IV. Склеивание: если $(r+1)$-местная импликация B_j содержит вхождение переменной y^δ, а $(r+1)$-местная импликация B_p включает в себя отрицание той же переменной, и, кроме того, B_j и B_p содержат вхождения одинаковых переменных $x_i^{\delta_i}$, $i \leqslant r$, то B_j и B_p могут быть заменены r-местной импликацией $B = (\underset{i \leqslant r}{\Rightarrow} x_i^{\delta_i})$.

Доказательство I—IV несложно. Установим, например, справедливость III. Так как в k-местной импликации $(\underset{i \leqslant k}{\Rightarrow} B_i)$ допустимы любые перестановки символов B_i, $i \leqslant k$, то достаточно доказать, что $B_p \Rightarrow \rceil B_j \equiv \rceil B_j$ или $(y_1^{\delta_1} \Rightarrow (y_2^{\delta_2} \Rightarrow (\ldots (y_{r_2}^{\delta_{r_2}} \Rightarrow B_j) \ldots))) \Rightarrow \rceil B_j \equiv \rceil B_j$. Рассмотрим два случая. Пусть при некоторых значениях переменных $x_i^{\delta_i}$, $i \leqslant r$, имеет место: 1) $B_j = 0$, 2) $B_j = 1$. Тогда получим, что 1) $B_p \Rightarrow \rceil B_j = B_p \Rightarrow \rceil 0 \equiv 1 = \rceil B_j$, 2) $B_p \Rightarrow \rceil B_j = (y_1^{\delta_1} \Rightarrow (y_2^{\delta_2} \Rightarrow (\ldots (y_{r_2}^{\delta_{r_2}} \Rightarrow 1) \ldots))) \Rightarrow \rceil 1 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0 = \rceil B_j$,— при любых значениях переменных $y_l^{\delta_l}$, $l \leqslant r_2$. Утверждение доказано. Доказательство остальных утверждений аналогично данному.

Пример. Построить ИНФ формулы $\rceil \Phi_4$, где $\Phi_4 = \{[a \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \rceil b] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \rceil b)] \Rightarrow ([a \Rightarrow (a \Rightarrow \rceil b)] \Rightarrow ([a \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \rceil e^0)] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \rceil e^0)] \Rightarrow ([a \Rightarrow \rceil e^0)] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (a \Rightarrow \rceil e^0)] \Rightarrow ([e \Rightarrow (c^0 \Rightarrow \rceil d^0)] \Rightarrow \rceil [a^0 \Rightarrow (c^0 \Rightarrow \rceil d^0)])))))))) \}$. Упростим Φ_4 по правилам I—IV. Получим, что $\Phi_4 = \{[a \Rightarrow b] \Rightarrow ([a \Rightarrow \rceil e^0] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \rceil e^0)] \Rightarrow ([e^0 \Rightarrow (c^0 \Rightarrow \rceil d^0)] \Rightarrow \rceil [a^0 \Rightarrow (c^0 \Rightarrow \rceil d^0)]))) \}$. Теперь преобразуем $\rceil \Phi_4$, согласно теореме 1, одновременно применяя правила I—IV. В результате имеем: $\rceil \Phi_4 = \{[a^0 \Rightarrow \rceil d] \Rightarrow ([a^0 \Rightarrow (c \Rightarrow \rceil e)] \Rightarrow ([a^0 \Rightarrow (b \Rightarrow \rceil c)] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (c \Rightarrow \rceil e)] \Rightarrow [b^0 \Rightarrow (d^0 \Rightarrow e)]))) \}$.

Легко видеть, что если сразу преобразовать Φ_4 по теореме 1, не используя при этом правил I—IV, то получим ИНФ, которая будет содержать $n_1 n_2 \ldots n_9 = 3^9$ вхождений символов переменных против 14 в нашем случае. Данный пример иллюстрирует полезность применения правил I—IV при построении ИНФ алгебраическим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мощенский В. А. Лекции по математической логике.— Минск, 1973.
2. Мощенский В. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1975, № 3, с. 73.

Поступила в редакцию
24.10.79.

Кафедра МО ЭВМ

УДК 517.5

А. С. ГАХОВИЧ

ОРИГИНАЛЫ ЛАПЛАСА — ЭЙЛЕРА СО СТЕПЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НЕЦЕЛОГО ТИПА В НУЛЕ

В работах [1, 2] пополнение пространства оригиналов операционного исчисления производилось за счет включения функций, не являющихся оригиналами в классическом понимании. С помощью эйлеровского метода суммирования расходящихся интегралов и принципа аналитического продолжения функций нескольких комплексных переменных доказана возможность расширения операционного исчисления на класс быстрорастущих функций и класс функций с неинтегрируемой особенностью общего вида в нуле. Однако использование при этом такой процедуры, как разложение функции действительного переменного на аналитические составляющие, требующей вычисления интегралов типа Коши по бесконечному контуру, в некоторых ситуациях может вызвать определенные затруднения. Для функциональных объектов частного вида можно предложить несколько иной метод суммирования, в котором отмеченные трудности отсутствуют. Идея, положенная в основу этого метода, является, в сущности, реализацией общего подхода, использованного в работах [1, 2].

