

ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Общая теория гиперраспределений построена в работе Э. Д. Алшибая [1]. Настоящая статья посвящена установлению связи этой теории с геометрией поля основных элементов, развитой в работе [2]. При изложении будем пользоваться обозначениями [3].

1. Основным пространством называется G -пространство $O = \{z = g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x & \bar{a} & x \end{pmatrix} \mid g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & T \end{pmatrix}, \bar{a} \in R^n, T \in GL(n, |R)|\}$.

Здесь G — группа преобразований n -мерного аффинного пространства, а x — элемент пространства пар $X = \{x = T\varepsilon T^{-1} \mid T \in GL(n, |R)|\}$. С основным пространством связаны гладкие расслоения:

а) $\xi = (0, \pi, A_n)$, где A_n — аффинное пространство, а проекция π — полиномиальный морфизм, $\pi(z) = E - z^2 \in A_n$.

б) $\eta = (X, \pi_0, G_r)$, где G_r — грассманово многообразие m -мерных подпространств n -мерного векторного пространства $\vec{A}_n$, а проекция π_0 является специальным морфизмом $\pi_0: x \rightarrow \pi_0(x) = M_x = \{\bar{x} \in \vec{A}_n \mid y\bar{x} = 0\}$.

Здесь $y = \frac{1}{2}(E + x)$ — проектор на k -мерное подпространство $\vec{A}_n$. В случае $k = 1$ имеем $y = \bar{e}\xi', \langle \xi' \bar{e} \rangle = 1, \bar{e} \in \vec{A}_n, \xi' \in \vec{A}_n^*$.

2. Распределение в аффинном пространстве. *Определение.* Распределением в открытой части U аффинного пространства A_n называется гладкое отображение $\sigma: U \rightarrow G_r(m): a \rightarrow M_a$, где $G_r(m)$ — грассманово многообразие m -мерных подпространств n -мерного векторного пространства.

Отображение σ определит отображение $\sigma_1: a \rightarrow (a, M_a)$, где (a, M_a) — пунктированная m -мерная плоскость.

Из общей теории пространств пар, изложенной в статье [3], следует, что касательное расслоение $T(X)$, где X — пространство пар, разбивается на инвариантные классы, каждый из которых выделяется полиномиальным уравнением. Инвариантная часть $K = \{(y, \omega) \in T(X) \mid y\omega = 0\}$, $\omega \in Ty(X)$ отличается тем, что принадлежность к этому классу элемента (y, ω) устанавливается при изучении поведения только $\text{Ker } y$.

Если задано распределение отображением σ , то можно определить сечение s в расслоении $\eta|_{\sigma(U)}$, и тогда определится сечение $\rho = s_0\sigma: U \rightarrow X: a \rightarrow y(a)$ в расслоении $\xi|_U$. Нетрудно видеть, что условие $y\omega$ выполняется независимо от задания сечения s и определяется только распределением σ , и это условие можно записать в виде

$$y\omega(\bar{v}) = 0. \quad (1)$$

Заметим, что условие $y\omega = 0$ есть условие неопределенности фокальных точек в $\text{Ker } y$ (см. [2]).

В случае $k = 1$ подпространство $M_a = \sigma(a)$ задается ковекторным направлением $\{\lambda\xi'\}$, и условие (1) есть условие постоянства этого ковекторного направления (т. е. подпространства M_a) при смещении по кри-вой в направлении $\bar{v}$.

Отображение σ имеет образом ковекторное направление $\{\lambda\xi'\}$, и поэтому ядро дифференциала отображения σ определяется из уравнения $d\xi'(\bar{v}) = d(\bar{v})\xi'$, и это условие совпадает с условием (1), определенным для произвольного сечения $s: M_a \rightarrow y = \bar{e}\xi'$. Следуя Э. Д. Алшибая, выделим тот случай, когда решение уравнения (1) одномерно, т. е. когда отображение σ корегулярно, причем полученное в качестве решения направление не принадлежит подпространству $\sigma(a)$ для $\forall a \in U$. В этом случае в U определится векторное поле $\bar{v}(a)$, $a \in U$, которое вместе с самим распределением, заданным отображением σ , позволит задать сечение s в расслоении $\eta|_U$. Это сечение выделяется условием $y\omega(\text{Im } y) =$

