$$w(e) = \begin{cases} 0, \text{ если } e \in E \setminus (B_2 \cup x), \\ v, \text{ если } e = x, \\ u, \text{ если } e \in B_2 \wedge B_1, \\ c, \text{ если } e \in B_2 \setminus B_1, \end{cases}$$

где $v > u > |B_2| c > 0$. Тогда для решения G_A получаем

$$w(G_A) \geqslant v + ku. \tag{2}$$

Здесь $k = |B_1 \cap B_2|$. Если предположить, что не существует $y \in B_2 \setminus B_1$ такого, что $(B_2 \setminus y) \cup x \in \beta(S, E)$, то $w(G_B) \geqslant u$, что в силу (1), (2) влечет $u \leqslant |B_2 \setminus B_1| c$. Последнее противоречит выбору функции w. Следовательно, для семейства $\beta(S, E)$ выполняется условие (*) и в силу леммы пара (S, E) является матроидом.

Из теоремы 1 вытекает следующий критерий

Теорема 2. Непустая совокупность S подмножеств множества E является семейством независимых множеств матроида на E тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) если $G \in S$ и $B \subset G$, то $B \in S$; 2) для всех функций $w: E \to R^+$ для «жадных» решений задач А и В выполняется равенство (1).

ЛИТЕРАТУРА

Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.

2. Welsh D. Matroid theory.— London, New York, San Francisko, 1976.

3. Hausmann D., Korte B., Jenkyns T.— Math. Program. Study, Comb. optim., 1980, v. 12, p. 120.

Поступила в редакцию 15.10.81.

Кафедра математического обеспечения АСУ

УДК 517.948.32

С. В. РОГОЗИН

НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В данной заметке рассматривается следующая задача: найти функции $\Phi^{\pm}(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в верхней $(\operatorname{Im} z > 0)$ и нижней полуплоскостях, предельные значения которых на вещественной прямой удовлетворяют следующему краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t) \frac{P(t)}{Q(t)} \Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{1}$$

При этом

$$P(t) = \prod_{n \in Z,\ n \neq 0} \left(1 - \frac{t}{a_n}\right) e^{\frac{t}{a_n} + \frac{t^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{t^p}{p a_n^p}},$$

$$Q(t) = \prod_{n \in Z,\ n \neq 0} \left(1 - \frac{t}{b_n}\right) e^{\frac{t}{b_n} + \frac{t^2}{2b_n^2} + \ldots + \frac{t^q}{q b_n^q}},$$

$\operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} b_n = 0$, p, q равны либо $[\rho_P]$, $[\rho_Q]$, либо $[\rho_P] - 1$, $[\rho_Q] - 1$, где ρ_P, ρ_Q — порядки [1, с. 11] целых функций $P(z)$, $Q(z)$. Для функций $n^*_{PQ}(t)$, определяемых формулами

$$n^*_{PQ}(t) = \begin{cases} n^{(2)}_{PQ}(t), & t \geqslant 0, \\ -n^{(1)}_{PQ}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

где $n^{(2)}_{PQ}(t)$ — число корней $P(z)$, $Q(z)$ в круге $|z - t/2| < t/2$, а $n^{(1)}_{PQ}(t)$ — число корней $P(z)$, $Q(z)$ в круге $|z + t/2| < t/2$, выполнены условия:

1) $n_P^*(t) = [\psi_P(t)|t|^{\rho_P} + 1/2],\ 0 < \rho_P \leqslant \rho < \infty,$ (2)

2) $\psi_P(t)|t|^{\rho_P} \nearrow,$

3) $\psi_P(t) \in H_\mu[-\infty, \infty],\ \rho_P/\rho_P + 1 < \mu \leqslant 1,$

4) $|\psi_P'(t)\cdot t| < A,\ A = \mathrm{const},\ A > 0,$

5) $n_P^*(t) - n_Q^*(t) = \omega(t)|t|^\beta,\ \omega(-\infty) < 0,\ \omega(+\infty) > 0,$ (3)

$0 < \beta \leqslant \min\{\rho,\ 1-\varepsilon\},\ \varepsilon > 0$ (ρ из (2), (4)).

Функция $G(t)$ определена формулой

$$G(t) = G_0(t)\exp\left\{\sum_{k=1}^{p} c_k t^k\right\}, \tag{4}$$

в которой $c_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{n_Q^*(\tau) - n_P^*(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\tau,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ G_0(t) = \exp\{2\pi(\psi(t)|t|^\alpha + i\varphi(t)|t|^\rho)\},\ 0 < \rho < \infty,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \min\{\rho,\ 1-\varepsilon\}$ (ρ — то же, что и в (2) и (3)), а $\psi(t)$, $\varphi(t)$ таковы, что $\varphi(t) \in H_\nu[-\infty, \infty],\ \rho/\rho + 1 < \nu \leqslant 1,$ $\psi(t) \in H[-\infty, \infty]$, причем $\psi(-\infty) > 0,\ \psi(+\infty) > 0,\ (\lambda_2 - \widetilde{\Delta}_P^+ + \widetilde{\alpha}_2)\times(\lambda_1 + \widetilde{\Delta}_P^- + \widetilde{\alpha}_1) < 0$, где $\lambda_2 = \varphi(+\infty),\ \lambda_1 = \varphi(-\infty),$

$$\widetilde{\Delta}_P^\pm = \begin{cases} \psi_P(\pm\infty), & \rho_P = \rho, \\ 0 & \rho_P < \rho, \end{cases}$$

$$\widetilde{\alpha}_2 = \begin{cases} \dfrac{-\psi(-\infty) + \psi(+\infty)\cos\rho\pi}{\sin\rho\pi}, & \alpha = \rho, \\ 0 & , \alpha < \rho, \end{cases}$$

$$\widetilde{\alpha}_1 = \begin{cases} \dfrac{-\psi(-\infty)\cos\rho\pi + \psi(+\infty)}{\sin\rho\pi}, & \alpha = \rho, \\ 0 & , \alpha < \rho. \end{cases}$$

