ISSN 2523-4714

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

5. MATHEMATICAL AND INSTRUMENTAL METHODS OF ECONOMICS

УДК 330.44

Э. М. Аксень, Г. О. Читая, О. В. Шишко
Белорусский государственный экономический университет,
Минск, Беларусь

МОДЕЛЬ СТРУКТУРНОЙ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

В статье представлена модель, отражающая влияние показателей цифровизации отраслей экономической системы на структурную динамику. Модель построена в непрерывном времени с использованием аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом получаемые прогнозы носят (в общем случае) стохастический характер, что дает возможность рассчитывать их вероятностные характеристики. Доказано существование, единственность и положительность решений систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику параметров влияния чистого инвестирования на скорость изменения выпусков секторов и динамику интенсивностей выпусков секторов, что обосновывает корректность численного прогнозирования с помощью указанных систем уравнений.

Ключевые слова: *структурная динамика экономики, цифровизация экономики, инвестиции, дифференциальное уравнение, случайный процесс*

Для цитирования: Аксень, Э. М. Модель структурной динамики экономической системы в условиях цифровизации / Э. М. Аксень, Г. О. Читая, О. В. Шишко // Бизнес. Инновации. Экономика : сб. науч. ст. / Ин-т бизнеса БГУ. – Минск, 2021. – Вып. 5. – С. 199–204.

E. Aksen, G. Chitaya, O. Shishko
Belarus State Economic University, Minsk, Belarus

MODEL OF STRUCTURAL DYNAMICS OF THE ECONOMIC SYSTEM IN THE CONTEXT OF DIGITALIZATION

The paper presents a model reflecting the impact of the indicators of digitalization of a economic system's industries on its structural dynamics. The model is constructed in continuous time with the use of the ordinary differential equations' apparatus. The obtained forecasts are stochastic in the general case, which allows calculating their probabilistic characteristics. There have been proven existence, uniqueness and positivity of the differential equations' systems describing the dynamics of the parameters of the net investments' impact on the rate of change in the sectors' output and the dynamics of the sectors' output rates, which validates the correctness of numerical forecasting by means of the mentioned differential equations' systems.

Keywords: *structural dynamics of economy, digitalization, investments, differential equation, random process*

For citation: Aksen E., Chitaya G., Shishko O. Model of structural dynamics of the economic system in the context of digitalization. *Biznes. Innovatsii. Ekonomika = Business. Innovations. Economics.* Minsk, 2021, iss. 5, pp. 199–204 (in Russian).

Ускоренное развитие информационных технологий, микроэлектроники и технических средств коммуникаций приводит к внедрению цифровых технологий в экономике, что способствует росту уровня ее цифровизации. Ключевые факторы цифровой трансформации экономики, возникновение и действие которых обусловлено новыми информационными технологиями, меняют ее секторальную и региональную структуру. Цифровые технологии способствуют существенной модернизации нового технологического уклада путем ускорения темпов развития и придания заметной подвижности экономической структурной динамике. По мнению А. Н. Бийчука [1, с. 14–16], основными факторами цифровизации экономики выступают: большие данные и аддитивные технологии; технологии связи, квантовые и суперкомпьютерные технологии; технологии-блокчейн, цифровое проектирование и моделирование интернет вещей; системы искусственного интеллекта.

Вследствие стремительной цифровой трансформации экономики возрастает актуальность и разработки научных подходов к исследованию ее влияния на секторальную (отраслевую) структуру. В настоящей статье рассматривается один из подходов к математическому моделирования структурной динамики экономики в условиях ее цифровизации, который основан на следующих предпосылках: а) инвестиции в основной капитал способствуют увеличению выпуска соответствующего сектора (либо отрасли) экономики [2, с. 48]; б) уровень цифровизации рассматриваемого сектора экономики оказывает влияние на динамику выпуска: чем он выше, тем больше должна быть скорость увеличения выпуска при одних и тех же инвестициях. Эти предпосылки лежат в основе построения непрерывновременной многосекторной модели.