Рассмотрим комплекснозначные функции действительного переменного, представимые в виде

$$f(t)=\frac{\varphi(t)}{t^{\lambda}}\ln^{k}t \quad (k=0,\ 1,\ 2,..), \tag{1}$$

где λ — комплексный параметр; $\varphi(t)$ — локально интегрируемая на $(0, +\infty)$ функция с ограниченной степенью роста на бесконечности и непрерывная справа в нуле. Для функций вида (1) определим интеграл

$$F(z,\ s)=\int\limits_{0}^{\infty} t^{s} f(t) e^{-zt} dt. \tag{2}$$

Очевидно, он аналитичен по совокупности переменных z и s соответственно в областях $Res>Re\lambda-1$ и $Rez>\alpha_1$, где α_1 — степень роста функции $f(t)$ на бесконечности.

Определение 1. Обозначим через L_c класс функций $f(t)$, для которых функция $F(z, s)$, определяемая соотношением (2), допускает аналитическое продолжение по переменной s в односвязную область D_s, включающую достаточно большие по модулю точки s и точку $s=0$.

Определение 2. Изображением Лапласа — Эйлера функции класса назовем функцию $F(z)$, определяемую по правилу $F(z)=\lim\limits_{s\to 0}F(z,\ s)$. Элементы класса L_c будем называть оригиналами Лапласа — Эйлера со степенной особенностью в нуле.

Очевидно, при $Re\alpha<1$, функция $F(z, s)$ аналитична в точке $s=0$ при $Rez>\alpha_1$, и в данных условиях отпадает необходимость аналитического продолжения. Отсюда следует, что в случае классического оригинала вида (1) изображение Лапласа — Эйлера существует и совпадает с обычным изображением Лапласа. Действительно, $F(z)=\lim\limits_{s\to 0}\int\limits_{0}^{\infty} t^{s}f(t)e^{-zt}dt=$ $=\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-zt}dt=F_{Л}(z)$. Полученный результат равносилен утверждению, что класс L_c не пуст. Покажем, что функции вида (1), преобразуемые по Лапласу, не исчерпывают всего L_c.

Теорема 1. Комплексозначная функция действительного переменного $f(t)$, представимая в виде (1) с $\varphi(t)$, аналитической в нуле, принадлежит L_c при $\lambda\neq n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Доказательство проведем для частного случая, когда $f(t)=\frac{\varphi(t)}{t^{\lambda}}$. Общий случай не имеет каких-либо принципиальных особенностей, но сопряжен с громоздкими выкладками.

Пусть функция $\varphi(t)$ представима степенным рядом $\varphi(t)=\sum\limits_{0}^{\infty}a_k t^k$ с отличным от нуля радиусом сходимости R. Рассмотрим функцию $F(z,s)$, соответствующую $f(t)$: $F(z,\ s)=\int\limits_{0}^{\infty}t^{s}f(t)e^{-zt}dt=\int\limits_{0}^{a<R} t^{s}f(t)e^{-zt}dt+\int\limits_{a<R}^{\infty} t^{s}f(t)e^{-zt}dt=$ $=F_1(z,\ s)+F_2(z,\ s)$, $(0<a<1)$. Функция $F_2(z,s)$ аналитична по z в области $Rez>\alpha_1$ и по s во всей конечной комплексной плоскости. Изучим функцию $F_1(z,\ s)$.

$$F_1(z,\ s)=\int\limits_{0}^{a<R} t^{s}f(t)\,e^{-zt}dt=\int\limits_{0}^{a<R} t^{s-\lambda}\,e^{-zt}\left(\sum\limits_{0}^{\infty}a_k t^k\right)dt \tag{3}$$

При $Re\,s > Re\,\lambda$ в (3) допустимо почленное интегрирование: $F_1(z, s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{a<R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda}\,dt = \sum_{k<Re\lambda} a_k \int_0^{a<R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda}\,dt + \sum_{k\geqslant Re\lambda} a_k \int_0^{a<R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda}\,dt = F_{11}(z, s) + F_{12}(z,s)$. Функция $F_{12}(z, s)$ аналитична по s в области $Re\,s > -1$. Это следует из равномерной по s в замыкании области $\beta > Re\,s > \alpha - 1$ оценки (α, β — соответственно сколь угодно малое и сколь угодно большое положительные числа: $\left|\sum_{k\geqslant Re\lambda} a_k \int_0^{a<R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda}\,dt\right| \leqslant \sum_{k\geqslant Re\lambda} |a_k| \times \frac{a^{Re(s+k-\lambda+1)}}{Re(s+k-\lambda+1)} \leqslant \frac{M}{\alpha} \sum_{k\geqslant Re\lambda} |a_k|\, a^k \leqslant M_1$, справедливой при $Re\,z > 0$. Остается исследовать функцию $F_{11}(z, s)$.

