

ДВЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Настоящая работа посвящена развитию метода решения граничных задач теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства, предложенного в [1]. Первая из рассматриваемых задач касается определения напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропного полупространства в случае задания на поверхности касательных усилий. Вторая задача посвящена определению напряжений и перемещений при специальном задании тангенциальных смещений на границе полупространства.

1. Первая граничная задача. Пусть упругое тело занимает область $D^+(z > 0)$, ограниченную плоскостью $S(z=0)$, S_1 — конечная область, $S_2 = S \setminus S_1$ — остальная часть плоскости S . Отнесем тело к цилиндрической системе координат ρ, θ, z .

Рассмотрим задачу со следующими граничными условиями:

$$\tau_{\rho z} = T(\rho), \sigma_z = 0 \text{ в } S_1, \tau_{\rho z} = 0, \sigma_z = 0 \text{ в } S_2, \quad (1.1)$$

где $T(\rho)$ — плотность распределения касательных усилий.

Для решения задачи воспользуемся формулами, полученными в [1]. Как известно из [1], при $n_0 = m_0 = 0$

$$\tau_{\rho z} = -\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} (n_k \Phi_k + m_k \Omega_k), \quad (1.2)$$

$$\sigma_z = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (n_k \Phi_k + m_k \Omega_k), \quad (1.3)$$

$$W = \left(\frac{a_{66}}{2} \gamma_k - a_{44} \right) \frac{\partial}{\partial z} (n_k \Phi_k + m_k \Omega_k), \quad (1.4)$$

индекс k ($k=1, 2$) в выражениях (1.2) — (1.4) собирательный, знак суммирования по которому опущен в целях краткости записи; n_k, m_k — произвольные коэффициенты; $\Phi_k = \Phi(x, y, \lambda_k z)$, $\Omega_k = \Phi(x, y, -\lambda_k z)$ — произвольные функции, удовлетворяющие уравнениям $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \Phi = 0$, $\xi = \pm \lambda_k z$, $\gamma_k = [(a_{11} + a_{12}) \lambda_k^2 - a_{13}] / a_{11}$, a_{ij} — упругие постоянные, λ_k — постоянные, выражающиеся через a_{ij} . Пусть n_k, m_k удовлетворяют соотношениям

$$n_1 + n_2 = 0, n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 = -1, m_1 + m_2 = 0, m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = -1, \quad (1.5)$$

тогда граничные условия для σ_z выполнены тождественно, а для $\tau_{\rho z}$ получаем следующую задачу:

$$\tau_{\rho z} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\varphi^+ - \varphi^-), \quad (1.6)$$

где $\varphi(xy\xi) = \frac{\partial \Phi(xy\xi)}{\partial \xi}$ и φ^+, φ^- — граничные значения функции φ со стороны областей $\xi > 0$ и $\xi < 0$.

Пусть $\varphi^+ - \varphi^- = \begin{cases} q(\rho) & \text{в } S_1 \\ 0 & \text{в } S_2, \end{cases}$ тогда из (1.1)

$$\frac{dq(\rho)}{d\rho} = T(\rho), \quad (1.7)$$

откуда

$$q(\rho) = \int_0^\rho T(r) dr + q(0). \quad (1.8)$$

Для осадки w на поверхности S получаем выражение

$$W = -a_1 \begin{cases} q(\rho) & \text{в } S_1 \\ 0 & \text{в } S_2. \end{cases} \quad (1.9)$$

Учитывая, что w непрерывная функция координат, получаем

$$q(a) = 0. \quad (1.10)$$

Окончательно для $q(\rho)$ получаем выражение

$$q(\rho) = - \int_{\rho}^a T(r) dr. \quad (1.11)$$

Тогда для w в области S_1 получаем следующее выражение:

$$w = a_1 \int_{\rho}^a T(r) dr, \quad (1.12)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}} (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) - \frac{(a_{11} - a_{12}) a_{13}}{a_{11}} - a_{44}.$$

Уравнение (1.12) может служить интегральным уравнением для определения $T(\rho)$ при заданной осадке w .

2. Смешанная граничная задача. Пусть тело по-прежнему занимает область $D^+(z > 0)$. Предположим, что полупространство покрыто тонкой пленкой, легко изгибающейся, но нерастяжимой.

Рассмотрим граничную задачу со следующими условиями:

$$u = v = 0, \sigma_z = -p(x, y) \text{ в } S_1, \quad u = v = \sigma_z = 0 \text{ в } S_2, \quad (2.1)$$

S_i — те же области, что и в пункте 1.

Согласно [1],

$$u = (a_{12} - a_{11}) \gamma_k \frac{\partial}{\partial x} (n_k \Phi_k + m_k \Omega_k), \quad (2.2)$$

$$v = (a_{12} - a_{11}) \gamma_k \frac{\partial}{\partial y} (n_k \Phi_k + m_k \Omega_k). \quad (2.3)$$

Здесь сохранены все обозначения пункта 1. Пусть теперь n_k и m_k удовлетворяют соотношениям:

$$n_1 \gamma_1 + n_2 \gamma_2 = 0, \quad n_1 + n_2 = -1, \quad m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 = 0, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad (2.4)$$

тогда, согласно (1.3) и (1.5), имеем

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi^-}{\partial \xi} = \begin{cases} -p(x, y) & \text{в } S_1 \\ 0 & \text{в } S_2 \end{cases}. \quad (2.5)$$

Это задача Неймана для функции $\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Phi^+}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \Phi^-}{\partial \xi}$ — значение производных со стороны областей $\xi > 0$ и $\xi < 0$, $\xi = \pm \lambda_k z$. Решение задачи (2.5) имеет вид

$$\Phi(x, y, \xi) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \xi^2}}. \quad (2.6)$$

Для осадки w на поверхности S получим выражение

$$w = \alpha_0 \cdot \iint_{S_1} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}, \quad (2.7)$$

где

$$\alpha_0 = - \frac{\left(\left(\frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}} \right) \left[\frac{a_{13}}{a_{11}} (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) - \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \right] - [a_{44} + \frac{a_{13}}{a_{11}} (a_{11} - a_{12})] \left(\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} \right) \right) a_{11}}{2\pi (a_{11} + a_{12}) (\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Достоверность полученного результата подтверждается тем, что при переходе в (2.7) к изотропному случаю получается тот же результат, что и при решении этой же задачи для изотропного тела с использованием схемы, данной в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И. А., Комаров Г. В. — Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1981, № 5, с. 43.
2. Леонов М. Я. Основы механики упругого тела. — Фрунзе, 1983.

Поступила в редакцию
30.11.82.

Кафедра теоретической механики