

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин А. С., Певзнер Л. В., Скриган Н. И.—Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1981, № 1, с. 5.
2. Никитин А. С., Певзнер Л. В., Скриган Н. И.—Препринт № 17(118) Института математики АН БССР, 1981, вып. 17, 20 с.
3. Эрли Д. Языки и автоматы.—М., 1975, с. 47.
4. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део О. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика.—М., 1980, с. 352.
5. Pfaltz J. L., Rozenfeld A.—Proc. Int. Joint Conf. Artificial Intelligence 1st, Washington, D. C., 1969, May, p. 609.

Поступила в редакцию
25.06.82.

Кафедра математического
обеспечения ЭВМ

УДК 517.958 : 537.212

В. Т. ЕРОФЕЕНКО, Г. Ч. ШУШКЕВИЧ

РАСЧЕТ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ДЛЯ ПАРАБОЛОИДА СО СФЕРИЧЕСКИМИ СЕГМЕНТАМИ

В настоящее время в печати опубликовано большое количество работ, в которых с помощью теории парных сумматорных и интегральных уравнений решены задачи математической физики для одного тела, представляющего собой неполную координатную поверхность (см. библиографию в [1, 2]). Решение задач для двух тел, одно из которых является полной, а второе неполной координатной поверхностью, представлено в литературе недостаточно полно [3, 4].

В данной статье выведены теоремы сложения, связывающие сферические и параболоидальные гармонические функции, с помощью которых решена задача электростатики для бесконечного параболоида со сферическим сегментом. Полученные результаты могут найти применение при проектировании электронно-оптических устройств [4].

Рассмотрим систему (рис. 1), состоящую из бесконечного параболоида Γ , внутри которого помещен тонкий сферический сегмент S , расположенный на поверхности сферы S_1 радиуса a с центром в точке O . В точке O введем сферическую систему координат $\{r, \theta, \varphi\}$ и параболоидальную систему $\{\gamma, \delta, \varphi\}$, определяемую соотношениями $x = c\gamma\delta \cos \varphi$, $y =$

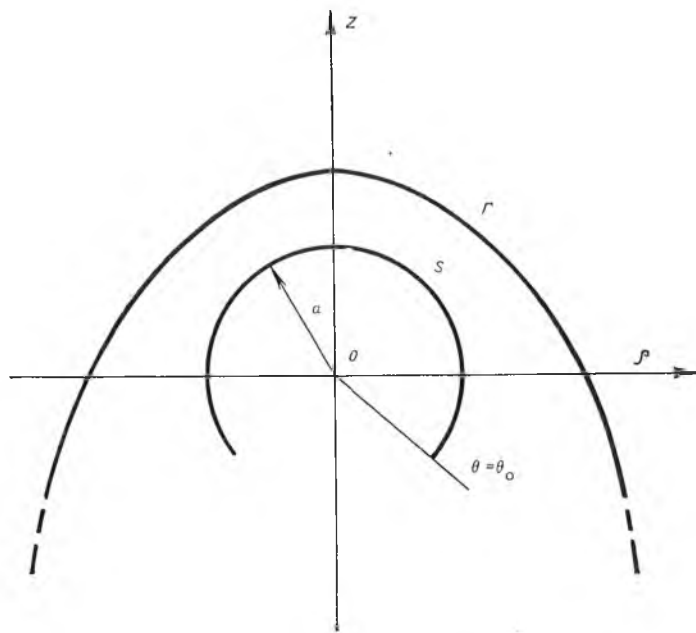


Рис. 1. Геометрия задачи

$= c\gamma\delta \sin \varphi$, $z = \frac{c}{2}(\gamma^2 - \delta^2)$, $0 \leq \gamma$, $\delta < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Поверхности Γ и S опишем так: $S = \{r = a, 0 \leq \Theta \leq \Theta_0 < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, $\Gamma = \{\gamma = \gamma_0, 0 \leq \delta < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Внутреннюю область D ($0 \leq \gamma < \gamma_0$) параболоида Γ разобьем сферой S_1 на две части W_1 ($r < a$) и $W_2 = D \setminus W_1$.

