

РАСЧЕТ ОБЪЕМНЫХ КАЛЕЙДОСКОПИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ С УЧЕТОМ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ

Наглядный вывод групп пространственной симметрии можно осуществить калейдоскопически с помощью зеркал. Для трехмерного пространства имеется семь калейдоскопов: три для кубических структур (рис. 1, δ —ж) и четыре для остальных (рис. 1, a — z). В монографии [1] детально изложены их геометрические характеристики. В данной работе рассматриваются объемные калейдоскопические резонаторы. Различными методами [2—7] можно получить точные решения уравнений Максвелла для всех этих резонаторов. В настоящей работе предлагается новый метод построения собственных типов колебаний (СТК) калейдоскопических резонаторов. Метод разделения переменных в обычном своем виде применим к решению довольно узкого круга краевых задач [8]. В частности, из указанных семи резонаторов он непосредственно применим только к прямоугольному. Одна из возможностей дополнения метода появляется при рассмотрении изображенных на рис. 1 объемных резонаторов. Собственные типы колебаний их можно рассчитать методом разделения переменных с учетом вырождения, обусловленного соответствующей симметрией. В данной работе этот метод используется для построения СТК четырех резонаторов: куба и тетраэдров. В них нет выделенного направления (все три направления эквивалентны), поэтому собственные решения этих четырех резонаторов необходимо искать с учетом перестановочного (кубического) вырождения. Для нахождения СТК полых идеальных объемных резонаторов необходимо, как известно, проинтегрировать волновое уравнение Гельмгольца для компонент электрического вектора.

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} + k^2 E_j = 0, \quad j = x, y, z \quad (1)$$

при условии выполнения соотношения $\operatorname{div} E = 0$ и равенства нулю касательной составляющей электрического вектора на границе резонатора. С учетом перестановочного вырождения решения волнового уравнения (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_x = & \sum_{i, l, l=0}^1 \left[A_{xyz}^{ijl} \sin\left(k_x x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_y y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_z z + l \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ & + A_{yxz}^{ijl} \sin\left(k_y x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_z y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_x z + l \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + A_{zxy}^{ijl} \sin\left(k_z x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_x y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_y z + l \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + A_{xzy}^{ijl} \sin\left(k_x x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_z y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_y z + l \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + A_{zyx}^{ijl} \sin\left(k_z x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_y y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_x z + l \frac{\pi}{2}\right) + \\ & \left. + A_{yxz}^{ijl} \sin\left(k_y x + i \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_x y + j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k_z z + l \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Вводя в (2) постоянные интегрирования B и C вместо A , получаем соответственно выражения для E_y и E_z составляющих электрического поля. Компоненты волнового вектора в (2) удовлетворяют обычному соотношению $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Однако каждая из них не определяет, как обычно, периодических изменений поля вдоль соответствующей координатной оси. Решение (2) инвариантно относительно перестановок

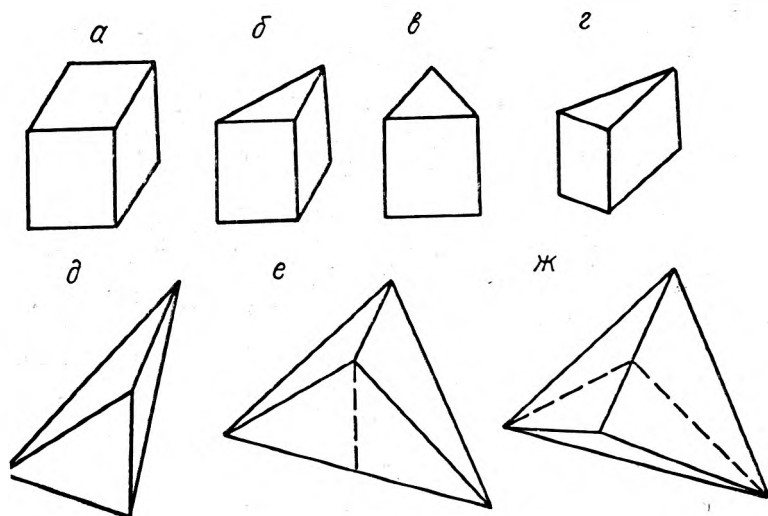


Рис. 1

декартовых переменных и индексов x, y, z . Такая инвариантность согласуется с эквивалентностью трех взаимоортогональных направлений кубических структур, поэтому вполне естественно искать СТК куба и тетраэдров в таком виде.

