Система (8) изохронна, так как для нее $\ddot{x}=-x$. Пусть для (1) выполняется условие (2_3). В этом случае система (1) имеет вид:

$$\dot{x}=-y-A_{11}xy-\frac{1}{2}A_{11}^2y^3,\quad \dot{y}=x+\frac{1}{2}A_{11}y^2. \tag{9}$$

Система (9) изохронна, так как для нее $\ddot{y}=-y$.

Теперь, пусть (2_1) выполняется для (1). Положим $A_{02}=\alpha\beta^2a_{20}$. Тогда при замене переменных типа (3) система (1) сводится к системе (5). Это означает, что система (1) изохронна. Теорема доказана.

Следствие 1. Для того чтобы система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно существование функции $z=\alpha x+\beta y$ такой, что в силу (1) $\ddot{z}+z\equiv 0$.

Следствие 2. Для того чтобы система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо чтобы она имела единственную конечную особую точку $O(0, 0)$ в C и единственную вещественную особую точку в бесконечности.

Следствие 3. Если система (1) имеет единственную особую точку $O(0, 0)$ в C и для нее выполняется условие (7), то она является изохронной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелькин В. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 971.
2. Амелькин В. В., Касим Мухамед Аль-Хайдер.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 3, с. 43.
3. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. Ч. 2: Линейная алгебра и полиномы.— М., 1978.

Поступила в редакцию 19.02.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.926.4

С. А. МАЗАНИК

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА E-СИСТЕМ

1. Неприводимость E-систем. Обозначим через $P_{\alpha l}$ множество кусочно-постоянных функций, определенных на $[0, +\infty[$, с разрывами разве лишь в точках $t_k=kl$ (k — натуральное, а l — постоянное положительное число) и принимающих только два значения α и $-\alpha$.

Рассмотрим треугольную E-систему (см. [1]):

$$\dot{x}=Px, \tag{1}$$

где матрица $P=(p_{ij})$ такова, что $p_{ij}=0$ для $i>j$, $p_{ij}\in P_{\alpha l}$ для $i\leqslant j$, $i, j=\overline{1, n}$. Очевидно, что след матрицы P может принимать лишь конечное число значений, множество которых обозначим через $\{s_k\}$, причем порядок нумерации выберем такой, чтобы $s_1>s_2>\ldots>s_q$, $1\leqslant q\leqslant n+1$. Положим $T_k=\{t\,|\,\mathrm{Sp}\,P(t)=s_k\}$. Связные компоненты множества T_k, занумерованные в порядке возрастания их левых концов t_i^k, обозначим T_i^k, и пусть $l_i^k=\mathrm{mes}\,T_i^k$.

Теорема 1. Пусть существует такое k, $k=\overline{1, q}$, что $\{T_i^k\}$ счетное множество, а (l_i^k) — неограниченная последовательность. Тогда при выполнении одного из условий

$$\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{mes}\,T_i<+\infty \quad (2),\qquad \sum_{i=k+1}^{q}\mathrm{mes}\,T_i<+\infty \quad (3)$$

система (1) является неприводимой.

Доказательство. Предположим противное, что система (1) приводима. В силу необходимого условия приводимости [2, с. 17] выполняется следующее соотношение: $\int\limits_0^t \mathrm{Sp}\,P(\tau)\,d\tau=at+\varphi(t)$, где a — некоторое действительное число, а функция φ ограничена на всем промежутке $[0\ +\infty[$.

Нетрудно показать, что в силу неограниченности последовательности (l_i^k) имеет место равенство

$$s_k = a. \qquad (4)$$

Если выполнено условие (2), то существует такое натуральное n_0, что для $t \geqslant n_0 l$, $\operatorname{Sp} P(t) \neq s_i$ при всех $i = \overline{1,\ k-1}$; поэтому для любого целого m, $m > n_0$, имеем

$$\int\limits_{n_0 l}^{ml} \operatorname{Sp} P(\tau)\, d\tau = s_k \sum_{i=1}^{r_0(m)} l_i^k + s_{k+1} \sum_{i=1}^{r_1(m)} l_i^{k+1} + \ldots + s_q \sum_{i=1}^{r_{q-k}(m)} l_i^q + f(m), \qquad (5)$$

где $r_j = (m)$ число связных компонент множества $T_{k+j} \cap [n_0 l,\ ml[$, причем, если $r_j(m) = 0$, полагаем $\sum\limits_{i=1}^{r_j(m)} l_i^{k+j} = 0$, функция f ограничена при всех целых m. Таким образом, учитывая (4), получаем

$$\varphi(ml) - \varphi(n_0 l) - f(m) = (s_{k+1} - s_k) \sum_{i=1}^{r_1(m)} l_i^{k+1} + \ldots + (s_q - s_k) \sum_{i=1}^{r_{q-k}(m)} l_i^q. \qquad (6)$$

Поскольку, по крайней мере, одно из $r_j(m)$ стремится к бесконечности при $m \to \infty$, правая часть (6) стремится к $-\infty$, а левая остается ограниченной при всех целых m.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы при выполнении условия (2). Аналогично доказывается неприводимость системы (1) при выполнении условия (3). Теорема доказана.