$=0 \Leftrightarrow \text{Im } y = \{\lambda \bar{v}\}$. Кроме того, в силу корегулярности отображения σ , в U определится семейство одномерных подмногообразий, прообразов отображения σ . Вдоль каждой линии $a(t)$ этого семейства будут постоянными подпространства $\sigma(a(t))$, и эти линии будут интегральными линиями векторного поля $\bar{v}(a)$. Соответственно определится сечение в расслоении $\xi|U$ $s(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x(a)a & (x)a \end{pmatrix}$, где $x(a) = 2y(a) - E$, $y(a) = \bar{v}(a)\xi'(a)$, $\xi'(a)\bar{v}(a) = 1$. Здесь $\bar{v}(a)$ — решение уравнения (2).

3. Инвариантная связность гиперраспределения. Так как распределение σ , заданное отображением σ , определит и поле основных элементов, то в области U возникает структура почти произведения. Эта структура почти произведения позволит определить на основе тривиальной инвариантной связности в U индуцированную связность $\bar{\nabla}_x Y = y \nabla_x (yY) + (E - y) \nabla_x [(E - y)Y]$, и соответственно определится вторая квадратичная форма этой структуры $h(X, Y) = y \nabla_x (E - y)Y + (E - y) \nabla_x yY$, $y = \bar{e}\xi'$. Симметричность этой формы для горизонтальных векторов, для которых $(E - y)Y = Y$, $(E - y)X = X$, эквивалентна инволютивности горизонтального распределения, т. е. $h(X, Y) = h(Y, X) \Leftrightarrow [XY] = 0$. Это же условие, если использовать выражение для второй квадратичной формы, выведенное в статье [2], можно записать в виде $\omega(X)x(Y) = \omega(Y)x(X)$, $xX = -X$, $xY = -Y$.

4. Обобщенное отображение Бомпиани. Выбирая оснащение распределения условием $y\omega(\text{Im } y) = 0$, получим поле основных элементов. Выбирая далее $\bar{v} \in \bar{A}_n$, определим $\omega = \omega(\bar{v})$, и соответственно определяются фокальные точки в $\text{Ker } y$ из уравнений (см. [3])

$$\left. \begin{aligned} y[\bar{v} - \omega(\bar{v})\bar{x}] &= 0 \\ y\bar{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} y\bar{v} - (\bar{e}\xi')(\bar{d}\bar{e}(\bar{v})\xi' + \bar{e}d\xi'(\bar{v}))x &= 0 \\ \xi'\bar{x} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

и для определения фокальных точек получим только одно уравнение $\xi'\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} \in \text{Ker } y$. Исключая случай, когда $d\xi'(\bar{v}) = \rho(\bar{v})x$, т. е. случай, когда $y\omega(\bar{v}) = 0$, получим в $\text{Ker } y$ в качестве множества фокальных точек гиперподпространство. В результате получаем обобщенное отображение Бомпиани — Пантази.

$$\bar{v} \rightarrow \alpha(\bar{v}) = \{\bar{x} \in \text{Ker } y | y(\bar{v} - \omega(\bar{v})\bar{x}) = 0\}. \quad (2)$$

5. Запись условий в адаптированном репере. В случае, когда выбран подвижный репер, адаптированный полю основных элементов, т. е. когда $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\omega(\bar{v}) = \begin{pmatrix} \Theta & \omega_\alpha^n(\bar{v}) \\ -\omega_\beta^n(\bar{v}) & \Theta \end{pmatrix}$, где $\alpha = \overline{1, n-1}$, а i принимает значение n . В этом случае условие (2) эквивалентно условию $\omega_\alpha^n(\bar{v}) = 0$. Полагая $\omega_\alpha^n(\bar{v}) = L_{\alpha\beta} v^\beta + L_\alpha v^n$, получим $L_{\alpha\beta} v^\beta + L_\alpha v^n = 0$. Так как из этих условий должно однозначно определяться направление вектора $\bar{v} \in M_\alpha$ (в силу условия корегулярности отображения σ), то $|L_{\alpha\beta}| \neq 0$.

