$$\times (e^{i\alpha} ((\lambda_0^2 - \lambda_0^1) d_1 + \xi_2) + (e^{i\alpha\bar{\xi}_0} - e^{i\alpha\xi_0}) e^{-i\alpha(\lambda_0^2 - \lambda_0^1) d_1 + il_2 + \xi_2)}] d\alpha + H_0.$$

2) при $n = 2$, $h_2 = \infty$, $\lim\limits_{\xi_r \to \infty} H_r = 0$

$$H_1 = 2m_0 \left[\ln \left| \frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_1 - \bar{\xi}_0} \right| + \sum_{l=1}^{\infty} (-\lambda_{12})^l \ln \left| \frac{(\xi_1 - \xi_0)^2 - l^2 l_1^2}{(\xi_1 - \bar{\xi}_0)^2 - l^2 l_1^2} \right| \right] + H_0,$$

$$H_2 = 2m_0 \lambda_{21} \sum_{l=0}^{\infty} (-\lambda_{12})^l \ln \left| \frac{\xi_2 - \xi_0 + (\lambda_0^2 - \lambda_0^1) d_1 - ill_1}{\xi_2 - \bar{\xi}_0 + (\lambda_0^2 - \lambda_0^1) d_1 - ill_1} \right| + H_0.$$

3) при $n = 1$

$$H = 2m_0 \left[\ln \left| \frac{\xi - \xi_0}{\xi - \bar{\xi}_0} \right| + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \ln \left| \frac{\xi - \xi_0 + i\, ll_1}{\xi - \bar{\xi}_0 - i\, ll_1} \right| + H_0. \right.$$

Здесь $l_1 = \frac{2x_0^1}{c_{22}^1} d_1$, $l_2 = \frac{2x_0^2}{c_{22}^2} d_2$, $\lambda_{12} = \frac{x_0^1 - x_0^2}{x_0^1 + x_0^2}$, $\lambda_{21} = \frac{2x_0^1}{x_0^1 + x_0^2}$.

Следует отметить, что, полагая $k_{11}^r = k_{22}^r = k_r$, из решения данной задачи получим, как частный случай, решение аналогичной задачи для многослойной области, состоящей из однородных изотропных слоев, приведенное в работах [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И. А., Веремчук И. А.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1974, № 1.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод.— М., 1952.
3. Богомолов Г. В. и др. Искусственное восполнение запасов подземных вод.— М., 1978.

Поступила в редакцию 13.12.79.

Кафедра теоретической механики

УДК 519.717

Я. А. НОВИКОВ

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ИМПЛИКАТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Для любой формулы алгебры логики (ФАЛ), реализующей булеву функцию, существует ей равносильная ФАЛ над множеством булевых операторов G, где $G = \{\Rightarrow, \neg\}$, называемая импликативной нормальной формой (ИНФ) [1]. Среди нормальных форм алгебры логики ИНФ выделяется особенностью своего строения, являясь единственной нормальной формой однофункционального типа [2]. Для построения ИНФ используется табличный метод [1]. Необходимость формирования таблицы истинности булевой функции затрудняет применение такого метода в том случае, когда функция задана ФАЛ. В данной статье рассматривается алгебраический метод, который позволяет избежать этапа построения таблицы истинности булевой функции. Метод заключается в выполнении последовательности эквивалентных преобразований в классе формул над множеством G.

Условимся, что используемые ниже индексы принимают целочисленные положительные значения, то есть запись $j \leqslant p$ означает, что $1 \leqslant j \leqslant p$. Определим r-местную импликацию, как выражение вида $(B_1 \Rightarrow (B_2 \Rightarrow (\ldots (B_{r-1} \Rightarrow \neg B_r) \ldots)))$, или в короткой записи $(\underset{j<r}{\Rightarrow} B_j)$. Заметим, что одноместная импликация равна $\neg B_1$. Согласно [2], r-местная импликация допускает любые перестановки символов B_j, где $j \leqslant r$. Поэтому для $n_1 n_2 \ldots n_k$-местной импликации иногда будем использовать обозначение $(\underset{i_1 < n_1, \ldots, i_k < n_k}{\Rightarrow} B_{i_1, \ldots, i_k})$, полагая при этом, что индексы изменяются в порядке

$i_1, i_2, \ldots, i_k$. Пусть $\delta \in \{0, 1\}$ и $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \bar{x}$ — в противном случае. Тогда при принятых обозначениях ИНФ, реализующей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, называется k-местная импликация, для которой $B_j = (x_{j1}^{v_{j1}} \Rightarrow \Rightarrow (x_{j2}^{v_{j2}} \Rightarrow (\ldots(x_{jn_j-1}^{v_{jn_j-1}} \Rightarrow \neg x_{jn_j}^{v_{jn_j}}) \ldots)))$, где $n_j \geqslant 1$ и $x_{ij} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, и имеет место равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = (\underset{j \leqslant k}{\Rightarrow} (\underset{i_j \leqslant n_j}{\Rightarrow} x_{ji_j}^{v_{ji_j}}))$, причем допустимо, что $x_{ji}^{v_{ji}} = x_{jk}^{v_{jk}}$ при $i \neq k$.