Ставится следующая краевая задача: требуется определить гармоническую функцию $U(M)$ в области $D \setminus S$, непрерывную в $\bar{D}$, для которой выполнены граничные условия:

$$U|_{\Gamma} = 0 \quad (1), \quad U|_S = V \quad (V = \text{const}) \quad (2)$$

и условие на бесконечности

$$U(M) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Решение краевой задачи ищем в виде суперпозиции частных решений уравнения Лапласа (4), (5), для которых выполнено условие (3)

$$U(M) = \begin{cases} U_1 & \text{в } W_1, \\ U_2 + U_3 & \text{в } W_2, \end{cases}$$

$$\text{где } U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \Theta) \quad (r < a), \quad U_2 = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \Theta) \quad (r >$$

$$> a), \quad U_3 = \int_0^{\infty} Z(t) \frac{I_0(\gamma t)}{I_0(\gamma_0 t)} J_0(\delta t) dt \quad (\gamma < \gamma_0), \quad I_0, J_0 — \text{цилиндрические функции Бесселя; } P_n — \text{полиномы Лежандра. Неизвестные коэффициенты } x_n, y_n \text{ и функция } Z(t) \text{ подлежат определению из граничных условий.}$$

В дальнейшем воспользуемся теоремами сложения, связывающими частные решения уравнения Лапласа, полученные методом разделения переменных в сферических координатах [5]

$$U_{mn}(r, \Theta, \varphi) = r^n P_n^m(\cos \Theta) e^{im\varphi}, \quad \tilde{U}_{mn}(r, \Theta, \varphi) = r^{-n-1} P_n^m(\cos \Theta) e^{im\varphi} \quad (4)$$

и параболоидальных координатах [1]

$$\begin{aligned} U_m(\gamma, \delta, \varphi; c, t) &= J_m(\gamma t) J_m(\delta t) e^{im\varphi}, \\ \tilde{U}_m(\gamma, \delta, \varphi; c, t) &= K_m(\gamma t) J_m(\delta t) e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Имеют место формулы ($\gamma_2 > 0$).

$$\tilde{U}_{mn}(r_1, \theta_1, \varphi) = \int_0^{\infty} \frac{2(-1)^m t^{n+1}}{c(2bc)^{\frac{n}{2}}(n-m)!} J_n\left(t \sqrt{\frac{2b}{c}}\right) \tilde{U}_m(\gamma_2, \delta_2, \varphi; c, t) dt, \quad (6)$$

$$U_m(\gamma_2, \delta_2, \varphi; c, t) = \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{\frac{n}{2}}}{(n+m)!(2bc)^{\frac{n}{2}}} J_n\left(t \sqrt{\frac{2b}{c}}\right) U_{mn}(r_1, \theta_1, \varphi), \quad (7)$$

где начало O_2 системы $\{\gamma_2, \delta_2, \varphi\}$ сдвинуто на величину b (в положительном направлении оси z) относительно начала O_1 системы $\{r_1, \theta_1, \varphi\}$.

Эти формулы упрощаются, если начала O_1 и O_2 совпадают, $m=0$ и константа $c=1$:

$$r^{-n-1} P_n(\cos \theta) = \int_0^{\infty} \frac{4t^{2n+1}}{2^{n+1} n!^2} K_0(\gamma t) J_0(\delta t) dt, \quad \gamma > 0, \quad (8)$$

$$I_0(\gamma t) J_0(\delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!^2} r^n P_n(\cos \theta). \quad (9)$$

Для доказательства воспользуемся теоремами сложения, связывающими цилиндрические и параболоидальные гармонические функции [6, с. 724 и 733]

$$J_n(\lambda \rho) e^{\lambda z + i n \varphi} = \int_0^{\infty} \frac{t}{c \lambda} e^{-\frac{t^2}{2c \lambda}} U_n(\gamma, \delta, \varphi; c, t) dt, \quad (10)$$

$$\tilde{U}_m(\gamma, \delta, \varphi; c, t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{t^2}{2c\lambda} - \lambda z} J_m(\lambda \rho) e^{im\varphi} d\lambda \quad (z > 0, t > 0). \quad (11)$$

Домножим (10) на γ^{-n} и перейдем к пределу $\gamma \rightarrow 0$, учитывая, что $z \approx -\frac{c}{2} \delta^2$, $\rho \approx c\gamma\delta$. Окончательно

$$\lambda^{n+1} e^{-b\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{t^{n+1}}{c(2bc)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2c\lambda}} J_n\left(t \sqrt{\frac{2b}{c}}\right) dt \quad \left(b = \frac{c}{2} \delta^2\right). \quad (12)$$

Пусть имеет место (7): $U_m(\gamma_2, \delta_2, \varphi; c, t) = \sum_{n=|m|}^{\infty} g_{mn}(t) U_{mn}(r_1, \theta_1, \varphi)$.