По предположению, вектор $\bar{v}$ не принадлежит M_α , что влечет $v^n \neq 0$, и можно нормировать координаты вектора так, чтобы $v^n = 1 \Rightarrow v^\alpha = L_\alpha$, $L_\alpha = L^{\beta\alpha} L_{\alpha\beta} (L^{\beta\alpha}) = (L_{\alpha\beta})^{-1}$. Условие инволютивности распределения эквивалентно симметричности второй квадратичной формы для горизонтальных векторных полей, и так как вторая квадратичная форма имеет вид $h(\bar{v}, \bar{v}_1) = \omega(\bar{v})x\omega$, то в адаптированном репере получим $h(\bar{v}, \bar{v}_1) = \omega_\alpha^n(\bar{v})\omega^\alpha = L_{\alpha\beta}\omega^\beta v^\beta$. Симметрия второй квадратичной формы приводит к условию $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$. Отображение Бомпиани — Пантази в адаптированном репере имеет вид $1 + \omega_\alpha^n(\bar{v})x^\alpha = 0 \Leftrightarrow 1 + (L_{i\alpha} v^\alpha + L_{in})x^i = 0$. Полученные результаты совпадают с аналогичными формулами [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алшпбая Э. Д.—Труды геометр. семинара, Ин-т науч. и техн. информ., 1974, т. 5, с. 169.
2. Ведерников С. В.—Дифференц. геометрия многообразий фигур.—Калнинград, 1979, вып. 10, с. 22.
3. Ведерников С. В. Геометрия пространства пар — Рукопись деп. в ВИНТИ, № 1954-80. Деп. от 15.4.80.

Поступила в редакцию
12.04.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 519.6

Н. П. ФЕДЕНКО, ХО ХАК ЫНГ

О СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СВЕРХКВАДРАТИЧНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Известно, что для решения нелинейного численного уравнения

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

метод Ньютона и метод Чебышева в случае простых корней имеют порядки сходимости соответственно 2 и 3. Интерполяционным аналогом метода Ньютона является метод хорд, сходящийся с порядком $0,5(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618$. Метод, предложенный В. А. Курчатовым [1],

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(2x_n - x_{n-1}) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

сходится с квадратичной скоростью. В данной работе исследуются интерполяционные аналоги дифференциальных методов, сходящихся с кубической скоростью.

Рассмотрим для решения уравнения (1) следующие двухшаговые итерационные методы. Пусть x_n, x_{n-1} — два последовательных приближения к решению уравнения (1). Введем обозначения: $y_n = 2x_n - x_{n-1}$, $\bar{y}_n = 3x_n - 2x_{n-1}$, $\bar{x}_{n-1} = 2x_{n-1} - x_n$, $A(x_n) = f(y_n, x_{n-1})$, $C(x_n) = f(x_n, x_{n-1}, y_n)$, $B(x_n) = A(x_n) - 0,5[f(x_n, x_{n-1}, y_n, \bar{x}_{n-1}) + f(x_n, y_n, x_{n-1}, \bar{y}_n)](x_n - x_{n-1})^2$, где $f(x', x'')$, $f(x', x'', x''')$, $f(x', x'', x''', x^{IV})$ — разделенные разности функции $f(x)$ соответственно первого, второго и третьего порядков.

Следующее приближение x_{n+1} находим по формуле

$$x_{n+1} = x_n - [B(x_n)]^{-1} \left[f(x_n) + \frac{C(x_n) f^2(x_n)}{A^2(x_n)} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

или по формуле

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - [A(x_n)]^{-1} f(\bar{x}_n), \quad (4)$$

где $\bar{x}_n = x_n - [A(x_n)]^{-1} f(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$

Известны следующие интерполяционные формулы численного дифференцирования по равноотстоящим узлам:

$$f'(x_n) = A(x_n) - \frac{1}{6} f'''(\xi_n)(x_n - x_{n-1})^2, \quad (5)$$

$$f''(x_n) = 2C(x_n) - \frac{1}{12} f^{(IV)}(\eta_n)(x_n - x_{n-1})^2, \quad (6)$$

$$f'(x_n) = B(x_n) + \frac{1}{30} f^{(V)}(\zeta_n)(x_n - x_{n-1})^4. \quad (7)$$

Метод (3) получен из метода Чебышева $x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} \left(f(x_n) + \frac{f''(x_n) f^2(x_n)}{2 [f'(x_n)]^2} \right)$ путем аппроксимации производных $f'(x_n)$, $f''(x_n)$ по формулам (5), (6), (7), а метод (4) получен из известного метода $x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} (f(x_n) + f(x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)))$, имеющего кубический порядок сходимости, заменой производной $f'(x_n)$ на $A(x_n)$.