Условимся в дальнейшем для наглядности изложения круглые скобки в ФАЛ заменять на квадратные или фигурные. Далее нам потребуются равносильности

$$\neg\neg A \equiv A, \tag{1}$$

$$\neg(A \Rightarrow \neg\{B \Rightarrow C\}) \equiv \{A \Rightarrow B\} \Rightarrow \neg\{A \Rightarrow \neg C\}, \tag{2}$$

$$\neg\{A \Rightarrow B\} \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow \{\neg B \Rightarrow C\}, \tag{3}$$

$$\neg A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow A, \tag{4}$$

справедливость которых легко установить.

Лемма. Для любых $n_1 \geqslant 1$ и $n_2 \geqslant 1$ имеет место равносильность

$$(\underset{i_1 \leqslant n_1}{\Rightarrow} X_{1i_1}) \Rightarrow \neg(\underset{i_2 \leqslant n_2}{\Rightarrow} X_{2i_2}) \equiv \neg(\underset{i_1 \leqslant n_1,\ i_2 \leqslant n_2}{\Rightarrow} B_{i_1, i_2}), \tag{5}$$

где $B_{i_1, i_2} = (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2})$, а X_{ri_r} — произвольная ФАЛ.

Доказательство. При $n_1 = 1$, $n_2 = 1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что (5) имеет место при $n_1 = k_1$, $n_2 = k_2$. Докажем (5) для $n_1 = k_1$, $n_2 = k_2 + 1$. Проведем следующие преобразования: $((\underset{i_1 \leqslant n_1}{\Rightarrow} X_{1i_1}) \Rightarrow \neg(\underset{i_2 \leqslant n_2}{\Rightarrow} X_{2i_2})) \overset{(1)}{\equiv} \neg\neg([\underset{i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} X_{1i_1}] \Rightarrow \neg\{X_{21} \Rightarrow [\underset{2 \leqslant i_2 \leqslant k_2+1}{\Rightarrow} X_{2i_2}]\}) \overset{(2)}{\equiv} \neg(\{[\underset{i_2 \leqslant k_2}{\Rightarrow} X_{1i_1}] \Rightarrow X_{21}\} \Rightarrow \neg\{[\underset{i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} X_{1i_1}] \Rightarrow \neg[\underset{2 \geqslant i_2 \leqslant k_2+1}{\Rightarrow} X_{2i_2}]\}) \equiv$ (в силу индуктивного предположения) $\equiv \neg(\{[\underset{i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} X_{1i_1}] \Rightarrow X_{21}\} \Rightarrow \{\underset{i_1 \leqslant k_1,\ 2 \leqslant i_2 \leqslant k_2+1}{\Rightarrow} (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2})\})$. Полученную формулу обозначим через Φ_1. Посылка в Φ_1 преобразуется следующим образом: $\{[\underset{i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} X_{1i_1}] \Rightarrow X_{21}\} \overset{(1),(4)}{\equiv} \neg\neg\{\neg X_{21} \Rightarrow \neg[\underset{i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} X_{1i_1}]\} \overset{(2)}{\equiv} \neg\{\neg X_{21} \Rightarrow X_{11}\} \Rightarrow \neg\{\neg X_{21} \Rightarrow \neg[\underset{2 \leqslant i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} X_{1i_1}]\} \overset{(2)}{\equiv} \ldots \overset{(2)}{\equiv} \neg[\underset{i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} (\neg X_{21} \Rightarrow X_{1i_1})] \overset{(4)}{\equiv} \overset{(4)}{\equiv} \neg[\underset{i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{21})]$. Таким образом, $\Phi_1 \equiv \neg(\neg[\underset{i_1 \leqslant k_1}{\Rightarrow} (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{21})] \Rightarrow \Rightarrow [\underset{i_1 \leqslant k_1,\ 2 \leqslant i_2 \leqslant k_2+1}{\Rightarrow} (\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2})])$.

