b_j$, $p = \overline{1, s}$, $p \neq q$, где число q удовлетворяет условиям $r \leq q \leq s$.

Теорема 4. Пусть $s \geq 2$. Число различных значений функции $\dim M_{m \times n}^s(a, b)$ на классе многогранников $M_{m \times n}^s(a, b)$ не превосходит числа $2^s - 1$, причем равенство достигается лишь в случае, когда числа $k_1, k_2, \dots, k_s$ удовлетворяют неравенству $\sum_{p \in S_1} k_p \neq \sum_{p \in S_2} k_p$ для любых различных собственных подмножеств S_1 и S_2 множества $\{1, 2, \dots, s\}$.

3. Теорема о представлении. Многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$ будем называть правильным, если его размерность максимальна, т. е. $\dim M_{m \times n}^s(a, b) = d$. В частности, всякий транспортный многогранник является правильным.

Рассмотрим вопрос о представлении многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$, не являющегося правильным, в виде произведения правильных многогранников меньшего порядка. Под произведением двух многогранников M_1 в E_{r_1} и M_2 в E_{r_2} понимаем множество $\{(x^1, x^2) \mid x^i \in M_i, i = 1, 2\}$, где E_r — евклидово действительное r -мерное пространство.

Для многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ определим множество $S(a, b) = \{p \in \{1, s\} \mid \sum_{i \in M_p} a_i = \sum_{j \in N_p} b_j\}$. Очевидно, многогранник $M_{k_{s'} \times t_{s'}}^{s'}(a^{s'}, b^{s'}) = \{\|x_{ij}\|_{k_{s'} \times t_{s'}} \mid \sum_{j \in N'} x_{ij} = a_i \ \forall i \in M, \sum_{i \in M} x_{ij} = b_j \ \forall j \in N', x_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in G', x_{ij} \geq 0 \ \forall (i, j) \in G'\}$, где $S'(a, b) = \{1, s\} \setminus S(a, b)$, $M = \bigcup_{p \in S'(a, b)} M_p$, $N = \bigcup_{p \in S'(a, b)} N_p$, $N' = N \cup N_{s+1}$, $s' = |S'(a, b)|$, $k_{s'} = |M|$, $t_{s'} = |N'|$, $G' = (M \times N) \setminus \bigcup_{p \in S'(a, b)} (M_p \times N_p)$, является правильным, а в случае, когда $s' = 1$, транспортным.

Всякому числу $p \in S(a, b)$ будем ставить в соответствие транспортный многогранник $M_{k_p \times t_p}^1(a^p, b^p) = \{\|x_{ij}\|_{k_p \times t_p} \mid \sum_{j \in N_p} x_{ij} = a_i \ \forall i \in M_p, \sum_{i \in M_p} x_{ij} = b_j \ \forall j \in N_p, x_{ij} \geq 0 \ \forall (i, j) \in M_p \times N_p\}$.

Аналогом теоремы 2 [9] является следующая

Теорема 5. Всякий непустой многогранник $M_{m \times n}^s(a, b)$, не являющийся правильным, представим в виде произведения правильных многогранников $M_{k_{s'} \times t_{s'}}^{s'}(a^{s'}, b^{s'})$, $M_{k_p \times t_p}^1(a^p, b^p)$, $p \in S(a, b)$ и точки R с координатами $x_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in M_p \times (N \setminus N_p)$, $p \in S(a, b)$, причем единственным образом.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что для любой точки $x \in M_{m \times n}^s(a, b)$ выполняются равенства $x_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in M_p \times N_{s+1}$, $p \in S(a, b)$.

Через $\text{diam } M_{m \times n}^s(a, b)$, $r(M_{m \times n}^s(a, b))$, $f_l(M_{m \times n}^s(a, b))$ будем обозначать соответственно диаметр, радиус, число l -мерных граней многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ *. Из теоремы 5 вытекают следующие утверждения:

$$1) \dim M_{m \times n}^s(a, b) = \sum_{p \in Q(a, b)} \dim M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p),$$

* Диаметр (радиусом) многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ называется диаметр (радиус) графа [10], являющегося реберным остовом многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$.

$$2) \operatorname{diam} M_{m \times n}^s(a, b) = \sum_{p \in Q(a, b)} \operatorname{diam} M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p),$$

$$3) r(M_{m \times n}^s(a, b)) = \sum_{p \in Q(a, b)} r(M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p)),$$

$$4) f_l(M_{m \times n}^s(a, b)) = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_q = l \\ i_1, \dots, i_q \geq 0}} \prod_{p \in Q(a, b)} f_{i_p}(M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p)),$$

$$l = 0, 1, \dots, d-1,$$

5) задача нахождения минимума функции $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$ на многограннике $M_{m \times n}^s(a, b)$, не являющемся правильным, сводится к решению q подзадач: $\min \{ \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_p} f(x_{ij}^p) \mid \|x_{ij}^p\|_{k_p \times t_p} \in M_{k_p \times t_p}^{s_p}(a^p, b^p) \}$, $p \in Q(a, b)$.
Здесь $Q(a, b) = S(a, b) \cup \{s'\}$, $q = |Q(a, b)|$, $s_p = 1$, $\forall p \in S(a, b)$, $s_{s'} = s'$, $M_{s'} = M$, $N_{s'} = N'$.

