

Доказательство. Необходимость. Пусть (4) обладает сильной изохронностью. Учитывая необходимые условия изохронности 1-го порядка, полученные в [2, с. 147], и лемму 5 из [1], получим условия (5).

Достаточность. Пусть для (4) выполняется условие (5₁). В качестве F в формуле (3) берем $F = 2a_{20}x$. Легко видеть, что при этом выполняется условие (3). Последнее доказывает, что система (4) обладает сильной изохронностью при выполнении условия (5₁).

Аналогичным образом проверяются и остальные случаи. Теорема доказана.

Пусть, наконец, имеется система Гамильтона вида

$$\begin{aligned} x &= -y - P_2(x, y) - P_3(x, y) \equiv P(x, y), & P'_x &\equiv -Q'_y, \\ y &= x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) \equiv Q(x, y), \end{aligned} \quad (6)$$

В работе [3] указаны необходимые и достаточные условия наличия в начале координат системы (6) изохронного центра 1-го порядка. Окажется, что эти условия являются необходимыми и достаточными для изохронности 2-го порядка системы (6).

Отметим далее, что система (6) обладает сильной изохронностью только в том случае, когда она имеет вид $\dot{x} = -y - ax^2$, $\dot{y} = x + 2axy + 2a^2x^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденок А. Е.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5.
2. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев, 1976.
3. Касим Мухамед Аль-Хайдер.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 63.

Поступила в редакцию
30.04.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 518:517.948

ХО ХАК ЫНГ

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД ХОРД

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0, \quad (1)$$

где F — нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в пространство Y того же типа.

Рассмотрим итерационный процесс приближения к решению уравнения (1)

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n [F(x_n, x_{n-1})]^{-1} F(x_n), \quad (2)$$

который мы назовем релаксационным методом хорд.

При $\alpha_n \equiv 1$ мы получим известный метод хорд, который был рассмотрен в [1], где доказана теорема о сходимости процесса при условиях, аналогичных условиям Л. В. Канторовича [2].

В данной работе рассматривается метод (2), доказывается теорема о сходимости и предлагается алгоритм выбора α_n .

Теорема. Пусть $F: X \rightarrow Y$ — нелинейный оператор, действующий из шара S пространства X в банахово пространство Y . В шаре $S = \{x: \|x - x_1\| \leq r\}$ начальные приближения x_0, x_1 и оператор F удовлетворяют следующим условиям:

1) существует $[F(x', x'')]^{-1}$ для всех $x', x'' \in S$, причем $\|[F(x', x'')]^{-1}\| \leq B$;

2) $\|x_0 - x_1\| \leq \alpha_0 B \|F(x_0)\|$, $\|F(x_1)\| \leq \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \|F(x_0)\|$, $0 < \alpha_0 \leq 1$, $2B \|F(x_0)\| \leq r$;

3) $\|F(x', x'', x''')\| \leq K$ для всех $x', x'', x''' \in S$;

4) $\alpha_n = \min \left(1, \frac{1}{2h_n}\right)$, где $h_n = KB^2 (\|F(x_n)\| + \|F(x_{n-1})\|)$.

Тогда последовательность $\{x_n\}$, построенная по (2), определена в S , сходится, и предел этой последовательности x^* является решением уравнения (1).

Доказательство. Введем обозначение $\Omega_n = [F(x_n, x_{n-1})]^{-1}$. Докажем теорему по индукции. Сначала по x_0, x_1 построим x_2

$$x_2 = x_1 - \alpha_1 \Omega_1 F(x_1). \quad (3)$$

Покажем, что можно выбрать α_1 так, чтобы $x_2 \in S$, причем $0 < \alpha_1 \leq 1$. Оценим $\|x_2 - x_1\| \leq \alpha_1 \|\Omega_1\| \|F(x_1)\| \leq \alpha_1 B \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \|F(x_0)\|$. Отсюда очевидно $x_2 \in S$, если $0 < \alpha_1 \leq 1$. Далее покажем, что для x_2 справедливо соотношение

$$\|F(x_2)\| \leq \left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right) \|F(x_1)\|. \quad (4)$$

Имеем $F(x_2) = F(x_2) - F(x_1) - F(x_1, x_0)(x_2 - x_1) + F(x_1) + F(x_1, x_0) \times (x_2 - x_1)$.

Используя интерполяционную формулу Ньютона для $F(x)$ и (3), получим: $\|F(x_2)\| \leq \|F(x_2, x_1, x_0)\| \|x_2 - x_1\| \|x_2 - x_0\| + (1 - \alpha_1) \|F(x_1)\|$. Имеем также $\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \alpha_1 B \|F(x_1)\| + \alpha_0 B \|F(x_0)\| \leq \alpha_1 B (\|F(x_1)\| + \|F(x_0)\|)$, где $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1$, $\|x_2 - x_1\| \leq \alpha_1 B \|F(x_1)\|$. Следовательно, $\|F(x_2)\| \leq KB^2 \alpha_1^2 \|F(x_1)\| (\|F(x_1)\| + \|F(x_0)\|) + (1 - \alpha_1) \|F(x_1)\| = [h_1 \alpha_1^2 + (1 - \alpha_1)] \|F(x_1)\|$. Отсюда следует соотношение (4).

