УДК 62.50

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ МАТРИЦАМИ

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+A_1(t)x(t-h)+B(t)u(t),\ t\in T_0=[0,\ t_1+h], \tag{1}$$

$$x_0(\cdot)=\{x(t)\equiv 0,\ -h\leqslant t<0,\ x(0)=x_0\}, \tag{2}$$

где x — n-вектор; $A(t)=A_{(i)}$, $A_1(t)=A_{1(i)}$, $B(t)=B_{(i)}$ при $t\in(\alpha_i h,\ \alpha_{i+1}h]$; $A_{(i)}$, $A_{1(i)}$, $B_{(i)}$ — постоянные $n\times n$, $n\times n$, $n\times m_i$-матрицы соответственно: $0=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{m+1}=\alpha+1$, $\alpha_i\in N$, $i=1,\ m$; $t_1=\alpha h$ — заданное время, $\alpha\in N$; $u(t)$, $t\in(\alpha_i h,\ \alpha_{i+1}h]$, m_i — вектор управления; h, $h>0$,— число (запаздывание); x_0 — фиксированный n-вектор.

Без ограничения общности считаем, что $m_i\leqslant n$ и $\operatorname{rank} B_{(i)}=m_{(i)}$.

Определение. Систему (1) назовем полностью управляемой, если для любого начального состояния (2) существует кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t\in T_0$, $u(t)\equiv 0$, $t>t_1+h$ такое, что траектория системы $x(t)$, $t\geqslant 0$, системы (1), (2) удовлетворяет условию $x(t)\equiv 0$, $t\geqslant t_1$.

Задача. Указать необходимые и достаточные условия полной управляемости системы (1), (2).

Можно доказать следующее утверждение.

Лемма. Для полной управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого начального состояния (2) существовало кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t\in T_0$, что вдоль него и соответствующей ему траектории $x(t)$, $t\geqslant 0$, системы (1), (2) выполнялись соотношения

$$x(t_1)=0 \qquad (3), \qquad A_{1(m)}x(t-h)+B_{(m)}u(t)\equiv 0,\ t\in T_1=[t_1,\ t_1+h]. \tag{4}$$

Известно [1], что существует невырожденная $n\times n$ — матрица T_0 такая, что

$$T_0 B_{(m)}=\begin{bmatrix}\tilde{B}_{(m)}\\ \cdots\cdots\\ 0\end{bmatrix},\ \det\tilde{B}_{(m)}\neq 0.$$

Обозначим

$$T_0 A_{1(m)}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{1(m)}\\ \cdots\cdots\\ M_{11,1}\end{bmatrix}\Big\}\, m_{(m)}.$$

Тогда соотношение (4) полной управляемости системы (1) эквивалентно тождеству

$$M_{11,1}x(t-h)\equiv 0,\ t\in T_1. \tag{5}$$

Таким образом, система (1) будет полностью управляемой тогда и только тогда, когда для любого начального состояния (2) найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t\in[0, t_1]$, такое, что траектория $x(t)$ системы (1), (2) удовлетворяет соотношениям (3), (5).

Покажем, что бесконечномерная задача полной управляемости (1), (2), (3), (5) эквивалентна некоторой конечномерной краевой задаче управления. Для этого воспользуемся алгоритмом, изложенным в работах [2, 3]. Введем следующие обозначения: k — номер итерации в алгоритме, $k=\overline{1, K}$ (значение числа K определено ниже); постоянные $n\times m_\eta$-матрицы $B_{ij,k}$, $m_\eta\times n$-матрицы $G_{j\mu,k}(\alpha_\eta\leqslant j<\alpha_{\eta+1})$, $n\times n$-матрицы $L_{\gamma\mu,k}$, как и матрицы $R_{ij,k}$, $M_{\gamma\mu,k}$ (размеры последних матриц изменяются в алгоритме), вычисляются по приводимым ниже рекуррентным соотношениям; $T_{ii,k}$, $E_{ii,k}$ ($E_{ii,k}$ — матрицы подстановок) невырожденные матрицы соответствующих размеров такие, что

$$T_{ii,k} R_{ii,k} E_{ii,k} = \left[\begin{array}{c:c} \tilde{R}_{ii,k} & \tilde{\tilde{R}}_{ii,k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \underbrace{0}_{S_{ii,k}} & 0 \end{array}\right]\}S_{ii,k},$$

где $S_{ii,k}=\operatorname{rank} R_{ii,k}$, $\det\tilde{R}_{ii,k}\neq 0$;

$$T^i_{i,k} M_{i+1,\mu,k} = \begin{bmatrix} M_{i+1,\mu,k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{i+2,\mu,k} \end{bmatrix}\}S_{ii,k}, \quad T_{ii,k} R_{ij,k} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{ij,k} \\ \cdots\cdots \\ R_{i+1,j,k} \end{bmatrix}\}S_{ii,k}, \qquad (6)$$

$i=\overline{1, k/\alpha}$, $\mu=\overline{1, k+1/\alpha}$, $j=\overline{i+1, k/\alpha}$.