Докажем теперь равносильность

$$\neg[\underset{i \leqslant n}{\Rightarrow} C_i] \Rightarrow [\underset{j \leqslant k}{\Rightarrow} D_j] \equiv (C_1 \Rightarrow (C_2 \Rightarrow (\ldots(C_n \Rightarrow [\underset{j \leqslant k}{\Rightarrow} D_j]) \ldots))). \tag{6}$$

Действительно, $\neg[\underset{i \leqslant n}{\Rightarrow} C_i] \Rightarrow [\underset{j \leqslant k}{\Rightarrow} D_j] \overset{(3)}{\equiv} (C_1 \Rightarrow \{\neg[\underset{2 \leqslant i \leqslant n}{\Rightarrow} C_i] \Rightarrow [\underset{j \leqslant k}{\Rightarrow} D_j]\}) \overset{(3)}{\equiv} \ldots \overset{(3)}{\equiv} \overset{(3)}{\equiv} (C_1 \Rightarrow (C_2 \Rightarrow (\ldots(C_{n-1} \Rightarrow (\neg\neg C_n \Rightarrow [\underset{j \leqslant k}{\Rightarrow} D_j])) \ldots))) \overset{(1)}{\equiv} \Phi_2$, где Φ_2 — правая часть равносильности (6). Если принять, что в (6) $C_i = \{\neg X_{1i} \Rightarrow X_{21}\}$, $n = k_1$, а $D_j = \{\neg X_{1i_1} \Rightarrow X_{2i_2}\}$, $k = k_1 k_2$, получим $\Phi_1 \overset{(6),(1)}{\equiv} \neg(\underset{i_1 \leqslant k_1,\ i_2 \leqslant k_2+1}{\Rightarrow} (\neg X_{1i_1} \Rightarrow \Rightarrow X_{2i_2}))$, и, следовательно, равносильность (5) справедлива при рассмотренных значениях n_1 и n_2. Случай, когда $n_1 = k_1 + 1$, $n_2 = k_2$, легко свести к предыдущему, выполнив в правой и левой частях устанавливаемой равносильности (5) преобразование (4). Лемма доказана.

В формулировке теорем 1, 2 символы X, Y используются вместо переменных x, y или их отрицаний x^0, y^0. Пусть $X = \neg x$, и так как $X^0 =$

$=\neg X$, то $X^0=\neg\neg x^{(1)}=x$. Поэтому далее символ X^0 при $X=\neg x$ обозначает вхождение в ИНФ переменной x.

Теорема 1. Отрицание ИНФ $A=(\underset{l<k}{\Rightarrow}(\underset{i_l<n_l}{\Rightarrow} X_{li_l}))$ равносильно ИНФ $A_1=$
$=(\underset{i_1<n_1,\ldots,i_k<n_k}{\Rightarrow}(X^0_{1i_1}\Rightarrow(X^0_{2i_2}\Rightarrow(\ldots(X^0_{k-1\,i_{k-1}}\Rightarrow\neg X^0_{ki_k})\ldots)))$.

Доказательство. Из равносильности $A\equiv\neg A_1$, в силу (1), следует справедливость равносильности $\neg A\equiv A_1$. В связи с этим достаточно доказать равносильность

$$(\underset{l<k}{\Rightarrow}(\underset{i_l<n_l}{\Rightarrow} X_{li_l}))\equiv\neg(\underset{i_1<n_1,\ldots,i_k<n_k}{\Rightarrow}(\neg X_{1i_1}\Rightarrow(\ldots(\neg X_{k-1i_{k-1}}\Rightarrow X_{ki_k})\ldots))). \quad (7)$$

Для $k=1$ она очевидна. Предположим, что (7) имеет место при $k=r-1$. Пусть $k=r$, тогда $(\underset{l<r}{\Rightarrow}(\underset{i_l<n_l}{\Rightarrow} X_{li_l}))\equiv$(по индуктивному предположению) $\equiv((\underset{i_1<n_1}{\Rightarrow} X_{1i_1})\Rightarrow\neg(\underset{i_2<n_2,\ldots,i_r<n_r}{\Rightarrow}(\neg X_{2i_2}\Rightarrow(\neg X_{3i_3}\Rightarrow(\ldots(\neg X_{r-1\,i_{r-1}}\Rightarrow$
$\Rightarrow X_{ri_r})\ldots)))))\overset{(5)}{\equiv}\neg(\underset{i_1<n_1,\ldots,i_r<n_r}{\Rightarrow}(\neg X_{1i_1}\Rightarrow(\neg X_{2i_2}\Rightarrow(\ldots(\neg X_{r-1\,i_{r-1}}\Rightarrow X_{ri_r})\ldots))))$.
Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть A и B — ИНФ, причем $A=(\underset{l<k}{\Rightarrow}(\underset{i_l<n_l}{\Rightarrow} X_{li_l}))$ и $B=$
$=(\underset{p<r}{\Rightarrow} D_p)$, где $D_p=(\underset{j_p<m_p}{\Rightarrow} Y_{pj_p})$. Тогда формула $A\Rightarrow B$ равносильна ИНФ $A_2=(C_1\Rightarrow(C_2\Rightarrow(\ldots(C_{n_1n_2\ldots n_k}\Rightarrow(\underset{p<r}{\Rightarrow} D_p))\ldots)))$. Здесь символами C_t, $t\leqslant$
$\leqslant n_1n_2\ldots n_k$, обозначены все возможные к-местные импликации вида $(X^0_{1i_1}\Rightarrow$
$\Rightarrow(X^0_{2i_2}\Rightarrow(\ldots(X^0_{k-1\,i_{k-1}}\Rightarrow\neg X^0_{ki_k})\ldots)))$, где $i_l\leqslant n_l$, $l\leqslant k$.