Если не ограничивать изменение постоянных интегрирования и переменных x, y, z , то решение волнового уравнения (2) как множество значений функции будет полностью определено положительными значениями компонент волнового вектора, удовлетворяющими одному из шести неравенств: $k_x \leq k_y \leq k_z, k_y \leq k_z \leq k_x, k_z \leq k_x \leq k_y, k_x \leq k_z \leq k_y, k_y \leq k_x \leq k_z$. Вследствие указанной инвариантности выход за пределы одного (любого) из этих неравенств не приводит к новым значениям функции (2). Для определенности будем считать $k_x \leq k_y \leq k_z$.

Удовлетворяя граничным условиям поочередно для каждого из резонаторов путем выбора постоянных интегрирования и значений компонент волнового вектора в решении (2), приходим к следующему результату. Спектр частот всех четырех резонаторов определяется одной формулой

$$\nu_{m, n, p} = \frac{1}{\lambda_{m, n, p}} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}. \quad (3)$$

Формула (3) следует из одинаковых для этих резонаторов дисперсионных соотношений:

$$k_x = \frac{m\pi}{2a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{2a}, \quad k_z = \frac{p\pi}{2a}. \quad (4)$$

Входящие в нее целые числа независимо от формы резонатора подчиняются неравенству $m \leq n \leq p$. Для куба это неравенство является единственным ограничением на значения целых чисел. В случае тетраэдров имеются дополнительные ограничивающие требования к их значениям, поэтому спектр частот тетраэдра представляет собой часть спектра частот куба.

Собственным значениям частот (3) соответствуют собственные решения уравнений Максвелла. Электрическое поле этих решений в случае куба запишется в виде:

$$E_x = A_{xyz}^{100} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z + A_{yzx}^{100} \cos k_y x \sin k_z y \sin k_x z + \\ + A_{zxy}^{100} \cos k_z x \sin k_x y \sin k_y z + A_{xzy}^{100} \cos k_x x \sin k_z y \sin k_y z + \\ + A_{zyx}^{100} \cos k_z x \sin k_y y \sin k_x z + A_{yxz}^{100} \cos k_y x \sin k_x y \sin k_z z,$$

$$\begin{aligned}
E_y &= B_{xyz}^{010} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z + B_{yzx}^{010} \sin k_y x \cos k_z y \sin k_x z + \\
&+ B_{zxy}^{010} \sin k_z x \cos k_x y \sin k_y z + B_{xzy}^{010} \sin k_x x \cos k_z y \sin k_y z + \\
&+ B_{zyx}^{010} \sin k_z x \cos k_y y \sin k_x z + B_{yxz}^{010} \sin k_y x \cos k_x y \sin k_z z, \\
E_z &= C_{xyz}^{001} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z + C_{yzx}^{001} \sin k_y x \sin k_z y \cos k_x z + \\
&+ C_{zxy}^{001} \sin k_z x \sin k_x y \cos k_y z + C_{xzy}^{001} \sin k_x x \sin k_z y \cos k_y z + \\
&+ C_{zyx}^{001} \sin k_z x \sin k_y y \cos k_x z + C_{yxz}^{001} \sin k_y x \sin k_x y \sin k_z z.
\end{aligned} \quad (5)$$

Временной множитель $\exp(i\omega t)$ и компоненты вектора магнитного поля $-ik\vec{H} = \text{rot } \vec{E}$ не выписываются.

В выражение (5) входят 18 постоянных интегрирования (A, B, C). Однако только 12 из них могут принимать любые в общем случае комплексные значения. Значения остальных шести находятся из условия $\text{div } E = 0$. Так как выбор независимых постоянных произволен, нет смысла конкретизировать выражение (5) и аналогичные ему выражения для полей СТК других резонаторов учетом условия, $\text{div } E = 0$. Необходимо помнить, что учет его приводит к дополнительным взаимосвязям между постоянными интегрирования. Для куба они имеют вид шести однородных алгебраических уравнений. Первое из них запишется в виде

$$k_x A_{xyz} + k_y B_{xyz} + k_z C_{xyz} = 0. \quad (6)$$

Остальные пять уравнений получаются из уравнения (6) путем перестановки индексов x, y, z .

