

вания, может быть подвергнут дальнейшей минимизации с целью построения тупикового теста, т. е. такого теста, каждый набор которого является избыточным. Отметим здесь, что даже если исходный тест был тупиковым, то после применения описанной выше процедуры склеивания он может стать не тупиковым вследствие того, что наборы, представляющие собой результат склеивания, могут обнаруживать такие неисправности, которые не обнаруживаются каждым из склеиваемых наборов в отдельности (см. утверждение 2). По той же причине полнота теста, полученного в результате склеивания некоторых наборов, может вообще превзойти полноту исходного теста, если он не был полным в заданном классе неисправностей. Для построения тупикового теста по тесту, полученному в результате применения процедуры склеивания, может быть использован алгоритм последовательной проверки наборов теста на избыточность [3, с. 285].

Описанный метод сокращения длины проверяющего теста наиболее эффективен тогда, когда исходный тест содержит много слабоопределенных входных наборов, что часто случается при построении тестов для комбинационных схем, содержащих большое число входов и выходов (к таким схемам, например, относятся программируемые логические матрицы).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход.— М., 1978.
2. Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов.— М., 1971.
3. Основы технической диагностики. Кн. 1: Модели объектов, методы и алгоритмы диагноза / Под ред. П. П. Пархоменко.— М., 1976.

Поступила в редакцию  
19.03.82.

Вычислительный центр

УДК 62—50

В. И. БУЛАТОВ

### О СЛИПАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

#### 1. Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x}(t) = \int_0^h [dR(\tau)] x(t-\tau), \quad (1)$$

где  $x$  —  $n$ -вектор;  $R(\tau)$  —  $n \times n$ -матрица ограниченной вариации;  $h > 0$  — вещественное число. Решение  $x(t)$  системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), -h \leq t < 0; x(0) = x_0\}, \quad (2)$$

где  $x_0$  — постоянный  $n$ -вектор;  $\varphi(t)$  — кусочно-непрерывная  $n$ -вектор-функция, условимся обозначать  $x(t, \varphi, x_0)$ .

Известно, что два различных решения  $x(t, \varphi_1, x_1)$  и  $x(t, \varphi_2, x_2)$  системы (1) могут, начиная с некоторого момента времени, совпадать друг с другом:  $x(t, \varphi_1, x_1) \equiv x(t, \varphi_2, x_2)$  при  $t > t_0$ . Такая ситуация называется слипанием решений [1].

**Задача.** Выяснить, при каких условиях решения  $x(t, \varphi_1, x_1)$  и  $x(t, \varphi_2, x_2)$  системы (1) слипаются.

**З а м е ч а н и е.** В силу соотношения  $x(t, \varphi_1, x_1) - x(t, \varphi_2, x_2) = x(t, \varphi_1 - \varphi_2, x_1 - x_2)$  вопрос о слипании решений  $x(t, \varphi_1, x_1)$  и  $x(t, \varphi_2, x_2)$  системы (1) сводится к вопросу о слипании решения  $x(t, \varphi, x_0)$ , где  $x_0 = x_1 - x_2$ ,  $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ , рассматриваемой системы с ее нулевым решением.

**Теорема.** Для того, чтобы решение  $x(t, \varphi, x_0)$  системы (1) слипалось с ее нулевым решением, необходимо и достаточно, чтобы все компоненты  $n$ -вектора

$$\left(\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda \tau} dR(\tau)\right)^{-1} \left(x_0 + \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau)\right) \varphi(t) dt\right) \quad (3)$$

являлись целыми функциями комплексной переменной  $\lambda$ .