Непрерывновременная многосекторная модель. Пусть экономическая система состоит из n секторов (либо отраслей). Будем считать, что для каждого отдельно взятого сектора имеет место соотношение

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = \gamma_i(t) g_i(t),\ i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $x_i(t)$ и $g_i(t)$ – интенсивности выпуска i-го сектора и чистого инвестирования соответственно в этот сектор в момент времени t; $\gamma_i(t)$ – параметр, отражающий степень влияния интенсивности чистого инвестирования в i-й сектор на скорость изменения интенсивности выпуска этого сектора в момент времени t [3, с. 126]. Из соотношений (1) несложно получить формулы

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \gamma_i(\tau) g_i(\tau) d\tau,\ i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

которые можно использовать для прогнозирования интенсивностей $x_i(t),\ i = \overline{1, n}$, выпусков секторов при известных траекториях $\gamma_i(t)$, $g_i(t)$ и при известных значениях $x_i(t_0)$ в начальный момент времени t_0.

Обозначим: $v_i(t)$ – интенсивность (скорость) валового инвестирования в основной капитал i-го сектора в момент времени t; $d_i(t)$ – интенсивность износа (амортизации) основных средств в данном секторе в указанный момент времени. Напомним, что чистые инвестиции равны разности между валовыми инвестициями и износом основных средств. Следовательно,

$$g_i(t) = v_i(t) - d_i(t),\ i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Обозначим $\alpha_i(t)$ следующие отношения [3, с. 126]:

$$\alpha_i(t) = \frac{v_i(t)/x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} v_j(t)/x_j(t)},\ i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Коэффициенты $\alpha_i(t),\ i = \overline{1, n}$, описывают пропорции удельных валовых инвестиций в разные секторы экономической системы [3, с. 126].

Из равенств (4) следует, что в соответствии с формулой (5) согласно [3]

$$v_i(t) = \frac{\alpha_i(t)x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)}\sum_{j=1}^{n} v_j(t),\ i=\overline{1,n}. \quad (5)$$

Обозначим $\lambda(t)$ отношение интенсивности суммарных валовых инвестиций к интенсивности суммарного выпуска в момент времени t. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} v_j(t) = \lambda(t)\sum_{j=1}^{n} x_j(t). \quad (6)$$

Подставив правую часть равенства (6) в формулу (5), получим

$$v_i(t) = \frac{\alpha_i(t)\lambda(t)\sum_{j=1}^{n} x_j(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)} x_i(t),\ i=\overline{1,n}. \quad (7)$$

Обозначив $\delta_i(t)$ отношение интенсивности износа основных средств i-го сектора к интенсивности выпуска данного сектора, будем иметь

$$d_i(t) = \delta_i(t)x_i(t),\ i=\overline{1,n}. \quad (8)$$

Из соотношений (3), (7), (8) получим следующую формулу для интенсивностей чистого инвестирования:

$$g_i(t) = \left[\frac{\lambda(t)\alpha_i(t)\sum_{j=1}^{n} x_j(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)} - \delta_i(t)\right] x_i(t),\ i=\overline{1,n}. \quad (9)$$

Подставив последнюю формулу в равенства (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для интенсивностей чистого инвестирования:

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = \gamma_i(t)\left[\frac{\lambda(t)\alpha_i(t)\sum_{j=1}^{n} x_j(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)} - \delta_i(t)\right] x_i(t),\ i=\overline{1,n}. \quad (10)$$

При экзогенно заданном векторе $x(t_0) = \left[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right]$ интенсивностей валового выпуска в начальный момент времени t_0 и при известных траекториях $\gamma_i(t)$ система дифференциальных уравнений (10) определяет траектории $x_i(t),\ i=\overline{1,n},\ t \ge t_0$. (Ниже будет показано существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений (10).)