Воспользуемся (10) и [7], тогда $J_m(\lambda \rho_2) e^{\lambda z_2 + im\varphi} = e^{-\lambda b} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^n}{(n+m)!} U_{mn}(r_1,$

$\theta_1, \varphi)$. Приравняем коэффициенты при U_{mn} , откуда $\frac{(-1)^m}{(n+m)!} \lambda^n e^{-\lambda b} =$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t}{c\lambda} e^{-\frac{t^2}{2c\lambda}} g_{mn}(t) dt. \text{ Из (12) следует } g_{mn}(t) = \frac{(-1)^m t^n}{(n+m)! (2bc)^{\frac{n}{2}}} \times$$

$\times J_n\left(t \sqrt{\frac{2b}{c}}\right)$. Для доказательства формулы (6) подставим интеграл (11) в (6). Переставляя знаки интегрирования и учитывая (12), получим известную теорему сложения, представляющую сферическую гармоническую функцию через цилиндрическую.

Теперь удовлетворим граничному условию (1). Для этого представим функцию U_2 через параболаидальные гармонические функции с помощью (8)

$$U_2 = \int_0^{\infty} M(t) K_0(\gamma t) J_0(\delta t) dt, \quad M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1} a^{n+1}}{2^{n-1} n!^2} y_n. \quad (13)$$

В результате граничное условие (1) эквивалентно соотношению

$$Z(t) + M(t) K_0(\gamma_0 t) = 0. \quad (14)$$

Далее удовлетворим граничному условию (2). Согласно формуле (9) функция U_3 записывается в виде ряда по сферическим гармоническим функциям

$$U_3 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n r^n P_n(\cos \theta), \quad L_n = \frac{1}{2^n n!^2} \int_0^{\infty} \frac{Z(t) t^{2n}}{I_0(\gamma_0 t)} dt. \quad (15)$$

Граничное условие (2), непрерывность потенциала U на сфере S_1 и нормальной производной $\frac{\partial}{\partial n} U$ на $S_1 \setminus S$ приводят к парному сумматорному уравнению

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (V \delta_{0n} - a^n L_n) P_n(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) y_n P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \quad (16)$$

Решаем функциональные уравнения (16) методом, предложенным в работе [8], получаем

$$y_n = \sum_{s=0}^{\infty} (V \delta_{0s} - a^s L_s) Q_{sn}(\theta_0), \quad (17)$$

$$\text{где } Q_{sn}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-s)\theta_0}{n-s} + \frac{\sin(n+s+1)\theta_0}{n+s+1} \right], \quad \frac{\sin(n-s)\theta_0}{n-s} \Big|_{n=s} = \theta_0,$$

δ_{0n} — символ Кронекера. На основании соотношения (14) и представлений (13) для $M(t)$ и (15) для L_n уравнение (17) приводится к виду

$$y_n - \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} y_k = V Q_{0n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где $a_{kn} = \frac{\pi}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+2k+1)!}{16^{k+s} k!^2 s!^2} B_{2s+2n+1} Q_{sn}(\theta_0) \mu^{k+s+1}$, $\mu = \frac{2a}{\gamma_0^2} < 1$, $B_n = \frac{2^{n+1}}{\pi n!} \int_0^{\infty} \frac{K_0(x)}{I_0(x)} x^n dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Нетрудно показать, что уравнение (18) является бесконечной системой линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывной формой и правой частью из