Предположим теперь, что $x_k \in S$, $k = \overline{1, n}$ и для них справедливы оценки

$$\|F(x_k)\| \leq \left(1 - \frac{\alpha_{k-1}}{2}\right) \|F(x_{k-1})\|, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Покажем, что x_{n+1} , построенное по (2), также принадлежит шару S , и справедлива оценка

$$\|F(x_{n+1})\| \leq \left(1 - \frac{\alpha_n}{2}\right) \|F(x_n)\|. \quad (6)$$

Имеем $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha_n \|\Omega_n\| \|F(x_n)\| \leq \alpha_n B \|F(x_n)\| \leq \alpha_n B \left(1 - \frac{\alpha_{n-1}}{2}\right) \times \|F(x_{n-1})\| \leq \dots \leq \alpha_n B \|F(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right)$, $\|x_{n+1} - x_1\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_{k+1} - x_k\| \leq B \|F(x_0)\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right)$. Заметим, что последовательность

$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right)$, где α_i — вещественные числа, монотонно возрастающая и ограничена 2 (см. [3]). Следовательно, $\|x_{n+1} - x_1\| \leq 2B \|F(x_0)\| \leq r$, т. е. $x_{n+1} \in S$. Для получения оценки (6) имеем $F(x_{n+1}) = F(x_{n+1}) - F(x_n) - F(x_n, x_{n-1})(x_{n+1} - x_n) + F(x_n, x_{n-1})(x_{n+1} - x_n) + F(x_n)$, отсюда $\|F(x_{n+1})\| \leq \|F(x_{n+1}, x_n, x_{n-1})\| \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - x_{n-1}\| + (1 - \alpha_n) \|F(x_n)\| \leq KB^2 \alpha_n \|F(x_n)\| (\alpha_n \|F(x_n)\| + \alpha_{n-1} \|F(x_{n-1})\|) + (1 - \alpha_n) \|F(x_n)\|$.

Заметим, что из условия 4) и соотношения (5) нетрудно показать, что $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$ и, следовательно, $\|F(x_{n+1})\| \leq KB^2 \alpha_n^2 \|F(x_n)\| (\|F(x_n)\| + \|F(x_{n-1})\|) + (1 - \alpha_n) \|F(x_n)\|$ или $\|F(x_{n+1})\| \leq [\alpha_n^2 h_n + (1 - \alpha_n)] \|F(x_n)\| \leq \left(1 - \frac{\alpha_n}{2}\right) \|F(x_n)\|$, т. е. получили оценку (6).

Итак, мы доказали, что последовательность $\{x_n\}$ можно продолжить. Нам остается доказать, что она сходится и ее предел является решением уравнения (1). Оценим

$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left[B \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right) \right] \|F(x_0)\| \leq$
 $\leq B \|F(x_0)\| (S_{n+p-1} - S_{n-1})$. В силу сходимости последовательности $\{S_n\}$ и полноты пространства X следует сходимость последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. То, что x^* является решением уравнения (1), сле-

дует из соотношения $\|F(x_n)\| \leq \|F(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right)$ предельным переходом при $n \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергеев А. С.— Сибирский матем. ж., 1961, т. 2, № 2.
2. Канторович Л. В.— Труды Математического института имени В. А. Стеклова, 1949, т. 27, с. 104.
3. Мадорский В. М.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1979, № 3, с. 16.

Поступила в редакцию
30.04.82.

Кафедра численных методов
и программирования

УДК 519.6 : 536.25

В. К. ПОЛЕВИКОВ

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СЕТКИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ

Одна из проблем, возникающих при численном исследовании конвективных явлений,— проблема точности результатов в режиме формирующегося пограничного слоя. Обычная процедура увеличения числа сеточных узлов становится в этих условиях либо невозможной, либо нежелательной. Поэтому точность решения повышают за счет улучшения аппроксимационных свойств разностной задачи [1—4] и путем неравномерного распределения узлов на сетке в зависимости от градиента скорости (температуры) [1, 5, 6]. Неравномерная сетка, как правило, строится интуитивно (либо на основании уже имеющейся информации о структуре искомого решения) и не корректируется при счете. В данной работе предлагается простой алгоритм автоматического конструирования неравномерной сетки в процессе решения задачи.

Сначала рассмотрим одномерный случай. Пусть $v = v(x)$ — скорость движения жидкости, определяемая в результате решения одномерной задачи конвекции на отрезке $a \leq x \leq b$. Будем считать, что $x_0 = a$ и $x_N = b$ — граничные узлы сетки, введенной в области определения задачи; N — заданное число разбиений сетки. Требуется распределить внутренние узлы $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ так, чтобы их плотность изменялась согласованно с величиной скорости. Для этого каждому шагу $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, N}$ поставим в соответствие разностное число Рейнольдса [7] $R_i = 0,5(x_i - x_{i-1})(|v_{i-1}| + |v_i|)/2$, где $v_i = v(x_i)$ и пусть $|v_{i-1}| + |v_i| \neq 0$, и потребуем выполнения условий

$$R_i = R_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (1)$$

Отсюда получаем разностную задачу для нахождения $x_1, \dots, x_{N-1}$:

$$(|v_{i-1}| + |v_i|)(x_i - x_{i-1}) = (|v_i| + |v_{i+1}|)(x_{i+1} - x_i), \quad (2)$$

$$i = \overline{1, N-1}; \quad x_0 = a, \quad x_N = b.$$

Решение задачи (2) можно организовать в виде следующего итерационного процесса:

$$(|v_{i-1}^{(s)}| + |v_i^{(s)}|)x_{i-1}^{(s+1)} - (|v_{i-1}^{(s)}| + 2|v_i^{(s)}| + |v_{i+1}^{(s)}|)x_i^{(s+1)} + (|v_i^{(s)}| + |v_{i+1}^{(s)}|)x_{i+1}^{(s+1)} = 0,$$