4. Грани. Под гранью правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ понимаем грань максимальной размерности, т. е. $(d-1)$ -мерную грань. Ясно, что гранями многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ могут быть лишь непустые множества вида $F_{ij}(a, b) = \{x = \|x_{ij}\|_{m \times n} \in M_{m \times n}^s(a, b) \mid x_{ij} = 0\}$, $(i, j) \in \overline{(1, m)} \times \overline{(1, n)} \setminus G$.

Теорема 6. Пусть $k_p \geq t_p + t_{s+1}$, $p = \overline{1, s}$, $t_p \geq 2$, $p = \overline{1, s}$. Всякое целое число вида $\sum_{p=1}^s k_p t_p + m(t_{s+1} - 1) + q$, где $0 \leq q \leq m$, и только оно реализуется как число граней правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$.

Доказательство. Очевидно, что в сделанных предположениях, для числа граней всякого правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ справедливы неравенства

$$\sum_{p=1}^s k_p t_p + m(t_{s+1} - 1) < f_{d-1}(M_{m \times n}^s(a, b)) < \sum_{p=1}^s k_p t_p + m t_{s+1}.$$

Покажем, что всякое целое число в этом интервале реализуется как число граней некоторого правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$. Рассмотрим многогранник $M_{m \times n}^s(a^q, b^q)$, определенный векторами $a^q = (a_1^q, a_2^q, \dots, a_m^q)$ и $b^q = (b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q)$, где

$$a_{m_{p-1}+1}^q = \begin{cases} t_p + \frac{1}{m}, & \text{если } m_{p-1} + 1 \leq q, \quad p = \overline{1, s}, \\ t_p + \alpha, & \text{если } m_{p-1} + 1 > q, \quad p = \overline{1, s}, \end{cases}$$

$$a_{m_{p-1}+q_p}^q = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{если } m_{p-1} + q_p \leq q, \quad q_p = \overline{2, k_p}, \quad p = \overline{1, s}, \quad m_{p-1} + q_p \neq m, \\ \alpha, & \text{если } m_{p-1} + q_p > q, \quad q_p = \overline{2, k_p}, \quad p = \overline{1, s}, \quad m_{p-1} + q_p \neq m, \end{cases}$$

$$a_m^q = \begin{cases} t_{s+1} - 1 + \frac{1}{m}, & \text{если } q = m, \\ t_{s+1} - 1 + \alpha, & \text{если } q < m, \end{cases}$$

$$b_j^q = \begin{cases} \alpha(m - q) + \frac{q}{m}, & \text{если } j = n_s + 1, \\ 1 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь α — целое, $\alpha \geq m$, $k_p \geq t_p + t_{s+1}$, $p = \overline{1, s}$, $t_p \geq 2$, $p = \overline{1, s}$. Согласно

теореме 2, этот многогранник является правильным. Легко видеть, что гранями многогранника $M_{m \times n}^s(a^q, b^q)$ являются множества $F_{ij}(a^q, b^q)$, $(i, j) \in [(\overline{1, m}) \times N_{s+1}] \setminus \bigcup_{l=1}^q \{(l, n_s + 1)\} \cup \bigcup_{p=1}^s (M_p \times N_p)$, и только они.

Следовательно, $f_{d-1}(M_{m \times n}^s(a^q, b^q)) = \sum_{p=1}^s k_p t_p + m(t_{s+1} - 1) + q$. Теорема 6 доказана.

В заключение статьи для многогранника $M_{m \times n}^s(a^0, b^0)$, определенного при доказательстве теоремы 6, приведем следующие легко доказываемые утверждения: $f_0(M_{m \times n}^s(a^0, b^0)) = m^{t_{s+1}-1} \prod_{p=1}^s k_p^{t_p}$, $\text{diam } M_{m \times n}^s(a^0, b^0) = n - 1$, $r(M_{m \times n}^s(a^0, b^0)) = n - 1$.

Для доказательства их достаточно заметить, что для любой точки $x \in M_{m \times n}^s(a^0, b^0)$ справедливы неравенства $x_{i_{n_s+1}} > 0$, $i = \overline{1, m}$, а всякий j -й столбец ($j \neq n_s + 1$) матрицы, представляющей вершину многогранника $M_{m \times n}^s(a^0, b^0)$, содержит только одну положительную компоненту и она может находиться на любом месте.

З а м е ч а н и е. Пусть $k_p \geq t_p + t_{s+1}$, $p = \overline{1, s}$, $t_p \geq 2$, $p = \overline{1, s}$. По-видимому, минимальный радиус правильного многогранника $M_{m \times n}^s(a, b)$ равен числу $n - 1$, однако доказано это лишь для $s = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов М. К. и др.— В сб.: Автоматизированные системы плановых расчетов в республиканских плановых органах.— Минск, 1978, вып. 13, с. 6.
2. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 3, с. 50.
3. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И.— В сб.: Математические модели и методы оптимального планирования.— Минск, 1980, с. 21.
4. Кравцов М. К., Емеличев В. А.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1976, № 5, с. 97.
5. Кравцов М. К.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1979, № 3, с. 5.
6. Емеличев В. А., Кравцов М. К.— Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 5, с. 1025.
7. Емеличев В. А. и др.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 3, с. 532.
8. Jemelitschew W. A., Krawzow M. K.— Forschungsergebnisse, Friedrich-schiller-universitat Jena, 1980.
9. Кравцов М. К., Корзников А. Д.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1979, № 4, с. 12.
10. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М., 1977.

Поступила в редакцию
15.11.80.

НИИ ЭМП при Госплане БССР