На k-ом шаге алгоритма, $\alpha_\rho\leqslant\alpha-k<\alpha_{\rho+1}$, положим $M_{21,1}=M_{11,1}A_{(\rho)}$,

$$M_{22,1}=M_{11,1}A_{1(\rho)},\ M_{2\gamma,k}=\sum_{\beta=1}^{k-1} M_{1\beta,k}L_{\beta\gamma,k-1},\ \gamma=\overline{1, k-1},$$

$$M_{2k,k}=\sum_{\beta=1}^{k-1} M_{1\beta,k}L_{\beta k,k-1}+M_{1k,k}A_{(\rho)},\quad M_{2,k+1,k}=\begin{cases} M_{1k,k}A_{1(\rho)}, & k<\alpha \\ 0, & k=\alpha, \end{cases}$$

матрицы $M_{\xi\mu,k}$, $\xi>2$ вычисляется по формулам (6); а $M_{1\mu,k+1}=M_{k+2,\mu,k}$ $\mu=\overline{1, k+1}$; $R_{1k,k}=M_{1k,k}B_{(\rho)}$, $R_{1\gamma,k}=\sum_{\beta=1}^{\gamma} M_{1\beta,k}B_{\beta\gamma,k-1}$, $\gamma=\overline{1, k-1}$, матрицы $R_{\xi\mu,k}$, $\xi=\overline{2, k}$, $\mu=\overline{\xi, k}$ находятся по формулам (6);

$$B_{\mu\mu,k}=-B_{\mu\mu,k-1}E^{-1}_{\mu\mu,k}\times\left[\begin{array}{c:c} 0 & \tilde{R}^{-1}_{\mu\mu,k}\tilde{\tilde{R}}_{\mu\mu,k} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & \underbrace{-E}_{m_\eta-S_{\mu\mu,k}} \end{array}\right]\}S_{\mu\mu,k}\times E_{\mu\mu,k},\ B_{\mu\mu,0}=E, \qquad (7)$$

$$B_{ij,k}=-\sum_{\beta=i}^{k-1} B_{i\beta,k-1}E^{-1}_{\beta\beta,k}\times\begin{bmatrix} \tilde{R}^{-1}_{\beta\beta,k}\tilde{R}_{\beta jk} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix}\}S_{\beta\beta,k},\ \mu,\ i=\overline{1, k},\ j=\overline{i+1, k},\ \alpha_\eta\leqslant\mu<\alpha_{\eta+1}; \qquad (8)$$

$L_{kk,k}=A_{(\rho)}-B_{(\rho)}G_{kk,k}$, $L_{k,k+1,k}=A_{1(\rho)}-B_{(\rho)}G_{k,k+1,k}$, $L_{k\xi,k}=-B_{(\rho)}G_{k\xi,k}$,

$$L_{\gamma\mu,k}=L_{\gamma\mu,k-1}-\sum_{\beta=\gamma}^{k-1} B_{\gamma\beta,k-1}G_{\beta\mu,k-1},\quad \mu=\overline{1, k+1},\ \gamma,\ \xi=\overline{1, k-1};$$

$$G_{i\mu,k}=E^{-1}_{ii,k}\times\begin{bmatrix} \tilde{R}^{-1}_{ii,k}\tilde{M}_{i+1,\mu,k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix}\}S_{ii,k},\quad i=\overline{1, k},\ \mu=\overline{1, k+1}. \qquad (9)$$

Для $k>\alpha$ положим $M_{2\gamma,k}=\sum_{\beta=1}^{\alpha} M_{1\beta,k}L_{\beta\gamma,k-1}$, $M_{1\gamma,k+1}=M_{\alpha+2,\gamma,k}$, $R_{1\gamma,k}=$

$$= \sum_{\beta=1}^{\gamma} M_{1\beta,k} B_{\beta\gamma,k-1},\quad L_{\gamma\mu,k} = L_{\gamma\mu,k-1} - \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha} B_{\gamma\beta,k-1} G_{\beta\mu,k},\quad \gamma = \overline{1,\alpha},\ \mu = \overline{1,\alpha},$$

а матрицы $M_{\xi\mu,k}$, $\xi>2$; $R_{\beta\mu,k}$, $\beta\geqslant 2$; $B_{\mu\mu,k}$, $\mu=\overline{1,\alpha}$; $B_{ij,k}$, $i=\overline{1,\alpha}$, $j=\overline{i+1,\alpha}$; $G_{i\mu,k}$, $i=\overline{1,\alpha}$, $\mu=\overline{1,\alpha}$ вычисляются по формулам (6), (7), (8), (9) соответственно.

