УДК 517.925.12

КАСИМ МУХАМЕД АЛЬ-ХАЙДЕР

ОБ ИЗОХРОННОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДВУМЕРНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = -y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — голоморфные в окрестности начала координат функции, начинающиеся с членов степени $\geqslant 2$. В дальнейшем всегда предполагаем, что (1) имеет в $O(0, 0)$ центр.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ изображающие точки кривых центра лежат на одном и том же радиусе-векторе $\overrightarrow{OM}$ точки M границы области центра, составляющим с осью x-ов угол φ_0. Будем говорить, что система (1) обладает изохронностью 2-го порядка, если все изображающие точки, лежащие при $t = t_0$ на радиусе-векторе $\overrightarrow{OM}$, изменяют свой полярный угол φ_0 на угол $\varphi_0 + \pi$ за одно и тоже время $t = t_0 + \pi$. Если $\varphi_0 = -\pi/2$, то система (1) обладает сильной изохронностью [1. с. 815].

Теорема 1. Если для системы (1) выполняется условие $\ddot{x} + x \equiv 0$, то она обладает сильной изохронностью.

Для доказательства теоремы достаточно продифференцировать первое уравнение системы (1) по t, а затем воспользоваться теоремой 1 из [1].

Пусть теперь система (1) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\dot{x} = -y - \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k+1}(x, y) \equiv f_1(x, y), \\ \dot{y} = x + \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k+1}(x, y) \equiv \varphi_1(x, y),\end{gathered} \tag{2}$$

где P_{2k+1}, Q_{2k+1} — полиномы относительно x и y степени $2k+1$.

Теорема 2. Если система (2) имеет в начале координат изохронный центр, то она обладает и сильной изохронностью.

Справедливость теоремы вытекает из следующих соображений: в соответствии с леммой 2 [1] можно показать, что для функции φ_1 из системы (2) имеет место представление

$$\varphi_1 = \frac{x + xF^2 - (2F + xF'_x - f'_{1x}) f_1}{xF'_y - f'_{1y}}, \tag{3}$$

где $F = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}(x, y)$, $f_{2k}(x, y) = \sum_{i+j=2k} c_{ij}x^i y^j$. Тогда, если воспользоваться теоремой 1 [1], то мы и придем к утверждению теоремы.

З а м е ч а н и е. Из теоремы 2 следует, в частности, что система вида $\dot{x} = -y - P_3(x, y)$, $\dot{y} = x + Q_3(x, y)$ обладает сильной изохронностью тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одна из трех серий условий, указанных, например, в [2, с. 168].

Рассмотрим, далее, полиномиальную систему вида

$$\dot{x} = -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad \dot{y} = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \tag{4}$$

Теорема 3. Для того чтобы система (4) обладала сильной изохронностью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась одна из следующих серий условий:

$$\begin{aligned}
&1.\ b_{20} = a_{11} = b_{02} = 0,\ a_{02} + a_{20} = 0,\ b_{11} = 2a_{20}. \\
&2.\ a_{02} = b_{20} = 0,\ b_{11} = a_{20},\ b_{02} = a_{11}. \\
&3.\ a_{11} = a_{02} = b_{20} = b_{02} = 0,\ b_{11} = 4a_{20}. \\
&4.\ a_{11} = b_{20} = b_{02} = 0,\ a_{20} = -4a_{02},\ b_{11} = -2a_{02}. \\
&5.\ a_{20} = b_{11} = a_{02} = 0,\ a_{11} = -2b_{20},\ b_{02} = -4b_{20}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть (4) обладает сильной изохронностью. Учитывая необходимые условия изохронности 1-го порядка, полученные в [2, с. 147], и лемму 5 из [1], получим условия (5).

Достаточность. Пусть для (4) выполняется условие (5_1). В качестве F в формуле (3) берем $F = 2a_{20}x$. Легко видеть, что при этом выполняется условие (3). Последнее доказывает, что система (4) обладает сильной изохронностью при выполнении условия (5_1).

Аналогичным образом проверяются и остальные случаи. Теорема доказана.

Пусть, наконец, имеется система Гамильтона вида

$$\begin{aligned} x &= -y - P_2(x, y) - P_3(x, y) \equiv P(x, y), \\ y &= x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) \equiv Q(x, y), \end{aligned} \qquad P'_x \equiv -Q'_y. \tag{6}$$

В работе [3] указаны необходимые и достаточные условия наличия в начале координат системы (6) изохронного центра 1-го порядка. Оказывается, что эти условия являются необходимыми и достаточными для изохронности 2-го порядка системы (6).

Отметим далее, что система (6) обладает сильной изохронностью только в том случае, когда она имеет вид $\dot{x} = -y - ax^2$, $\dot{y} = x + 2axy + 2a^2x^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденок А. Е.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5.
2. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев, 1976.
3. Касим Мухамед Аль-Хайдер.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 63.

Поступила в редакцию
30.04.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 518 : 517.948

ХО ХАК ЫНГ

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД ХОРД

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где F — нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в пространство Y того же типа.

Рассмотрим итерационный процесс приближения к решению уравнения (1)

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n [F(x_n, x_{n-1})]^{-1} F(x_n), \tag{2}$$

который мы назовем релаксационным методом хорд.

При $\alpha_n \equiv 1$ мы получим известный метод хорд, который был рассмотрен в [1], где доказана теорема о сходимости процесса при условиях, аналогичных условиям Л. В. Канторовича [2].

В данной работе рассматривается метод (2), доказывается теорема о сходимости и предлагается алгоритм выбора α_n.

Теорема. Пусть $F: X \to Y$ — нелинейный оператор, действующий из шара S пространства X в банахово пространство Y. В шаре $S = \{x: \|x - x_1\| \leqslant r\}$ начальные приближения x_0, x_1 и оператор F удовлетворяют следующим условиям:

1) существует $[F(x', x'')]^{-1}$ для всех $x', x'' \in S$, причем $\|[F(x', x'')]^{-1}\| \leqslant B$;

2) $\|x_0 - x_1\| \leqslant \alpha_0 B \|F(x_0)\|$, $\|F(x_1)\| \leqslant \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \|F(x_0)\|$, $0 < \alpha_0 \leqslant 1$, $2B\|F(x_0)\| \leqslant r$;

3) $\|F(x', x'', x''')\| \leqslant K$ для всех $x', x'', x''' \in S$;

4) $\alpha_n = \min\left(1, \frac{1}{2h_n}\right)$, где $h_n = KB^2(\|F(x_n)\| + \|F(x_{n-1})\|)$.