$$F_{11}(z, s) = \sum_{k<Re\lambda} a_k \int_0^{a<R} e^{-zt} t^{s+k-\lambda}\,dt = \sum_{k<Re\lambda} a_k \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{s+k-\lambda}\,dt -$$

$$- \sum_{k<Re\lambda} a_k \int_{a<R}^{\infty} e^{-zt} t^{s+k-\lambda}\,dt \quad (Re\,z > 0). \tag{4}$$

С позиций определения 1 последний интеграл в выражении (4) не вызывает затруднений. Покажем, что в условиях теоремы 1 и первое слагаемое в (4) допускает аналитическое продолжение в точку $s=0$. При $z>0$ после замены $zt=u$ имеем

$$\sum_{k<Re\lambda} a_k \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{s+k-\lambda}\,dt = \sum_{k<Re\lambda} \frac{a_k}{z} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{z}\right)^{s+k-\lambda} du =$$

$$= \sum_{k<Re\lambda} \frac{a_k}{z^{k+1+s-\lambda}} \Gamma(s+k+1-\lambda). \tag{5}$$

Выражение (5) зависит от гамма-функции Эйлера, поэтому исследуемое слагаемое представляет собой аналитическую функцию в окрестности точки $s=0$ при λ, не равном целому положительному числу.

Воспользовавшись принципом аналитического продолжения функций двух комплексных переменных, убеждаемся, что $F(z, s)$ аналитически продолжима в область D_s удовлетворяющую необходимым требованиям. Следуя определению 1, можно утверждать, что при указанных функция $f(t) \in L_c$.

Доказательство общего случая проводится аналогично, лишь на заключительном этапе вместо гамма-функции придется рассматривать ее k-ую производную.

Замечание. Теорема 1 решает в общем случае вопрос, является ли данная функция $f(t)$ оригиналом Лапласа — Эйлера. Однако в некоторых частных случаях использование ее приводит к определению явного вида изображения, соответствующего исходному оригиналу. Например, для случая $f(t)$, представимой в виде (1) с $\varphi(t)$, являющейся целой функцией экспоненциального роста на бесконечности, можно получить следующие соотношения:

$$F(z, s) = \int_0^{\infty} t^s f(t)\, e^{-zt}\,dt = \int_0^{\infty} t^{s-\lambda} e^{-zt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \ln^k t\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} (t^{n-\lambda+s} \ln^k t)\, e^{-zt}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{z}\right)^{n+s-\lambda} \ln^k \left(\frac{u}{z}\right) du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+s-\lambda+1}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \ln_z^{k-i} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n+s-\lambda} \ln^i u\,du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+s-\lambda+1}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \ln^{k-i} z \Gamma^{(i)}(n+s+1-\lambda). \tag{6}$$

Из выражения (6) получаем операционное соответствие:

$$\frac{\varphi(t)}{t^\lambda} \ln^k t \div \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n-\lambda+1}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \ln^{k-i} z \, \Gamma^{(i)}(n+1-\lambda), \tag{7}$$

в котором $\varphi(t) = \sum_{0}^{\infty} a_n t^n$, $\Gamma^{(i)}(z)$—i-ая производная гамма-функции Эйлера.

Из соотношения (7), представляющего достаточно общий вид, можно получить некоторые частные случаи:

1. $\varphi(t) \equiv 1 \quad \frac{\ln^k t}{t^\lambda} \div \frac{1}{z^{1-\lambda}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \ln^{k-i} z \, \Gamma^{(i)}(1-\lambda).$

2. $\varphi(t) \equiv 1, \ \lambda = 0 \quad \ln^k t \div \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \ln^{k-i} z \, \Gamma^{(i)}(1).$

3. $\varphi(t) \equiv 1, \ \lambda = 0, \ k = 1 \quad \ln t \div \frac{1}{z}(-\ln z + \Gamma'(11)) = -\frac{\ln z + \gamma}{z}.$

4. $\varphi(t) \equiv 1, \ k = 0 \quad \frac{1}{t^\lambda} \div \frac{\Gamma(1-\lambda)}{z^{1-\lambda}}. \qquad (8)$

Если операционное равенство (8) переписать в виде $t^\alpha \div \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$, где $\alpha = -\lambda \neq -1, 2, \ldots$, получим известное соотношение классического операционного исчисления, полученное там путем аналитического продолжения по параметру α. Оригиналы, полученные таким образом, названы особыми. В нашем случае это обычные оригиналы Лапласа — Эйлера.