Таким образом каждой тройке индексов (m, n, p) соответствует одно значение собственной частоты и в общем случае двенадцать независимых собственных решений. Это означает, что СТК куба в общем случае двенадцатикратно вырождены. Поле описывается суперпозицией двенадцати независимых решений. Оно не определяется однозначно частотой и может быть довольно разнообразным по своей структуре и, в частности, по свойствам ее симметрии. Исключение составляют отдельные группы колебаний. Например, кратность вырождения типов колебаний $(0, n, n)$, в их числе и основного колебания $(0, 1, 1)$, равна не двенадцати, а трем. Основной собственной частоте кубического резонатора

$$\nu_{0,1,1} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \quad (7)$$

соответствует поле СТК в виде суперпозиции трех линейно независимых решений граничной задачи:

$$\begin{aligned}
E_{0,1,1} &= E_1 + E_2 + E_3, \quad E_1 = \left\{ A \sin\left(\frac{\pi}{2a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a} z\right), 0, 0 \right\}, \\
E_2 &= \left\{ 0, B \sin\left(\frac{\pi}{2a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a} z\right), 0 \right\}, \quad E_3 = \left\{ 0, 0, C \sin\left(\frac{\pi}{2a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a} y\right) \right\}
\end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из (8), базисные решения отличаются лишь ориентацией поля.

Возможен другой подход к изучению и построению типов колебаний кубического резонатора. СТК кубического резонатора получаются из СТК прямоугольного резонатора в предельном случае при одинаковой длине его ребер. При этом сохраняется условная классификация типов колебаний. Каждой тройке индексов соответствуют два (E и H) решения. Индексы могут принимать любые целочисленные значения. Если исключить перестановочные значения индексов, которым соответствуют одинаковые значения частоты, и сложить соответствующие им различные независимые решения, то придем к СТК куба в виде (3)–(5). Так как набор СТК прямоугольного параллелепипеда считается полным, то из этого предельного перехода следует, что построенный методом вырож-

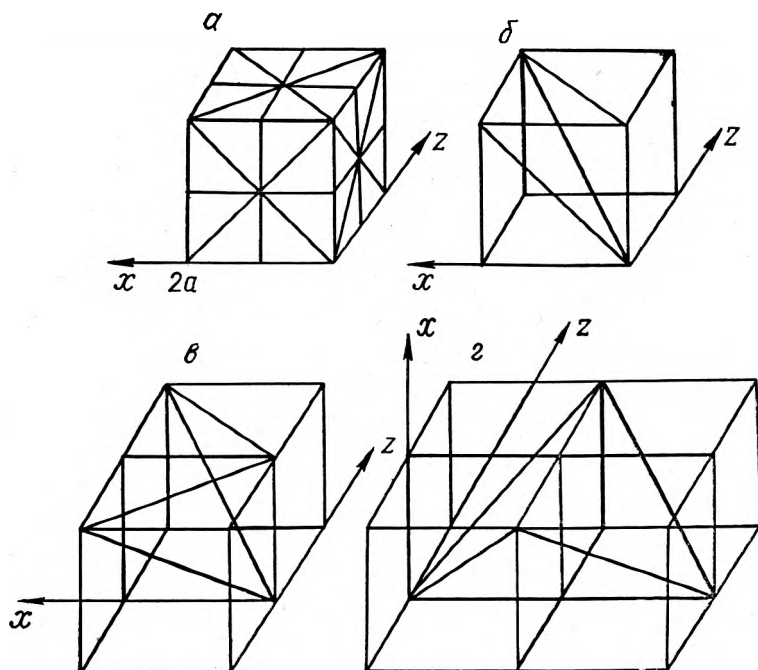


Рис. 2

денных колебаний набор СТК куба также можно считать полным. Это обстоятельство будет использовано в дальнейшем при оценке полноты решений тетраэдров.

Спектр частот первого тетраэдра (рис. 2, б) следует из (3), (4) при четных значениях индексов. Поле СТК представляется в виде суммы трех независимых собственных решений граничной задачи.