Обозначим через $\lambda(t)$ наибольшее собственное число матрицы P, а через $\mu(t)$ ее наименьшее собственное число. Положим $L = \{t \mid \lambda(t) = -\alpha\}$, $M = \{t \mid \mu(t) = \alpha\}$. Из теоремы 1 непосредственно получаем

Следствие 1. Если множество связных компонент множества L счетно, а последовательность их длин неограничена, то система (1) неприводима.

Следствие 2. Если множество связных компонент множества M счетно, а последовательность их длин неограничена, то система (1) неприводима.

Приведенные результаты являются некоторым обобщением результатов работы [3].

2. Правильность E-систем. Используя критерий правильности систем треугольного вида [4, с. 39], можно получить условия правильности системы (1) в терминах последовательностей длин связных компонент множеств $P_k^+ = \{t \mid p_{kk}(t) = \alpha\}$ и $P_k^- = \{t \mid p_{kk}(t) = -\alpha\}$, а именно: имеет место

Теорема 2. Если для каждой функции p_{kk} число связных компонент множества $P_k^+ (P_k^-)$ бесконечно и выполнены условия

$$\lim_{m \to \infty} \frac{l_{k(m+1)}^+ \sum\limits_{i=1}^{m} l_{ki}^-}{\sum\limits_{i=1}^{m} (l_{ki}^+ + l_{ki}^-) \left(\sum\limits_{i=1}^{m} (l_{ki}^+ + l_{ki}^-) + l_{k(m+1)}^+ \right)} = 0, \qquad (7)$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{l_{ki}^+ - l_{ki}^-}{l_{ki}^+ + l_{ki}^-} = \beta_k,\ \beta_k \in R, \qquad (8)$$

то система (1) является правильной. Здесь (l_{ki}^+), (l_{ki}^-) — последовательности длин связных компонент множеств P_k^+ и P_k^- соответственно.

Отметим, что, если для некоторых функций p_{kk} число связных компонент множества $P_k^+ (P_k^-)$ конечно, а для остальных выполнены условия теоремы 2, система (1) также является правильной.

Следствие. Если для каждой функции p_{kk} число связных компонент множества $P_k^+ (P_k^-)$ бесконечно и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{l_{ki}^+}{l_{ki}^-}$, то при выполнении условия (7) система (1) будет правильной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1969, № 1, с. 10.
2. Еругин Н. П.— Труды Матем. ин-та имени В. А. Стеклова АН СССР, 1946, т. 13.
3. Мартынов И. И.— Докл. АН БССР, 1967, т. 11, № 9, с. 770.
4. Ляпунов А. М. Собр. соч.— М.— Л., 1956, т. 2.

Поступила в редакцию 19.03.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u_i^{\cdot}(t) = f_i\,[t,\ u_1(t),\ \ldots,\ u_m(t)],\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{1}$$

При построении разностных уравнений, аппроксимирующих (1) на сетке с шагом $\tau > 0$, будем исходить из равенств

$$\hat{u}_i = u_i + \tau\rho_i\varphi_i + \tau\int_0^1 \psi_i(\alpha)\exp[\tau\lambda_i(1-\alpha)]\,d\alpha,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{2}$$

или

$$\hat{u}_i = u_i + \tau\rho_i^*\hat{\varphi}_i + \tau\int_0^1 \psi_i(\alpha)\exp(-\tau\lambda_i\alpha)\,d\alpha,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{3}$$

где $u_i = u_i(t)$, $\hat{u}_i = u_i(t+\tau)$, $\varphi_i = \lambda_i u_i + b_i$, $\hat{\varphi}_i = \lambda_i\hat{u}_i + b_i$, $\psi_i(\alpha) = f_i[t+\alpha\tau,\ u_1(t+\alpha\tau),\ \ldots,\ u_m(t+\alpha\tau)] - \lambda_i u_i(t+\alpha\tau) - b_i$, $\rho_i = [\exp(\tau\lambda_i) - 1]/(\tau\lambda_i)$, $\rho_i^* = [1-\exp(-\tau\lambda_i)]/(\tau\lambda_i)$, при этом значения констант λ_i и b_i должны выбираться на основании оговоренных ниже требований. Для произвольных λ_i и b_i равенства (2) легко могут быть получены путем выделения и точного обращения линейной части

$$u_i'(t) = \lambda_i u_i(t) + b_i \tag{4}$$

соответствующего дифференциального оператора. Равенства (3) строятся аналогично. В дальнейшем для краткости изложения мы будем иметь в виду преимущественно лишь случай равенств (2).

Если на данном шаге сетки наложить на выбор параметров λ_i, b_i, например, ограничения вида

$$\psi_i(0) = 0, \tag{5}$$

то интегральный член в (2) будет малой величиной порядка τ^2. Присоединив к (5) требования

$$\psi_i(1) = 0, \tag{6}$$

повысим еще на единицу порядок малости этого члена. Вместо (6) можно использовать и другие требования, скажем, $\psi_i(1/2) = 0$, $\psi_i'(0) = 0$ и т. д. В качестве первоначального требования, вместо (5), можно также использовать другия условия, например, (6) и т. п.

В случае ограничений (5), (6) даже без аккуратной аппроксимации