Кратко коснемся вопроса о допустимых операциях в L_c и обращении преобразования Лапласа — Эйлера для рассматриваемого класса функций.

В операционном исчислении определяют, как правило, следующие основные операции:

1. умножение оригинала на t; 2. деление оригинала на t: 3. дифференцирование оригинала; 4. интегрирование оригинала; 5. умножение оригинала на e^{at} (смещение изображения); 6. запаздывание аргумента; 7. свертка оригиналов.

Так как предметом исследований служат функции с неинтегрируемой степенной особенностью в нуле, естественно, что в данном случае операции интегрирования и свертки оригиналов лишены смысла. Операции 1, 2, 5, 6 допустимы, соответствующие операционные правила имеют тот же вид, что и в классическом операционном исчислении, и их вывод не составляет труда. Некоторое исключение представляет операционное правило дифференцирования оригинала. Остановимся на нем с целью иллюстрации вывода операционных правил для оригиналов рассматриваемого вида.

Теорема 2. Если $f'(t) \in L_c$, то $f(t)$ также из L_c и справедливо операционное соотношение

$$f'(t) \div zF(z) \tag{9}$$

при условии, что $f(t) \div F(z)$.

Преобразуем функцию $F_1(z, s)$ для $f'(t)$: $F_1(z, s) = \int_0^\infty t^s f'(t) e^{-zt} dt =$

$$= e^{-zt} t^s f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \, d(e^{-zt} t^s) = z \int_0^\infty t^s f(t) e^{-zt} dt - s \int_0^\infty t^s \left(\frac{f(t)}{t}\right) e^{-zt} \, dt \doteq$$

$= zF(z, s) - sF_2(z, s)$. Переходя к пределу при $s \to 0$, получаем требуемое соотношение (9).

В заключение скажем несколько слов об операции обращения. Исходя из общего вида рассматриваемых оригиналов, можно утверждать, что при соответствующем выборе натурального n функция $t^n f(t)$ будет представлять классический оригинал. Так как операции умножения оригинала на t соответствует операция $(-d/dz)$ в пространстве изображений, то становится понятной идея обращения.

Теорема 3. Если функция комплексного переменного $F(z)$ является изображением Лапласа — Эйлера функции действительного переменного $f(t)$ со степенной особенностью нецелого типа в нуле, то выражается через $F(z)$ с помощью следующих равенств:

$$1.\ f(t) = (-1)^n \frac{f_1(t)}{t^n}; \quad 2.\ f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F^{(n)}(z) e^{zt}\, dz, \qquad (10)$$

в которых n зависит от $f(t)$ и $c > \alpha_1$, где α_1 — степень роста функции $f(t)$ на бесконечности.

Теорема 4. Если функция комплексного переменного $F(z)$ такова, что все ее производные, начиная с некоторого порядка k, отличны от нуля и удовлетворяют условиям обращения обычного преобразования Лапласа, то она принадлежит пространству изображений Лапласа — Эйлера и соответствующий ей оригинал $f(t)$ определяется с помощью формул (10) при любом $n \geqslant k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахович А. С.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1978, № 3, с. 46.

2. Гахович А. С. Операционное исчисление функций с неинтегрируемой особенностью в нуле.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2238-77. Деп. от 06.06.77.

Поступила в редакцию 02.12.79.

Кафедра ЭММ

УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ, Ю. И. КАШИНСКИЙ

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ЗАПРЕТАМИ

Рассматривается область определения транспортной задачи с запретами, организованными специальным образом:

$$M^s_{m\times n}(a, b) = \Big\{ x = \|x_{ij}\|_{m\times n} \mid \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1, n},\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$

$$i = \overline{1, m},\ x_{ij} = 0\ \forall (i, j) \in G,\ x_{ij} \geqslant 0\ \forall (i, j) \overline{\in} G \Big\},$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — векторы с действительными положительными компонентами; $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$; s — натуральное число; $G = [\{\overline{1, m}\} \times \{\overline{1, n_s}\}] \setminus \bigcup\limits_{p=1}^{s} (M_p \times N_p)$. Здесь $M_p = \{\overline{m_{p-1}+1, m_p}\}$, $N_p = \{\overline{n_{p-1}+1, n_p}\}$, а m_p, n_p — такие числа, что $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_s < n_{s+1} = n$, $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_s = m$. Такую систему запретов имеет, например, задача распределения топливных ресурсов на коммунально-бытовые нужды [1]. Решение этой задачи, так же как и задачи, рассмотренной нами в [2, 3], направлено на повышение уровня рационального использования топливных ресурсов республики.