$$\begin{aligned}
 E_x &= A_{xzy}^{100} \cos(k_x x) (\sin k_z y \sin k_y z - \sin k_y y \sin k_z z) + \\
 &+ A_{yxz}^{100} \cos(k_y x) (\sin k_x y \sin k_z z - \sin k_z y \sin k_x z) + \\
 &+ A_{zyx}^{100} \cos(k_z x) (\sin k_y y \sin k_x z - \sin k_x y \sin k_y z), \\
 E_y &= A_{yxz}^{100} \cos(k_y y) (\sin k_z x \sin k_x z - \sin k_x x \sin k_z z) + \\
 &+ A_{zyx}^{100} \cos(k_z y) (\sin k_x x \sin k_y z - \sin k_y x \sin k_x z) + \\
 &+ A_{xzy}^{100} \cos(k_x y) (\sin k_y x \sin k_z z - \sin k_z x \sin k_y z), \\
 E_z &= A_{zyx}^{100} \cos(k_z z) (\sin k_y x \sin k_x y - \sin k_x x \sin k_y y) + \\
 &= A_{xzy}^{100} \cos(k_x z) (\sin k_z x \sin k_y y - \sin k_y x \sin k_z y) + \\
 &+ A_{yxz}^{100} \cos(k_y z) (\sin k_x x \sin k_z y - \sin k_z x \sin k_x y).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Однако согласно условия $\text{div } E = 0$ только два из них являются независимыми. Это означает, что СТК в общем случае двукратно вырождены. Вырождение снимается лишь в некоторых частных случаях, соответствующих определенным значениям индексов. Один из таких частных случаев реализуется при значениях индексов основного типа колебания 0, 2, 4. Основной частоте

$$\nu_{0, 2, 4} = \frac{\sqrt{5}}{2a} \tag{10}$$

соответствует строго фиксированная картина поля. С точностью до постоянного множителя компоненты электрического поля основного СТК запишутся в виде

$$\begin{aligned}
E_x &= \sin \frac{\pi}{a} y \sin \frac{\pi}{a} z \left(\cos \frac{\pi}{a} y - \cos \frac{\pi}{a} z \right), \\
E_y &= \sin \frac{\pi}{a} z \sin \frac{\pi}{a} x \left(\cos \frac{\pi}{a} z - \cos \frac{\pi}{a} x \right), \\
E_z &= \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y \left(\cos \frac{\pi}{a} x - \cos \frac{\pi}{a} y \right)
\end{aligned} \quad (11)$$

При оценке полноты набора СТК удобнее сравнивать СТК тетраэдра и куба вдвое меньших, чем на рис. 2, *а* размеров. Относительное расположение этих фигур в выбранной системе координат показано на рис. 2, *б*. Нетрудно убедиться, что спектры частот тетраэдрического и такого кубического резонаторов совпадают. Кратность вырождения частот тетраэдра в шесть раз меньше кратности вырождения частот куба. Однако и объем тетраэдра во столько же раз меньше объема куба. Поэтому асимптотическая спектральная плотность их СТК будет одинакова и определяется известной формулой Рэлея — Джинса [9]. Это дает основание предполагать, что получен весь набор СТК первого тетраэдрического резонатора.

Как видно из рис. 2, *в*, второй тетраэдр может быть составлен из двух предыдущих. Следовательно решения первого тетраэдра составляют половину решений второго тетраэдра. Эти решения имеют антисимметричные по z компоненты поля E_x , E_y . Вторая симметричная половина решений, как следует из граничной задачи, может быть представлена вместе со своими дисперсионными соотношениями в виде

$$\begin{aligned}
E_x &= A_{xzy}^{011} \sin(k_x x) (\cos k_z y \cos k_y z - \cos k_y y \cos k_z z) + \\
&+ A_{yxz}^{011} \sin(k_y x) (\cos k_x y \cos k_z z - \cos k_z y \cos k_x z) + \\
&+ A_{zyx}^{011} \sin(k_z x) (\cos k_y y \cos k_x z - \cos k_x y \cos k_y z), \\
E_y &= A_{xzy}^{011} \sin(k_y y) (\cos k_z x \cos k_x z - \cos k_x x \cos k_z z) + \\
&+ A_{yxz}^{011} \sin(k_z y) (\cos k_x x \cos k_y z - \cos k_y x \cos k_x z) + \\
&+ A_{zyx}^{011} \sin(k_x y) (\cos k_y x \cos k_z z - \cos k_z x \cos k_y z), \\
E_z &= A_{yxz}^{011} \sin(k_z z) (\cos k_y x \cos k_x y - \cos k_x x \cos k_y y) + \\
&+ A_{xzy}^{011} \sin(k_x z) (\cos k_z x \cos k_y y - \cos k_y x \cos k_z y) + \\
&+ A_{zyx}^{011} \sin(k_y z) (\cos k_x x \cos k_z y - \cos k_z x \cos k_x y).
\end{aligned} \quad (12)$$

$$\cos(k_x a) = 0, \cos(k_y a) = 0, \cos(k_z a) = 0. \quad (13)$$

Дисперсионным соотношениям (13) соответствует свой спектр частот, который получается из формулы (3) при нечетных значениях индексов. Таким образом спектр частот второго тетраэдра определяется значениями индексов одинаковой четности по формуле (3). Причем четным индексам соответствует поле СТК (9), нечетным — (12). Число собственных частот во втором тетраэдре удваивается по сравнению с их числом в первом тетраэдре. Так как кратность их вырождения сохраняется и по-прежнему равна двум, то и число СТК также удваивается. Отношение числа СТК пропорционально отношению объемов. Это означает, что набор СТК второго тетраэдра также является полным.

Основной тип колебания резонатора невырожден и достигается при значениях индексов 1, 1, 3. Частота и, с точностью до множителя, поле его СТК запишутся в виде

$$v_{1, 1, 3} = \frac{\sqrt{11}}{4a} \quad (14)$$

$$E_x = \sin \left(\frac{\pi}{2a} x \right) \left(\cos \frac{3\pi}{2a} y \cos \frac{\pi}{2a} z - \cos \frac{\pi}{2a} y \cos \frac{3\pi}{2a} z \right),$$

$$E_y = \sin\left(\frac{\pi}{2a} y\right) \left(\cos \frac{3\pi}{2a} z \cos \frac{\pi}{2a} x - \cos \frac{\pi}{2a} z \cos \frac{3\pi}{2a} x \right), \quad (15)$$

$$E_z = \sin\left(\frac{\pi}{2a} z\right) \left(\cos \frac{3\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{2a} y - \cos \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{3\pi}{2a} y \right).$$

Спектр собственных частот следующего тетраэдра (рис. 2, з), как и предыдущего (рис. 2, в), определяется по формуле (6) значениями индексов одинаковой четности. Кратность вырождения частот в общем случае увеличивается в два раза. Собственной частоте соответствует собственное решение в виде суммы решений (9) и (12). Таким образом с переходом от второго к третьему резонатору число СТК удвоится за счет увеличения кратности вырождения СТК. Изменение числа СТК находится в соответствии с соотношением их объемов. Это дает основания предполагать, что получен весь набор СТК третьего тетраэдрического резонатора.

Минимальная собственная частота, которой соответствует нетривиальное (не нулевое) собственное решение определяется значениями индексов 0, 2, 2 и равна

$$\nu_{0,2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \quad (16)$$

Основной тип колебания невырожден. Поле его с точностью до множителя можно записать в виде

$$E_x = \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \left(\cos \frac{\pi}{a} z - \cos \frac{\pi}{a} y \right), \quad E_y = \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \left(\cos \frac{\pi}{a} x - \cos \frac{\pi}{a} z \right), \\ E_z = \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \left(\cos \frac{\pi}{a} y - \cos \frac{\pi}{a} x \right). \quad (17)$$

Аналогично можно построить СТК оставшихся трех из семи изображенных на рис. 1 резонаторов. СТК призм с основанием в виде равнобедренного и прямоугольного с острыми углами $\pi/3$, $\pi/6$ треугольников, как показано в работе [10], представляются суперпозицией вырожденных колебаний прямоугольной призмы той же высоты и размерами в основании $b \times b \sqrt{3}$ (b — высота равнобедренного треугольника). СТК призм с равнобедренным прямоугольником в основании строятся из вырожденных СТК призмы с квадратным основанием.

Следует заметить, что СТК тетраэдров были частично получены методом парциальных плоских волн авторами работ [5—7]. В данной работе независимо найдены СТК тетраэдров другим методом, установлена взаимосвязь между симметрией собственных решений и симметрией соответствующих пространств. Предложенный подход существенно упрощает решение краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шубников А. В., Копчик В. А. Симметрия в науке и в искусстве.— М., 1972.
2. L a m e M. G. Lecons sur la Theorie Metematique de Elastique des Corps Solides.— Paris, 1852.
3. Медокс А. Г.— Труды МИРЭА, 1967, вып. 35.
4. Рудницкий А. С., Хапалюк А. П.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1978, № 5, 71.
5. Шестопап А. Ф.— Дифференциальные уравнения, 1979, 15, № 4, 725.
6. Процко С. В., Корнейчик В. В.— Пятая Республиканская конференция молодых ученых: Тез. докл.— Минск, 1978.
7. Корнейчик В. В., Процко С. В., Хапалюк А. П.— Акустический журнал, 1979, 25, № 5, 737.
8. Морс Ф. М., Фешбах Т. Методы теоретической физики.— М., 1958.
9. J e a n s J. H.— Philosophical Magazine, 1965, 10, № 6, 91.
10. Рудницкий А. С., Хапалюк А. П.— Радиотехника и электроника, 1974, 19, № 8, 1609.