Наконец, $g(0) = 0,\ |g(t)| < B|t|^{-\gamma},\ |g'(t)| < C|t|^{\rho_P - 1 - \gamma},\ \gamma > 0.$

В случае аналога плюс-бесконечного индекса

$$\lambda_2 - \widetilde{\Delta}_P^+ + \widetilde{\alpha}_2 > 0,\ \lambda_1 + \widetilde{\Delta}_P^- + \widetilde{\alpha}_1 < 0 \tag{5}$$

схема решения задачи (1) аналогична схеме, предложенной М. И. Журавлевой [2]. Сначала задача рассматривается при дополнительных условиях

$$g(a_n) = 0,\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{6}$$

и доказывается, что

$$\Phi_0^\pm(z) = \frac{\Psi_0^\pm(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - z}$$

ее частное ограниченное решение (здесь $\Psi_0^\pm(z)$ — некоторое специальным образом построенное решение однородной задачи [3, 4], соответствующей задаче (1)). Далее исследуется случай, когда хотя бы одно из условий (6) не выполнено. Одно из ограниченных решений здесь таково:

$$\begin{cases} \Phi_0^+(z) = \dfrac{\Psi_0^+(z)}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau) - L^+(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - z} + L^+(z), \\ \Phi_0^-(z) = \dfrac{\Psi_0^-(z)}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau) - L^+(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - z}, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$L^{+}(z)=\Psi_0^{+}(z)\sum_{n\in Z,\ n\neq 0}\frac{g(a_n)}{\Psi_0^{+'}(a_n)(z-a_n)}$$

аналог интерполяционного ряда Лагранжа [2, с. 756]. Общее решение задачи (1)—(5) в обоих случаях имеет вид $\Phi^{\pm}(z)=\Phi_0^{\pm}(z)+\Psi^{\pm}(z)$, где $\Psi^{\pm}(z)$ — общее ограниченное решение однородной задачи Римана, соответствующей задаче (1)—(3).

Если же

$$\lambda_2-\tilde{\Delta}_P^{+}+\tilde{\alpha}_2<0,\ \lambda_1+\tilde{\Delta}_P^{-}+\tilde{\alpha}_1>0 \qquad (8)$$

(аналог минус-бесконечного индекса), то доказывается, что задача (1)—(4), (8), вообще говоря, неразрешима в классе ограниченных функций. Решение вида (7) будет ограниченным только при выполнении счетного множества условий разрешимости $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)-L^{+}(\tau)}{\Psi_0^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z_n}=0$, где z_n — некоторая последовательность точек верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_n>0$).

З а м е ч а н и е. В настоящей работе изложена в основном схема решения задачи и сформулированы результаты. Подготовительные материалы и основные выкладки содержатся в статье автора [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и н Б. Я. Распределение корней целых функций.— М., 1956.
2. Ж у р а в л е в а М. И.— Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4, с. 755.
3. Р о г о з и н С. В. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 423-79. Деп. от 01.02.79.
4. Р о г о з и н С. В. О неоднородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом в исключительном случае.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 424-79. Деп. от 01.02.79.

Поступила в редакцию 29.10.81.

Кафедра теории функций

УДК 517.926

ТАГБИНО ТАМБА

О СОВМЕСТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим две дифференциальные системы

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x) \quad (1), \qquad \frac{dy}{dt}=g(t,\ y), \qquad (2)$$

где f и g заданы в R^{n+1}, причем $f(0;\ \xi)=g(0,\ \xi)=0\ \forall\ \xi\in R^n$. Допустим, что эти системы однозначно разрешимы в окрестности любого начального значения $(t_0;\ \xi)\in R^{n+1}$ в виде

$$x=x(t,\ t_0,\ \xi)\quad y=y(t,\ t_0,\ \xi). \qquad (3)$$

Назовем системы (1) и (2) совместными в окрестности O^n, если для любых $t_0\in R$ и $\varepsilon>0$ существует $\xi\neq O^n$, $|\xi|<\varepsilon$, такое, что решения $x(\cdot,\ 0,\ \xi)$ и $y(\cdot,\ 0,\ \xi)$ совпадают, т. е. имеют общий промежуток задания I и $x(t,\ 0,\ \xi)=y(t,\ 0,\ \xi)\ \forall\ t\in I$. Введем условия совместности двух стационарных линейных дифференциальных систем

$$\frac{dx}{dt}=Ax \quad (4), \qquad \frac{dy}{dt}=By. \qquad (5)$$

Отметим, что в силу линейности и однородности систем (4) и (5) наличие хотя бы одного ненулевого решения, общего для (4) и (5), обеспечивает совместность систем в окрестности O^n. С помощью непосредственной подстановки и алгебраических преобразований можно доказать следующие теоремы.