Моделирование влияния показателей цифровизации на динамику выпусков секторов экономики. Предположим, что есть m показателей уровня цифровизации [4, с. 336–368]. Обозначим $\theta_{ij}(t)$ значение j-го показателя уровня цифровизации для i-го сектора в момент времени t, а $\Theta(t)$ – матрицу $\left[\theta_{ij}(t)\right],\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ (элементами которой являются показатели $\theta_{ij}(t)$). Будем считать, что динамика параметров $\gamma_i(t)$ зависит от $\Theta(t)$ следующим образом:

$$\frac{d\gamma_i}{dt}(t) = \varphi_i\left[t, \Theta(t), \gamma(t)\right]\gamma_i(t),\ i = \overline{1, n}, \tag{11}$$

где $\varphi_i(t, \Theta, \gamma)$ – экзогенно заданные функции, непрерывные по (t, Θ, γ) и непрерывно-дифференцируемые по γ, для которых существуют непрерывные функции $\hat{\varphi}_i(t, \Theta)$, такие, что

$$\left|\varphi_i(t, \Theta, \gamma)\right| \le \hat{\varphi}_i(t, \Theta)\ \forall t,\ i = \overline{1, n}, \tag{12}$$

для любой матрицы $\Theta = \left[\theta_{ij}\right]$ и для любого положительного вектора $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$.

Можно показать, что при непрерывном матричном $\Theta(t)$ процессе из соотношений (12) в силу теоремы 2.2 из [5, с. 38] и теоремы 13 из [6, с. 179] следует существование и единственность решения $\gamma(t) = \left[\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\right]$ системы дифференциальных уравнений (11) при любом фиксированном начальном векторе $\gamma(t_0) = \left[\gamma_1(t_0), \ldots, \gamma_n(t_0)\right]$, и что при этом решение $\gamma(t) = \left[\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\right]$ положительно и определено на всем интервале $[t_0, \infty)$, причем

$$\gamma_i(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\hat{\varphi}_i\left[\tau, \Theta(\tau)\right]d\tau\right) \le \gamma_i(t) \le \gamma_i(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\hat{\varphi}_i\left[\tau, \Theta(\tau)\right]d\tau\right)\ \forall t \ge t_0,\ i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

З а м е ч а н и е 1. В соответствии с равенствами (11) значение $\varphi_i(t, \Theta, \gamma)$ равно мгновенной относительной скорости изменения показателя γ_i при заданных значениях $\Theta = \left[\theta_{ij}\right]$ в момент времени t.

З а м е ч а н и е 2. В соответствии с формулой (11) динамика параметра $\gamma_i(t)$ для i-го сектора зависит не только от уровня цифровизации данного сектора, но и от уровня цифровизации других секторов.

При экзогенно заданном векторе $\gamma(t_0) = \left[\gamma_1(t_0), \ldots, \gamma_n(t_0)\right]$ интенсивностей валового выпуска в начальный момент времени t_0 и матричной траектории $\Theta(t)$ система дифференциальных уравнений (11) определяет траектории $\gamma_i(t),\ i = \overline{1, n},\ t \ge t_0$. В свою очередь, траектории $\gamma_i(t)$ посредством системы уравнений (10) при заданном начальном векторе $x(t_0) = \left[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right]$ определяют траектории интенсивностей валового выпуска $x_i(t),\ i = \overline{1, n}$.

З а м е ч а н и е 3. Когда процессы $\Theta(t), \lambda(t), \alpha_i(t), \delta_i(t),\ i = \overline{1, n}$, являются случайными, решения систем дифференциальных уравнений (10), (11) будем понимать как потраекторные решения. Это значит, что почти для всех элементарных событиях ω имеют место соотношения

$$\frac{dx_i}{dt}(t, \omega) = \gamma_i(t, \omega)\left[\frac{\lambda(t, \omega)\alpha_i(t, \omega)\sum_{j=1}^{n}x_j(t, \omega)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t, \omega)x_j(t, \omega)} - \delta_i(t, \omega)\right]x_i(t, \omega)\ \forall t \ge t_0,\ i = \overline{1, n}, \tag{14}$$

$$\frac{d\gamma_i}{dt}(t, \omega) = \varphi_i\left[t, \Theta(t, \omega), \gamma(t, \omega)\right]\gamma_i(t, \omega)\ \forall t \ge t_0,\ i = \overline{1, n}. \tag{15}$$

При таком подходе исследование дифференциальных уравнений со случайными процессами сводится к исследованию детерминированных дифференциальных уравнений (для которых можно использовать соответствующие широко известные результаты). Для краткости мы не будем указывать элементарное событие ω в списке аргументов соответствующих случайных процессов.

Существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений (10). Будем считать, что процессы $\gamma_i(t), \lambda(t), \alpha_i(t), \delta_i(t),\ i = \overline{1, n}$ непрерывны. (Когда указанные процессы являются случайными, мы считаем, что их реализации являются непрерывными почти при всех элементарных событиях ω.) Запишем систему дифференциальных уравнений (10) в следующем виде:

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = f_i\left[t, x(t)\right]x_i(t),\ i = \overline{1, n}, \tag{16}$$

где функции $f_i(t, x),\ i = \overline{1, n},$ определены по формуле

$$f_i(t, x) = \gamma_i(t)\left[\frac{\lambda(t)\alpha_i(t)\sum_{j=1}^{n} x_j}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j} - \delta_i(t)\right],\ i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Очевидно, что из непрерывности процессов $\gamma_i(t),\ \lambda(t),\ \alpha_i(t),\ \delta_i(t),\ i = \overline{1, n}$ следует непрерывность функций $f_i(t, x)$ и частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x),\ i = \overline{1, n},$ по векторному аргументу (t, x).

Введем следующие обозначения:

$$\alpha^+(t) = \max_{i = \overline{1, n}} \alpha_i(t),\ \alpha^-(t) = \min_{i = \overline{1, n}} \alpha_i(t),\ i = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Отметим, что положительность и непрерывность процессов $\alpha_i(t)$ обеспечивает положительность и непрерывность процессов $\alpha^+(t)$ и $\alpha^-(t)$. Обозначим $M_i(t)$ максимальное из значений $\gamma_i(t)$, $\lambda_i(t),\ \alpha^+(t),\ \alpha^-(t),\ \delta_i(t)$, т. е.

$$M_i(t) = \max\left\{\gamma_i(t), \lambda_i(t), \alpha^+(t), \alpha^-(t), \delta_i(t)\right\},\ i = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Из соотношений (19) следует непрерывность процессов $M_i(t),\ i = \overline{1, n},$ а также выполнение неравенств

$$\left|f_i(t, x)\right| \le \hat{f}_i(t),\ i = \overline{1, n}. \tag{20}$$

где процессы $\hat{f}_i(t)$ определены по формуле

$$\hat{f}_i(t) = M_i^2(t)\left[M_i^2(t) + 1\right],\ i = \overline{1, n}. \tag{21}$$

Можно показать, что из соотношений (20) в силу теоремы 2.2 из [5, с. 38] и теоремы 13 из [6, с. 179] следует существование и единственность решения $\gamma(t) = \left[\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\right]$ системы дифференциальных уравнений (16) при любом фиксированном начальном векторе $x(t_0) = \left[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right]$, и что при этом решение $x(t) = \left[x_1(t), \ldots, x_n(t)\right]$ положительно и определено на всем интервале $[t_0, \infty)$, причем

$$x_i(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\hat{f}_i(\tau)d\tau\right) \le x_i(t) \le x_i(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\hat{f}_i(\tau)d\tau\right)\ \forall t,\ i = \overline{1, n}. \tag{22}$$

Таким образом, когда случайные процессы $\gamma_i(t),\ \lambda_i(t),\ \alpha_i(t),\ \delta_i(t),\ i = \overline{1, n}$ потраекторно непрерывны, и при этом случайные процессы $\alpha_i(t),\ i = \overline{1, n},$ положительны, имеет место существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений (10) при любом положительном векторе $x(t_0) = \left[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right]$ интенсивностей выпуска секторов экономики в начальный момент времени t_0. (Отметим, что существование, единственность и положительность решения указанной системы дифференциальных уравнений имеет место и при более слабых условиях по сравнению с указанными.)