Доказательство. Используя (7), получим $A\Rightarrow B=(\underset{l<k}{\Rightarrow}(\underset{i_l<n_l}{\Rightarrow} X_{li_l})\Rightarrow$
$\Rightarrow(\underset{p<r}{\Rightarrow} D_p))\overset{(7)}{\equiv}\neg[\underset{i_1<n_1,\ldots,i_k<n_k}{\Rightarrow}(X^0_{1i_1}\Rightarrow(X^0_{2i_2}\Rightarrow(\ldots(X^0_{k-1\,i_{k-1}}\Rightarrow\neg X^0_{ki_k})\ldots)))]\Rightarrow[\underset{p<r}{\Rightarrow} D_p]=$
$=\Phi_3$. Полагая здесь и в (6), что $C_i=(X^0_{1i_1}\Rightarrow(X^0_{2i_2}\Rightarrow(\ldots(X^0_{k-1\,i_{k-1}}\Rightarrow$
$\Rightarrow\neg X^0_{ki_k})\ldots)))$, где $i\leqslant n_1n_2\ldots n_k$, $i_l\leqslant n_l$, $l\leqslant k$, убедимся в справедливости теоремы: $\Phi_3=\neg(\underset{i\leqslant n_1,n_2\ldots n_k}{\Rightarrow} C_i)\Rightarrow(\underset{p<r}{\Rightarrow} D_p)\overset{(6)}{\equiv}(C_1\Rightarrow(C_2\Rightarrow(\ldots(C_{n_1n_2\ldots n_k}\Rightarrow(\underset{p<r}{\Rightarrow} D_p))\ldots)))$.
Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 позволяют преобразовать к ИНФ произвольную ФАЛ, заданную над множеством G. Действительно, если заменить на ИНФ вида $\neg(\neg x^\delta)$ каждое вхождение в ФАЛ символов переменных x^δ, где $\delta\in\{0, 1\}$, а затем применить достаточное число раз равносильности, доказанные теоремами 1 и 2, то получим некоторую ИНФ исходной ФАЛ. Эффективность данной процедуры построения ИНФ можно повысить, если в исходной ФАЛ сразу выделить множество подформул, которые являются ИНФ. Кроме того, можно уменьшить громоздкость преобразований по теоремам 1, 2, упростив ИНФ вида $(\underset{j\leqslant k}{\Rightarrow} B_j)$ по следующим правилам, которые аналогичны соответствующим приемам преобразования дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм.

I. Приведение подобных членов: в r-местной импликации B_j, содержащей многократные вхождения символа переменной x^δ, может быть оставлено только одно вхождение символа x^δ.

II. Удаление константы: r-местная импликация B_j, содержащая символы x^δ и $x^{\bar\delta}$, тождественна единице и может быть удалена из ИНФ.

III. Поглощение: если r_1 — местная импликация B_j содержит вхождения только переменных $x_i^{\delta_i}$, $i\leqslant r_1$, а (r_1+r_2) — местная импликация B_p, $p\neq j$, включает в себя вхождения тех же переменных и, кроме того, может содержать вхождения переменных $y_l^{\gamma_l}$, $l\leqslant r_2$ $(r_2\geqslant 0)$, то импликация B_p может быть удалена из ИНФ.

IV. Склеивание: если $(r+1)$-местная импликация B_j содержит вхождение переменной y^{δ}, а $(r+1)$-местная импликация B_p включает в себя отрицание той же переменной, и, кроме того, B_j и B_p содержат вхождения одинаковых переменных $x_i^{\delta_i}$, $i \leqslant r$, то B_j и B_p могут быть заменены r-местной импликацией $B = (\underset{i<r}{\Rightarrow} x_i^{\delta_i})$.

Доказательство I—IV несложно. Установим, например, справедливость III. Так как в k-местной импликации $(\underset{i<k}{\Rightarrow} B_i)$ допустимы любые перестановки символов B_i, $i \leqslant k$, то достаточно доказать, что $B_p \Rightarrow \neg B_j \equiv \neg B_j$ или $(y_1^{\delta_1} \Rightarrow (y_2^{\delta_2} \Rightarrow (\ldots (y_{r_2}^{\delta_{r_2}} \Rightarrow B_j)\ldots))) \Rightarrow \neg B_j \equiv \neg B_j$. Рассмотрим два случая. Пусть при некоторых значениях переменных $x_i^{\delta_i}$, $i \leqslant r$, имеет место: 1) $B_j = 0$, 2) $B_j = 1$. Тогда получим, что 1) $B_p \Rightarrow \neg B_j = B_p \Rightarrow \neg 0 \equiv 1 = \neg B_j$, 2) $B_p \Rightarrow \neg B_j = (y_1^{\delta_1} \Rightarrow (y_2^{\delta_2} \Rightarrow (\ldots (y_{r_2}^{\delta_{r_2}} \Rightarrow 1)\ldots))) \Rightarrow \neg 1 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0 = \neg B_j$,— при любых значениях переменных $y_l^{\delta_l}$, $l \leqslant r_2$. Утверждение доказано. Доказательство остальных утверждений аналогично данному.

Пример. Построить ИНФ формулы $\neg \Phi_4$, где $\Phi_4 = \{[a \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \neg b] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \neg b)] \Rightarrow ([a \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)] \Rightarrow ([a \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \neg e^0)] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \neg e^0)] \Rightarrow ([a \Rightarrow \neg e^0)] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (a \Rightarrow \neg e^0)] \Rightarrow ([e \Rightarrow (c^0 \Rightarrow \neg d^0)] \Rightarrow \neg [a^0 \Rightarrow (c^0 \Rightarrow \neg d^0)]))))))))\}$. Упростим Φ_4 по правилам I—IV. Получим, что $\Phi_4 = \{[a \Rightarrow b] \Rightarrow ([a \Rightarrow \neg e^0] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (d^0 \Rightarrow \neg e^0)] \Rightarrow ([e^0 \Rightarrow (c^0 \Rightarrow \neg d^0)] \Rightarrow \neg [a^0 \Rightarrow (c^0 \Rightarrow \neg d^0)])))\}$. Теперь преобразуем $\neg \Phi_4$, согласно теореме 1, одновременно применяя правила I—IV. В результате имеем: $\neg \Phi_4 = \{[a^0 \Rightarrow \neg d] \Rightarrow ([a^0 \Rightarrow (c \Rightarrow \neg e)] \Rightarrow ([a^0 \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)] \Rightarrow ([b^0 \Rightarrow (c \Rightarrow \neg e)] \Rightarrow [b^0 \Rightarrow (d^0 \Rightarrow e)])))\}$.

Легко видеть, что если сразу преобразовать Φ_4 по теореме 1, не используя при этом правил I—IV, то получим ИНФ, которая будет содержать $n_1 n_2 \ldots n_9 = 3^9$ вхождений символов переменных против 14 в нашем случае. Данный пример иллюстрирует полезность применения правил I—IV при построении ИНФ алгебраическим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мощенский В. А. Лекции по математической логике.— Минск, 1973.
2. Мощенский В. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1975, № 3, с. 73.

Поступила в редакцию
24.10.79.

Кафедра МО ЭВМ

УДК 517.5

А. С. ГАХОВИЧ

ОРИГИНАЛЫ ЛАПЛАСА — ЭЙЛЕРА СО СТЕПЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НЕЦЕЛОГО ТИПА В НУЛЕ

В работах [1, 2] пополнение пространства оригиналов операционного исчисления производилось за счет включения функций, не являющихся оригиналами в классическом понимании. С помощью эйлеровского метода суммирования расходящихся интегралов и принципа аналитического продолжения функций нескольких комплексных переменных доказана возможность расширения операционного исчисления на класс быстрорастущих функций и класс функций с неинтегрируемой особенностью общего вида в нуле. Однако использование при этом такой процедуры, как разложение функции действительного переменного на аналитические составляющие, требующей вычисления интегралов типа Коши по бесконечному контуру, в некоторых ситуациях может вызвать определенные затруднения. Для функциональных объектов частного вида можно предложить несколько иной метод суммирования, в котором