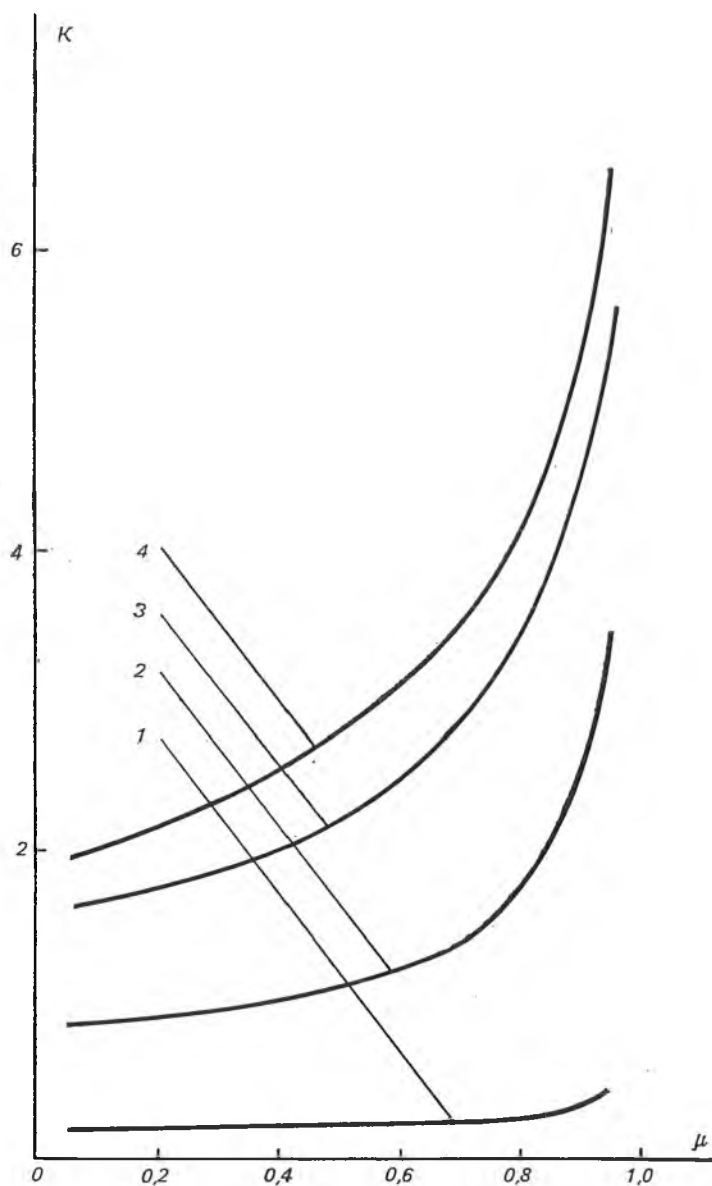


Рис. 2. Зависимость конденсаторной емкости K от параметра μ :
1 — $\theta_0 = \pi/16$; 2 — $\theta_0 = \pi/4$; 3 — $\theta_0 = \pi/2$; 4 — $\theta_0 = 3\pi/4$

l_2 . Согласно единственности поставленной краевой задачи [5] система (18) имеет единственное решение из l_2 и разрешима численно методом редукции [9].

Заряд на сферическом сегменте вычисляется по формуле $Q = 2\pi\epsilon a \left[(1 - \cos \theta_0) y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n (P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0)) \right]$, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

Произведен расчет конденсаторной емкости $K = Q/2\pi\epsilon a V$ данной физической системы с использованием табулированных интегралов B_n [10] на ЭВМ ЕС-1022. На рис. 2 показана зависимость K от параметра $\mu = 2a/\gamma_0^2$ при некоторых значениях угла раствора θ_0 сферического сегмента S . В частности, $K = 2,2515$ ($\mu = 0,5$, $\theta_0 = \pi/2$), $K = 3,7046$ ($\mu = 0,7$, $\theta_0 = 31\pi/32$), $K = 1,0008$ ($\mu = 0,9$, $\theta_0 = \pi/8$).

Заметим, что разработанная методика может быть применена, когда внутри бесконечного параболоида находится несколько тонких сферических сегментов. В этом случае используются теоремы сложения [11], связывающие сферические гармонические функции, отнесенные к центрам сегментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. — Л., 1977, с. 220.
2. Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 28, № 4, с. 663.
3. Ерофеев В. Т. — ЖТФ, 1982, т. 52, № 3, с. 412.
4. Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г. Расчет электрической емкости. — Л., 1981, с. 288.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М., 1972, с. 735.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962, с. 1100.
7. Ерофеев В. Т. — Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1972, № 4, с. 42.
8. Виноградов С. С., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. — Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 1, с. 80.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М. — Л., 1962, с. 708.
10. Ling C. B., Lin J. — Math. comput., 1972, v. 26, p. 529.
11. Caola M. J. — J. Phys., 1978, v. A11, № 2, p. 23.

Поступила в редакцию
08.09.82.

Кафедра уравнений
математической физики

УДК 681.3.06

Г. А. ДРОБУШЕВИЧ, П. В. ГЛЯКОВ,
И. В. КОМАРОВСКИЙ, П. П. КОЖИЧ

К ИТОГАМ ВСЕСОЮЗНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

По поручению Министерства высшего образования СССР и ЦК ВЛКСМ в конце декабря 1982 г. в БГУ имени В. И. Ленина была проведена Всесоюзная олимпиада «Студент и научно-технический прогресс» по ЭВМ и программированию. В олимпиаде приняли участие 14 команд союзных республик и г. Москвы. Каждая команда состояла из 4 участников и преподавателя — руководителя команды. Отличных успехов добились представители белорусской школы программирования — студенты факультета прикладной математики Белгосуниверситета имени В. И. Ленина. Николай Демеш, Галина Пудловская и Евгений Терехов заняли соответственно 1—3 места в личном зачете, а команда университета (все ФПИМ) уверенно заняла первое место. Большая заслуга в подготовке ее к олимпиаде руководителя команды — старшего преподавателя кафедры общего программирования И. И. Млынчика.