

ЛИТЕРАТУРА

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М., 1971.
2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.

Поступила в редакцию
18.12.80.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 519.1

А. Н. ИСАЧЕНКО

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ДЛЯ МАТРОИДОВ

Критерии для определения, является ли пара (S, E) матроидом, могут базироваться на различных понятиях: независимых множеств, функций ранга, базиса, стягивающих множеств, функций обхвата, замыкания, поверхностей, гиперплоскостей [1, 2]. В настоящей заметке дается критерий, использующий понятие двойственных систем независимости и «жадного» решения.

Пусть E — непустое конечное множество.

Лемма. Непустая совокупность β подмножеств множества E является семейством базисов матроида на E тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: (*) если $B_1, B_2 \in \beta$, то для любого $x \in B_1 \setminus B_2$ существует $y \in B_2 \setminus B_1$ такое, что $(B_2 \setminus y) \cup x \in \beta$.

Справедливость леммы вытекает из эквивалентности условия (*) и аксиомы базисов матроида.

Предположим, что пара (S, E) является системой независимости, т. е. S — непустая совокупность подмножеств множества E , замкнутая относительно взятия подмножеств. Ясно, что система независимости однозначно определяется своими множествами максимальной мощности (базисами). Обозначим множество базисов системы независимости (S, E) через $\beta(S, E)$. Двойственной к системе независимости (S, E) назовем систему независимости (S^*, E) с множеством базисов $\beta(S^*, E) = \{E \setminus B : B \in \beta(S, E)\}$.

Пусть на множестве E задана функция $\omega : E \rightarrow R^+$. Вес множества $G \subseteq E$ определим как $\omega(G) = \sum_{e \in G} \omega(e)$. Рассмотрим пару экстремальных задач:

А) найти $G' \in \beta(S, E)$ такое, что $\omega(G) \leq \omega(G') \forall G \in \beta(S, E)$;
В) найти $G^* \in \beta(S^*, E)$ такое, что $\omega(G) \geq \omega(G^*) \forall G \in \beta(S^*, E)$.
Простой алгоритм («жадный» алгоритм) для решения задач А, В, предложенный в [2, 3], состоит в следующем: 1) $G_0 = \emptyset$; 2) Пусть $|E| = n$. Упорядочиваем для задачи А элементы множества E по убыванию, а для задачи В по возрастанию функции ω $e_1, e_2, \dots, e_n$; 3) $G_{i+1} = \begin{cases} G_i \cup e_{i+1}, & \text{если } G_i \cup e_{i+1} \in S, \\ G_i & \text{в противном случае;} \end{cases}$ 4) если $i+1 < n$ повторяем 3). Множество G_n называем «жадным» решением.

Пусть G_A — «жадное» решение задачи А, G_B — «жадное» решение задачи В. Известно [2], что решение G_A совпадает с точным тогда и только тогда, когда пара (S, E) является матроидом. Следовательно, если (S, E) — матроид, то для любой функции $\omega : E \rightarrow R^+$

$$\omega(G_A) = \omega(E) - \omega(G_B). \quad (1)$$

Покажем, что справедливо и обратное.

Теорема 1. Пусть (S, E) — система независимости. Если для любой функции $\omega : E \rightarrow R^+$ имеет место равенство (1), то (S, E) — матроид.

Доказательство. Пусть $B_1, B_2 \in \beta(S, E)$ и $x \in B_1 \setminus B_2$. Определим функцию ω следующим образом.

$$w(e) = \begin{cases} 0, & \text{если } e \in E \setminus (B_2 \cup x), \\ v, & \text{если } e = x, \\ u, & \text{если } e \in B_2 \wedge B_1, \\ c, & \text{если } e \in B_2 \setminus B_1, \end{cases}$$

где $v > u > |B_2|c > 0$. Тогда для решения G_A получаем

$$w(G_A) \geq v + ku. \quad (2)$$

Здесь $k = |B_1 \cap B_2|$. Если предположить, что не существует $y \in B_2 \setminus B_1$ такого, что $(B_2 \setminus y) \cup x \in \beta(S, E)$, то $w(G_B) \geq u$, что в силу (1), (2) влечет $u \leq |B_2 \setminus B_1|c$. Последнее противоречит выбору функции w . Следовательно, для семейства $\beta(S, E)$ выполняется условие (*) и в силу леммы пара (S, E) является матроидом.

Из теоремы 1 вытекает следующий критерий

Теорема 2. Непустая совокупность S подмножеств множества E является семейством независимых множеств матроида на E тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) если $G \in S$ и $B \subset G$, то $B \in S$; 2) для всех функций $w: E \rightarrow R^+$ для «жадных» решений задач A и B выполняется равенство (1).

ЛИТЕРАТУРА

Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.

2. Welsh D. Matroid theory.— London, New York, San Francisco, 1976.

3. Hausmann D., Korte B., Jenkins T.— Math. Program. Study, Comb. optim., 1980, v. 12, p. 120.

Поступила в редакцию
15.10.81.

Кафедра математического обеспечения АСУ

УДК 517.948.32

С. В. РОГОЗИН

НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В данной заметке рассматривается следующая задача: найти функции $\Phi^\pm(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в верхней ($\text{Im } z > 0$) и нижней полуплоскостях, предельные значения которых на вещественной прямой удовлетворяют следующему краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t) \frac{P(t)}{Q(t)} \Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1)$$

При этом

$$P(t) = \prod_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(1 - \frac{t}{a_n}\right) e^{\frac{t}{a_n} + \frac{t^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{t^p}{pa_n^p}},$$

$$Q(t) = \prod_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(1 - \frac{t}{b_n}\right) e^{\frac{t}{b_n} + \frac{t^2}{2b_n^2} + \dots + \frac{t^q}{qb_n^q}},$$

$\text{Im } a_n = \text{Im } b_n = 0$, p, q равны либо $[\rho_P]$, $[\rho_Q]$, либо $[\rho_P] - 1$, $[\rho_Q] - 1$, где ρ_P, ρ_Q — порядки [1, с. 11] целых функций $P(z), Q(z)$. Для функций $n_{PQ}^*(t)$, определяемых формулами

$$n_{PQ}^*(t) = \begin{cases} n_{PQ}^{(2)}(t), & t \geq 0, \\ -n_{PQ}^{(1)}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

где $n_{PQ}^{(2)}(t)$ — число корней $P(z), Q(z)$ в круге $|z - t/2| < t/2$, а $n_{PQ}^{(1)}(t)$ — число корней $P(z), Q(z)$ в круге $|z + t/2| < t/2$, выполнены условия: