```
GI2='NEW␣␣';
KD3='M';
CALL PLITBETT(KOLPAR, OPER, PCBN1, SEG1, SEG2, SEG3);

END1: END BETTPLI;
```

Рис. 3. Фрагмент программы работы с БД на ПЛ/1

Макроопределения, соответствующие приведенным операторам языка ВЕТА, должны программироваться на языке универсального макрогенератора с использованием базового языка программирования. Без больших сложностей программировать макроопределения можно только, используя эффективные макрогенерации, которыми обладает универсальный макрогенератор [2]: средства обработки переменного количества операндов макровызова, использование глобальных индексированных переменных разных типов, возможность удобной обработки элементов списка, записанного в качестве операндов макровызова.

Средства базовых языков высокого уровня (ПЛ/1, КОБОЛ) не имеют подобных возможностей и поэтому не могут выполнять препроцессорную обработку макроопределений, соответствующих операторам ВЕТА. Языки программирования КОБОЛ и ПЛ/1 позволяют только вызывать определенные наборы операторов языка, но возможности преобразования этих наборов сильно ограничены. Поэтому средства этих языков создают определенные удобства при работе с базами данных при вызове заготовленных часто используемых типовых процедур работы с БД, но практически бесполезны в прикладных программах при разнообразных логических базах данных. Для автоматического проектирования таких процедур эффективным средством является универсальный макрогенератор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дравица В. И., Змитрович А. И., Лепешинский Н. А. Об одной системе автоматизированного проектирования баз данных: Первая Всесоюзная конференция «Банки данных».— Тбилиси, 1980.
2. Воюш В. И.— Программирование, 1979, № 4.

Поступила в редакцию 03.02.81.

Кафедра математического обеспечения АСУ

УДК 517.966

А. А. ЛЕВАКОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ОДНА ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; $T=[t_0, t_1]$ — отрезок в R; μ — мера Лебега на T, $\varkappa$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств E; $\alpha(A, B)=\max\{\sup\limits_{x\in A}\rho(x, B), \sup\limits_{y\in B}\rho(A, y)\}$ — отклонение по Хаусдорфу множеств $A, B\in\varkappa$. Последовательность (A_n), $A_n\in\varkappa$ называют сходящейся, если существует $A\in\varkappa$ такое, что $\alpha(A_n, A)\to 0$. Как известно [1], если $\alpha(A_n, A_m)_{n, m\to\infty}\to 0$, то последовательность (A_n) является сходящейся. Последовательность многозначных отображений $(A_n(\cdot))$, $A_n(\cdot): J\to\varkappa$, $J\subset T$, назовем сходящейся почти при всех $t\in J$ к $A(\cdot)$ (равномерно на J к $A(\cdot)$), если $\alpha(A_n(t), A(t))\to 0$ почти при всех $t\in J$ (равномерно на J). Функцию $a(\cdot): T\to E$ называют сечением многозначного отображения $A(\cdot): T\to\varkappa$, если $a(t)\in A(t)$ почти при всех $t\in T$. Многозначное отображение $A(\cdot): T\to\varkappa$ назовем интегрируемым, если существует счетное семейство $\{x_n(\cdot)\}$, $n=1, 2, \ldots$, интегрируемых по Бохнеру сечений отображения $A(\cdot)$ таких, что $\{x\in E \mid x=x_n(t), n=1, 2, \ldots\}$ плотны в $A(t)$ почти при всех $t\in T$. Интегралом $\int\limits_{t_0}^{t_1} A(t)\,d\mu$ называем множество в E, точки которого — интегралы всех интегрируемых по Бохнеру сечений $A(\cdot)$. Из теоремы Дербе—Кастена [2] и теорем 3. 5. 2, 3. 7. 4 [3] следует, что измеримое многозначное отображение $A(\cdot):T\to\varkappa$ [2] является интегрируемым, если $\|v\|\leqslant m(t)$ для всех $v\in A(t)$, $t\in T$, где $m(\cdot):T\to R$ интегрируемая по Лебегу функция.

Предложение 1. Если последовательность $(A_n(\cdot))$, $A_n(\cdot):T\to\varkappa$, измеримых многозначных отображений сходится к $A(\cdot)$ почти при всех $t\in T$, то $A(\cdot)$ измеримое отображение.

Доказательство следует из теоремы Дербе — Кастена, теоремы 2′ [4, с. 284] и соотношения $\rho(x, A_n(t))\to\rho(x, A(t))$, которое имеет место почти при всех $t\in T$, при всех $x\in E$.

Предложение 2. Если отображения $A(\cdot)$, $B(\cdot):T\to\varkappa$ измеримы, то измерима и функция $t\to\alpha(A(t), B(t))$.

Доказательство. Функция $\rho(x, B(t))$ измерима по t при каждом $x\in E$ и непрерывна по x при каждом $t\in T$. Пусть $\{x_i(\cdot)\}$, $i=1, 2, \ldots$, измеримые сечения отображения $A(\cdot)$ такие, что $\{x\in E\,|\,x=x_i(t), i=1, 2, \ldots\}$ плотны в $A(t)$ почти при всех $t\in T$. Функции $t\to\rho(x_i(t), B(t))$ измеримы при всех i. Это утверждение следует из следствия к предложению 8 [5, стр. 345], которое доказано в [5] для случая $E=R^n$. Однако, используя теорему Дербе — Кастена, его можно аналогично доказать и в случае, когда E — сепарабельное банахово пространство. Так как $\sup\limits_{x\in A(t)}\rho(x, B(t))=\sup\limits_{1<i<\infty}\rho(x_i(t), B(t))$ почти при всех $t\in T$, то функция $t\to\sup\limits_{x\in A(t)}\rho(x, B(t))$ измерима. Аналогично доказывается измеримость функции $t\to\sup\limits_{y\in B(t)}\rho(A(t), y)$. Отсюда следует измеримость функции α.

Предложение 3. Пусть последовательность измеримых многозначных отображений $(A_n(\cdot))$ сходится почти при всех $t\in T$ к $A(\cdot)$. Тогда для любого $\delta>0$ существует измеримое множество $T_\delta\subset T$, что 1) $\mu(T_\delta)=\mu(T)-\delta$, 2) на T_δ последовательность $(A_n(\cdot))$ сходится к $A(\cdot)$ равномерно.

Доказательство. В силу предложения 1 функция $A(\cdot):T\to\varkappa$ измерима. Согласно предложению 2, измерима и функция $t\to\alpha(A_n(t), A(t))$. Положим $E_n^m=\bigcap\limits_{i\geqslant n}\left\{x\,|\,\alpha(A_n(t), A(t))<\frac{1}{m}\right\}$. Дальнейшее доказательство такое же, как доказательство теоремы Егорова [4].

Используя предложение 3, аналогично теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла [4] можно доказать следующее утверждение.

Предложение 4. Если последовательность $(A_n(\cdot))$ измеримых многозначных отображений сходится почти при всех $t\in T$ к $A(\cdot)$ и при всех n, $\|v\|\leqslant m(t)$, $v\in A_n(t)$, $t\in T$, где $m(\cdot):T\to R$ интегрируемая по Лебегу функция, то $A(\cdot)$ интегрируемо на T и $\int\limits_{t_0}^{t_1}A_n(t)\,d\mu\to\int\limits_{t_0}^{t_1}A(t)\,d\mu$.

Многозначную функцию $X(\cdot):T\to\varkappa$ называют непрерывной в точке t, если $\alpha(X(t), X(t'))\to 0$ при $t'\to t$, t', $t\in T$.

Предложение 5. Пусть отображение $F:(t, \mathrm{x})\to F(t, \mathrm{x})$, $(t, \mathrm{x})\in T\times E$, $F(t, x)\in\varkappa$ измеримо по t при каждом x и непрерывно по x почти при всех t. Тогда для каждой непрерывной многозначной функции $X(\cdot):T\to\varkappa$ отображение $t\to F(t, X(t))$ измеримо.

Доказательство. Пусть $B\in\varkappa$ и $\{b_i\}$, $i=1, 2, \ldots$, — плотное подмножество B. Из соотношения $\rho(x, F(t, B))=\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}\rho(x, F(t, b_i))$ и теоремы Дербе-Кастена следует измеримость отображения $t\to F(t, B)$, поэтому измеримо при каждом $n=1, 2, \ldots$ отображение

$$t\to\Phi_n(t)=\begin{cases}F(t, X(t_0)), & t\in[t_0, t_0+h_n[,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ F(t, X(t_0+(n-1)h_n)), & t\in[t_0+(n-1)h_n, t_1],\ h_n=\dfrac{t_1-t_0}{n}.\end{cases}$$

Так как $\rho(x, \Phi_n(t)) \underset{n\to\infty}{\to} \rho(x, F(t, X(t))$ почти при всех $t \in T$, то функция $t \to \rho(x, F(t, X(t))$ измерима при каждом $x \in E$, что равносильно измеримости отображения $t \to F(t, X(t))$.

Рассмотрим следующую задачу

$$\dot{x} \in F(t, x), \; x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in S(x_0, r)$; $S(x_0, r)$ — замкнутый шар в E с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$; $t \in T$; $F: T \times S(x_0, r) \to \varkappa$. Решением (1) назовем непрерывную многозначную функцию $X(\cdot): T_1 \to \varkappa$, $T_1 = [t_0, \bar{t}] \subset T$, удовлетворяющую соотношению

$$X(t) = \overline{x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X(\tau))\, d\mu}, \quad t \in T_1 \; (\bar{P} \text{— замыкание множества } P \in E).$$

Пусть функция $\varphi: (t, x) \to \varphi(t, x) \in R$, $(t, x) \in T \times R$, измерима по t при каждом x и непрерывна по x почти при всех t; $\varphi(t, 0) \equiv 0$, $t \in T$; $|\varphi(t, x)| \leqslant n(t)$, $(t, x) \in T \times R$, где $n(\cdot)$ — интегрируемая по Лебегу на T функция; неравенству $0 \leqslant x(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau))\, d\mu$ удовлетворяет лишь одна непрерывная функция $x(t) \equiv 0$, $t \in T$.

Теорема. Предположим, что отображение $F: T \times S(x_0, r) \to \varkappa$ удовлетворяет условиям:

i) $\|v\| \leqslant m(t)$ для всех $v \in F(t, x)$, $t \in T$, $x \in S(x_0, r)$, $m(\cdot)$ — интегрируемая по Лебегу на T функция;

ii) измеримо по t при каждом $x \in S(x_0, r)$;

iii) $\alpha(F(t, X), F(t, Y)) \leqslant \varphi(t, \alpha(X, Y))$ для всех непустых замкнутых подмножеств X, Y из $S(x_0, r)$.

Тогда задача (1) имеет решение.

Доказательство. Пусть $M = \int_{t_0}^{t_1} m(t)\, d\mu$, $T_1 = [t_0, \bar{t}]$, $\bar{t} = \min\left\{t_1, \frac{r}{M}\right\}$, $h_n = \frac{\bar{t} - t_0}{n}$. Построим последовательность функций $(X_n(\cdot))$, $X_n(\cdot): T_1 \to \varkappa$ следующим образом:

$$X_n(t) = x_0, \; t \in [t_0 - h_n, t_0], \; X_n(t) = \overline{x_0 + \int_{t_0}^{t_1} F(\tau, X_n(\tau - h_n))\, d\mu} \; t \in T_1. \tag{2}$$

Из условий *i*), *ii*), *iii*) и предложения 5 следует, что последовательность $(X_n(\cdot))$ может быть построена. Легко видеть, что

$$\alpha(X_n(t), X_m(t)) \leqslant \int_{t_0}^{t} \alpha(F(\tau, X_n(\tau - h_n)), F(\tau, X_m(\tau - h_m)))\, d\mu =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \alpha(F(\tau, X_n(\tau)), F(\tau, X_m(\tau)))\, d\mu + \varepsilon_{n,m}(t), \tag{3}$$

где $\varepsilon_{n,m}(t) \underset{n,\, m\to\infty}{\to} 0$ почти при всех $t \in T_1$. Из (3) и условия *iii*) имеем $\alpha(X_n(t), X_m(t))_{n,\, m\to\infty} \to 0$ почти при всех $t \in T_1$. Следовательно, $X_n(t) \to X(t)$ почти при всех $t \in T_1$. Последовательность $(F(t, X_n(t - h_n))$ удовлетворяет всем условиям предложения 4. Из (2) имеем $X(t) = \overline{x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X(\tau))\, d\mu}$, $t \in T_1$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Свойства многозначных отображений, установленные в предложениях 1—5, являются обобщением известных свойств однозначных векторных функций [3], [4].

2. Доказанная теорема является обобщением теоремы существования [6, стр. 21] для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

3. Введенное понятие решения отличается от общепринятого. Обычно, под решением задачи (1) понимают абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot): T_1 \to E$ такую, что $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$, где $v(\cdot)$ суммируемое по Бохнеру сечение $F(t, x(t))$. Ясно, что решение (в обычном смысле) является сечением решения (в смысле введенном в заметке).

ЛИТЕРАТУРА

1. Castaing C., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions, 1977.
2. Иоффе А. Д., Левин В. Л.— Труды Моск. матем. об-ва, 1972, т. 26.
3. Хилле Э., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М., 1962.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М., 1968.
5. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М., 1974.
6. Мамедов Я. Д. Односторонние оценки в условиях исследования дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.— Баку, 1971.

Поступила в редакцию
14.04.80.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.925.11

А. П. САДОВСКИЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГОЛОМОРФНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В СЛУЧАЕ ЦЕНТРА

Будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + Q(x, y)}{y + P(x, y)}, \tag{1}$$

где P, Q — голоморфные в окрестности $x=y=0$ функции без свободных и линейных членов.

Теорема 1. Для того чтобы начало координат уравнения (1) было центром, необходимо и достаточно существование единственного голоморфного в окрестности $x=Y=0$ преобразования

$$y = Y + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) Y^{2k} \equiv Y + v(x, Y^2) \tag{2}$$

($\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0$), приводящего (1) к виду

$$YY' = -x - f(x, Y^2), \tag{3}$$

где $f(x, z)$ — голоморфная в окрестности $x = z = 0$ функция, $f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$.

Доказательство. Достаточность очевидна, см., например, [1].

Необходимость. Пусть $O(0, 0)$ является центром уравнения (1). На основании теоремы Ляпунова [1, 2] для (1) существует голоморфный в окрестности $x=y=0$ интеграл

$$x^2 + \varphi(x) + y\varphi_1(x) + y^2[1 + \psi(x, y)] = C, \tag{4}$$

где $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = \psi(0, 0) = 0$.

Преобразуем теперь левую часть интеграла (4) при помощи некоторой голоморфной замены (2). Имеем

$$x^2 + \varphi(x) + (Y+v)\varphi_1(x) + (Y^2 + 2Yv + v^2)[1 + \\ + \psi(x, Y+v)] \equiv x^2 + \varphi(x) + (Y+v)\varphi_1(x) + \\ + (Y^2 + 2Yv + v^2)[1 + \psi_1(x, Y^2, v) + Y\psi_2(x, Y^2, v)] \equiv$$