

Теорема 1 (необходимое условие совместности). Если $\varphi(t)$ ненулевое решение систем (4) и (5), то $\varphi(t)$ при любом t является собственным вектором матрицы $A-B$, соответствующим нулевому собственному значению.

Пример 1.

Каждая из систем $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$ и $\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} y$ имеет решение

$\Phi(t) = (e^{-2t}; -4e^{-2t})^T$ где T — символ транспонирования. Необходимое условие совместности, выраженное теоремой 1, не является достаточным, как показывает следующий

Пример 2.

Функция $\Phi(t) = (e^t; -2e^t)^T$ не является решением систем $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x$,

$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y$. Хотя она является собственным вектором матрицы $A-B$, соответствующим нулевому собственному значению.

Теорема 2 (Критерий совместности). Для совместности систем (4) и (5) необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B имели общее собственное значение λ и общий собственный вектор ξ , отвечающий этому собственному значению. Если условие теоремы 2 выполнено, то каждая из систем (4) и (5) имеет решение $\varphi(t) = e^{\lambda t} \xi$. Если же собственное значение λ комплексно, то следует обычным образом (см., например, [1, с. 138]) отделить действительную и мнимую части векторной функции $e^{\lambda t} \xi$, которые и дадут решения каждой из рассматриваемых систем. Отметим, что критерий совместности из теоремы 2 можно выразить в терминах характеристического многочлена матрицы A (или B) (см. [2, с. 230]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. — Минск, 1977.
2. Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М., 1980.

Поступила в редакцию
29.10.81.

Кафедра высшей математики

УДК 517.925.12

КАСИМ МУХАМЕД АЛЬ-ХАЙДЕР

ОБ ИЗОХРОННОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Рассмотрим вещественную полиномиальную автономную двумерную дифференциальную систему Гамильтона вида $\dot{x} = -y - P_2(x, y) - P_3(x, y)$, $\dot{y} = x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y)$, которую всегда можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - A_{20}x^2 - A_{11}xy - 3A_{02}y^2 - A_{30}x^3 - A_{21}x^2y - A_{12}xy^2 - A_{03}y^3, \\ \dot{y} &= x + 3B_{20}x^2 + 2A_{20}xy + \frac{1}{2}A_{11}y^2 + B_{30}x^3 + 3A_{30}x^2y + \\ &\quad + A_{21}xy^2 + \frac{1}{3}A_{12}y^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Теорема. Для того чтобы система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась одна из следующих серий условий:

$$1. A_{20} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2 \right) A_{02}, \quad A_{11} = 2 \left(\frac{2\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) A_{02}, \quad B_{20} = -\frac{\alpha}{\beta} A_{02},$$

$$A_{30} = \frac{2\alpha}{\beta^3} A_{02}^2, A_{21} = \frac{6}{\beta^2} A_{02}^2, A_{12} = \frac{6}{\alpha\beta} A_{02}^2, A_{03} = \frac{2}{\alpha^2} A_{02}^2, B_{30} = \frac{2\alpha^2}{\beta^4} A_{02}^2, \text{ где } \alpha^2 + \beta^2 = 1, \alpha \cdot \beta \neq 0. \quad (2)$$

$$2. A_{02} = A_{11} = B_{20} = A_{30} = A_{21} = A_{12} = A_{03} = 0, B_{30} = 2A_{20}^2.$$

$$3. A_{02} = A_{20} = B_{20} = A_{30} = A_{21} = A_{12} = B_{30} = 0, A_{03} = \frac{1}{2} A_{11}^2.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1) имеет в начале координат изохронный центр. Система (1) при замене переменных

$$x_1 = \alpha x + \beta y, y_1 = -\beta x + \alpha y, \text{ где } \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (3)$$

сводится к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -y_1 - a_{20}x_1^2 - a_{11}x_1y_1 - a_{32}y_1^2 - a_{30}x_1^3 - a_{21}x_1^2y_1 - a_{12}x_1y_1^2 - a_{03}y_1^3, \\ \dot{y}_1 = & x_1 + b_{20}x_1^2 + 2a_{20}x_1y_1 + \frac{1}{2}a_{11}y_1^2 + b_{30}x_1^3 + 3a_{30}x_1^2y_1 + \\ & + a_{21}x_1y_1^2 + \frac{1}{3}a_{12}y_1^3, \end{aligned} \quad (4)$$

где a, b определяются через α, β, A, B .

Система (4) является изохронной, так как замена (3) не нарушает изохронности центра системы (1). Согласно теореме 10 [1], для системы (4) начало координат должно быть единственной конечной особой точкой в комплексной области (C). Это означает (см., например, [3, с. 436]),

что алгебраическое уравнение $R_{y_1}(x_1) = \sum_{i=1}^9 L_i x_1^i = 0$, где $L_1 = 4a_{12}^2 - 6a_{11}a_{02}a_{12} + 9a_{11}^2a_{03}$, должно иметь единственный корень $x_1 = 0$ в C. Оказывается, что всегда существует α_0 такое, что $L_1(\alpha_0) = 0$, т. е. систему (1) можно «повернуть» так, что для системы (4) $L_1 = 0$.