Отметим основные моменты в доказательстве этой теоремы. Для доказательства необходимости введем  $n$ -вектор-функцию  $g(\lambda) =$

$= \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} x(t) dt$ , где  $x(t)$  — решение системы (1), соответствующее началь-

ному условию (2) и удовлетворяющее соотношению  $x(t) \equiv 0$  при  $t > t_0$ . Так как каждое решение  $x(t, \varphi, x_0)$  системы (1) является кусочно-непрерывным [2], то компонентами  $g(\lambda)$  будут целые функции от  $\lambda$ . На осно-

вании (1), (2) нетрудно получить, что  $\left(\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda \tau} dR(\tau)\right) g(\lambda) = x_0 +$

$+ \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau)\right) \varphi(t) dt$ . Значит,  $g(\lambda) = \left(\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda \tau} dR(\tau)\right)^{-1} \left(x_0 +$

$+ \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau)\right) \varphi(t) dt\right)$ . Отсюда следует, что компонентами  $n$ -век-

тора (3) являются целые функции от  $\lambda$ . Доказательство достаточности основано на возможности применения к решениям  $x(t)$  системы (1) преоб-

разования Лапласа [2]  $l(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} x(t) dt$ , являющегося аналитической

функцией в некоторой области  $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$ . Если решение  $x(t)$  удовлетворяет начальному условию (2), то для  $l(\lambda)$ , как и выше, получаем соотношение

$l(\lambda) = \left(\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda \tau} dR(\tau)\right)^{-1} \left(x_0 + \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau)\right) \varphi(t) dt\right)$ . Отсюда в

силу того, что компонентами  $n$ -вектора (3) являются целые функции от  $\lambda$ , следует возможность аналитического продолжения  $l(\lambda)$  на всю комп-

лексную плоскость. Далее, нетрудно видеть что  $|l(i\beta)|^2 = l'(i\beta) \cdot \overline{l(i\beta)} =$

$= O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$  при  $\beta \rightarrow \infty$ , где  $\beta$  — вещественное число,  $i^2 = -1$ . Поэтому

интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |l(i\beta)|^2 d\beta$  сходится. Так как степень целой  $n$ -вектор-функ-

ции  $l(\lambda)$  конечна [2], то получаем, что  $l(\lambda)$  удовлетворяет всем условиям теоремы Винера — Пэли [3]. Следовательно,  $x(t)$  — финитная функция. Значит, для некоторого  $t_0$ ,  $0 < t_0 < +\infty$ , будем иметь:  $x(t) \equiv 0$  при  $t > t_0$ .

2. Полученная выше теорема позволяет, в частности, установить условия управляемости состояния (2) системы

$$\dot{x}(t) = \int_0^h [dR(\tau)]x(t-\tau) + Bu(t), \quad (4)$$

где  $u$  —  $r$ -вектор-управления;  $B$  — постоянная  $n \times r$ -матрица.

**Определение.** Состояние (2) системы (4) называется управляемым, если существуют момент времени  $t_0$ ,  $0 < t_0 < +\infty$ , и кусочно-непрерывное управление  $u(t)$ , для которых соответствующее решение  $x(t)$  системы (4) с начальным условием (2) удовлетворяет соотношению  $x(t) \equiv 0$  при  $t > t_0$ .

Пусть  $\sigma[P(\lambda)]$  означает множество общих (с учетом кратностей) нулей миноров максимального порядка матрицы  $P(\lambda)$ . Справедливо следующее

**Утверждение.** Для управляемости состояния (2) системы (4) необходимо, а в случае  $B=0$ , то и достаточно, чтобы



$$\sigma \left[ \lambda E - \int_0^h e^{-\lambda \tau} dR(\tau); B \right] = \sigma \left[ \lambda E - \int_0^h e^{-\lambda \tau} dR(\tau); B; x_0 + \int_{-h}^0 \left( \int_t^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau) \right) \varphi(t) dt \right]. \quad (5)$$

Необходимость доказывается так же, как и в [4]. Доказательство же достаточности следует из выше полученной теоремы в силу того, что при  $B=0$  условие (5) совпадает с требованием, чтобы все компоненты  $n$ -вектора (3) являлись целыми функциями от  $\lambda$ , а система (4) совпадает с системой (1), свойство управляемости решений которой соответствует свойству слипания ее решений с нулевым решением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М., 1972.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М., 1975.
3. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области.— М., 1964.
4. Булатов В. И.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 12, с. 2252.

Поступила в редакцию  
27.12.81.

Кафедра высшей математики ФПИ