Итак, в настоящей статье представлен разработанный нами подход к математическому моделирования влияния факторов цифровизации на динамику выпусков секторов экономики. При этом получаемые с помощью модели прогнозы носят (в общем случае) стохастический характер, что дает возможность рассчитывать их вероятностные характеристики. Нами доказаны существование, единственность и положительность решений систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику параметров $\gamma_i(t)$ влияния чистого инвестирования на скорость изменения выпусков секторов и динамику интенсивностей $x_i(t)$ выпусков секторов, что обосновывает корректность численного прогнозирования с помощью указанных систем уравнений.

Список использованных источников

1. *Бийчук*, *А. Н.* Цифровая трансформация бизнеса в современной экономике / А. Н. Бийчук // Эконом. среда. – 2017. – № 2 (20). – С. 12–22.

2. *Гранберг*, *А. Г.* Динамические модели народного хозяйства / А. Г. Гранберг. – М. : Экономика, 1985. – 240 с.

3. *Аксень*, *Э. М.* Стохастическая динамическая балансовая модель для выпусков отраслей с использованием коэффициентов пропорций инвестирования / Э. М. Аксень // Экономика, моделирование, прогнозирование : сб. науч. тр. / НИЭИ М-ва экономики Респ. Беларусь. – 2019. – Вып. 13. – С. 125–131.

4. *Головенчик*, *Г. Г.* Цифровая экономика / Г. Г. Головенчик, М. М. Ковалёв. – Минск : БГУ, 2019. – 395 с.

5. *Teschl*, *G.* Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems / G. Teschl. – Providence : American Mathematical Society, 2012. – 356 p.

6. *Понтрягин*, *Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1974. – 331 с.

References

1. Biychuk A. N. Digital transformation of business in the contemporary economy. *Ekonomicheskaya sreda* [Economic Environment], 2017, iss. 2 (20), pp. 12–22 (in Russian).

2. Granberg A. G. Dynamic models of national economy. Moscow, 1985. 240 p. (in Russian).

3. Aksen E. M. Stochastic dynamic balance model for sectors' outputs with the use of investment ratios coefficients. *Economika*, *modelirovaniye*, *prognozirovaniye* [Economics, modelling, forecasting], 2019, iss. 13, pp. 125–131 (in Russian).

4. Golovenchik G. G., Kovalyov M. M. Digital economy. Minsk, 2019. 395 p. (in Russian).

5. Teschl G. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. Providence, 2012. 356 p.

6. Pontryagin L. S. Ordinary differential equations. Moscow, 1974. 331 p. (in Russian).

Информация об авторах

Аксень Эрнест Маврициевич – доктор экономических наук, профессор; профессор кафедры математических методов в экономике, Белорусский государственный экономический университет, e-mail: eaksen@mail.ru

Читая Гигла Отарович – доктор экономических наук, доцент; заведующий кафедрой математических методов в экономике, Белорусский государственный экономический университет, e-mail: chitaya_g@bseu.by

Шишко Ольга Владимировна – ассистент кафедры математических методов в экономике, Белорусский государственный экономический университет, e-mail: shishko-olga@mail.ru

Information about the authors

Aksen E. – Grand PhD in Economic sciences, Professor; professor at the Department of Mathematical Methods in Economics, Belarusian State Economic University, e-mail: eaksen@mail.ru

Chitaya G. – Grand PhD in Economic sciences, Associate Professor; Head of the Department of Mathematical Methods in Economics, Belarusian State Economic University, e-mail: chitaya_g@bseu.by

Shishko O. – Assistant at the Department of Mathematical Methods in Economics, Belarusian State Economic University, e-mail: shishko-olga@mail.ru

Статья поступила в редколлегию 27.10.2021

Received by editorial board 27.10.2021