Отметим, что при $L_1 = 0$ для изохронной системы (4) $a_{12} = a_{03} = 0$. Таким образом, мы приходим к следующему выводу: система (1) при замене переменных типа (3) сводится либо к системе вида

$$\dot{x}_1 = -y_1 - a_{20}x_1^2, \dot{y}_1 = x_1 + 2a_{20}x_1y_1 + 2a_{20}^2x_1^3, \quad (5)$$

либо к системе вида

$$\dot{x}_1 = -y_1 - a_{20}x_1^2 - a_{20}^2x_1^2y_1, \dot{y}_1 = x_1 + 2a_{20}x_1y_1 + a_{20}^2x_1y_1^2. \quad (6)$$

Система (5) изохронна, так как для нее $\ddot{x}_1 = -x_1$. Покажем, что система (6) при $a_{20} \neq 0$ имеет в начале координат неизохронный центр. Действительно, согласно теореме 3 [2], получим первое необходимое условие изохронности центра гамильтоновых систем вида (1):

$$\begin{aligned} 18A_{20}^2 + 36A_{20}A_{02} + \frac{9}{2}A_{11}^2 + 90(A_{02}^2 + B_{20}^2) + 18A_{11}B_{20} = \\ = 6A_{21} + 9(A_{03} + B_{30}). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая условие (7), для системы (6) получим $12a_{20}^2 = 0$, но по предположению $a_{20} \neq 0$, т. е. при $a_{20} \neq 0$ условие (7) не выполняется, это доказывает, что система (6) неизохронна.

Заметим далее, что при замене переменных типа (3) система (1) имеет коэффициентные условия (2) такие, что (1) сводится к системе (5).

Достаточность. Пусть для системы (1) выполняется условие (2₂). В этом случае система (1) имеет вид

$$\dot{x} = -y - A_{20}x^2, \dot{y} = x + 2A_{20}xy + 2A_{20}^2x^3. \quad (8)$$

Система (8) изохронна, так как для нее $\dot{x} = -x$. Пусть для (1) выполняется условие (2₃). В этом случае система (1) имеет вид:

$$\dot{x} = -y - A_{11}xy - \frac{1}{2}A_{11}^2y^3, \quad \dot{y} = x + \frac{1}{2}A_{11}y^2. \quad (9)$$

Система (9) изохронна, так как для нее $\ddot{y} = -y$.

Теперь, пусть (2₁) выполняется для (1). Положим $A_{02} = \alpha\beta^2a_{20}$. Тогда при замене переменных типа (3) система (1) сводится к системе (5). Это означает, что система (1) изохронна. Теорема доказана.

Следствие 1. Для того чтобы система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно существование функции $z = \alpha x + \beta y$ такой, что в силу (1) $\ddot{z} + z = 0$.

Следствие 2. Для того чтобы система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо чтобы она имела единственную конечную особую точку $O(0, 0)$ в S и единственную вещественную особую точку в бесконечности.

Следствие 3. Если система (1) имеет единственную особую точку $O(0, 0)$ в S и для нее выполняется условие (7), то она является изохронной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амеликин В. В. — Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 971.
2. Амеликин В. В., Касим Мухамед Аль-Хайдер. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 3, с. 43.
3. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. Ч. 2: Линейная алгебра и полиномы. — М., 1978.

Поступила в редакцию
19.02.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.926.4

С. А. МАЗАНИК

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА E-СИСТЕМ

1. Неприводимость E-систем. Обозначим через $P_{\alpha l}$ множество кусочно-постоянных функций, определенных на $[0, +\infty[$, с разрывами разветвления лишь в точках $t_k = kl$ (k — натуральное, а l — постоянное положительное число) и принимающих только два значения α и $-\alpha$.

Рассмотрим треугольную E-систему (см. [1]):

$$\dot{x} = Px, \quad (1)$$

где матрица $P = (p_{ij})$ такова, что $p_{ij} = 0$ для $i > j$, $p_{ij} \in P_{\alpha l}$ для $i \leq j$, $i, j = \overline{1, n}$. Очевидно, что след матрицы P может принимать лишь конечное число значений, множество которых обозначим через $\{s_k\}$, причем порядок нумерации выберем такой, чтобы $s_1 > s_2 > \dots > s_q$, $1 \leq q \leq n+1$. Положим $T_k = \{t | \text{Sp } P(t) = s_k\}$. Связные компоненты множества T_k , занумерованные в порядке возрастания их левых концов t_i^k , обозначим T_i^k , и пусть $l_i^k = \text{mes } T_i^k$.

Теорема 1. Пусть существует такое k , $k = \overline{1, q}$, что $\{T_i^k\}$ счетное множество, а (l_i^k) — неограниченная последовательность. Тогда при выполнении одного из условий

$$\sum_{i=1}^{k-1} \text{mes } T_i < +\infty \quad (2), \quad \sum_{i=k+1}^q \text{mes } T_i < +\infty \quad (3)$$

система (1) является неприводимой.

Доказательство. Предположим противное, что система (1) приводима. В силу необходимого условия приводимости [2, с. 17] выполняется следующее соотношение: $\int_0^t \text{Sp } P(\tau) d\tau = at + \varphi(t)$, где a — неко-