Количество итераций в алгоритме зададим числом $K\,(K\leqslant n\alpha(n-m_m))$, равным K_1, где K_1 — такой номер итерации в алгоритме, после которой $M_{1\beta,K_1+1}=0$, $\beta=\overline{1,\ K_1+1/\alpha}$ *, или равным $K_2+n\alpha$, где K_2 — номер итерации, после которой $M_{1\beta,K_2+1}\neq 0$, $\beta=\overline{1,\ K_2+1/\alpha}$, но $R_{1\beta,j}=0$, $j=\overline{K_2+1,\ K_2+n\alpha}$. Следуя [4], положим $x(ih+t)=x_{i+1}(t)$, $u(ih+t)=u_{i+1}(t)$, $t\in[0,\ h]$, $i=\overline{0,\ \alpha}$. Тогда, согласно [2, 3], задача (1), (2), (3), (5) эквивалентна следующей краевой задаче управления

$$\dot y(t) = \hat A y(t) + \hat B v(t),\quad t\in[0,\ h], \tag{10}$$

$$y(0) = \hat K_1 x_0 + \hat K y(h) \quad (11), \qquad \hat N y(h) = 0, \quad (12)$$

где $y(t)\in R^{n\alpha}(t)$, $v(t)\in R^{p}(t)$, $\hat K_1\in R^{n\alpha\times n}$, $\hat A$, $\hat K\in R^{n\alpha\times n\alpha}$, $\hat N\in R^{nk\times n\alpha}$, $\hat B\in R^{n\alpha\times p}$ $\left(p=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\,m_i - m_m\right)$ и имеют вид

$$\hat A = \begin{bmatrix} L_{ij,k},\ j=\overline{\alpha,\ 1} \\ i=\overline{\alpha,\ 1}\end{bmatrix};\quad \hat B = \begin{bmatrix} B_{ij,k},\ j=\overline{\alpha,\ 1} \\ i=\overline{\alpha,\ 1}\end{bmatrix},\quad B_{ij,k}=0,\ j<i;$$

$$\hat N = \begin{bmatrix} 0_{n,\,n(\alpha-1)} & \\ M_{1j,\beta},\ j=\overline{\alpha,2} & E_{n,n} \\ \beta=\overline{2,\ K} & 0_{n(\kappa-1),n} \end{bmatrix},\ M_{1j,\beta}=0,\ \beta<j;\ \hat K = \begin{bmatrix} 0_{n,\,n\alpha} & \\ E_{n(\alpha-1),\,n(\alpha-1)} & 0_{n(\alpha-1)\,n}\end{bmatrix};$$

$$\hat K_1 = \begin{bmatrix} E_{n,\,n} \\ 0_{n(\alpha-1),\,n}\end{bmatrix};\quad y(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ i=\overline{1,\ \alpha}\end{bmatrix};\quad v(t) = \begin{bmatrix} u_i(t) \\ i=\overline{1,\ \alpha}\end{bmatrix}.$$

Далее из результатов работы [2] следует, что задача (10), (11), (12) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank}\{Q,\ Q_1\},$$

$$Q = \begin{bmatrix} \hat N & 0\ 0\ldots 0 \\ E-\exp(\hat A h)\,\hat K & \hat B\ \hat A\hat B\ldots \hat A^{n\alpha-1}\hat B\end{bmatrix},\quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \exp(\hat A h)\,\hat K_1\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Таким образом, доказана

Теорема. Для полной управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1967.
2. Размыслович Г. П.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 1141.
3. Размыслович Г. П.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1977, № 3, с. 24.
4. Габасов Р. Ф. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием.— Докл. второй Сибирской конф. по матем. и механ., 1962, с. 116.

Поступила в редакцию
08.02.81.

Кафедра высшей математики ФПМ

* Запись $i=\overline{1,\mu/\alpha}$ означает, что индекс i изменяется от 1 до μ, если $\mu<\alpha$, и от 1 до α в противном случае.