

можно преобразованием вида (2) привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{10}x + a_{01}y + a_{00}}{b_{10}x + b_{01}y + b_{00}}.$$

Поступила в редакцию
06.01.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.926

М. М. ФЕДЕНЯ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КРАТНОГО СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим n -мерную линейную стационарную систему (ЛСС)

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1)$$

со спектром $\{\lambda_k(A), k=\overline{1, n}\}$, где $\lambda_k(A)$ — корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = \det[A - \lambda E] = 0$, и возмущенную систему

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon E_{ij})x, \quad (2)$$

где E_{ij} — $(0, 1)$ -матрица, единственный ненулевой элемент которой расположен в позиции (i, j) .

Пусть в спектре ЛСС (1) содержится корень $\lambda_s(A)$ кратности l , т. е. справедливы соотношения

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^l \Delta_1(\lambda) \quad (3), \quad \Delta_{ij}(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^{m_{ij}} \Delta_{ij}^{(1)}(\lambda), \quad (4)$$

причем $\Delta_1(\lambda_s) \neq 0$, $\Delta_{ij}^{(1)}(\lambda_s) \neq 0$ ($\Delta_{ij}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение к (i, j) -му элементу матрицы $A - \lambda E$).

Составим разность $r_{ij} = l - m_{ij}$, которую в дальнейшем будем называть индексом коэффициента чувствительности. Из равенства $\det[A + \varepsilon E_{ij} - \lambda E] = \Delta(\lambda) + \varepsilon \Delta_{ij}(\lambda)$, указанного в [1], а также из соотношений (3), (4) следует, что при $r_{ij} \leq 0$ характеристическое число $\lambda_s(A)$ нечувствительно [1, 2] к возмущениям матрицы A в позиции (i, j) .

Из результатов [3, с. 219—233], [4, с. 77—85], [2, 5, 6] вытекает, что для системы (2) l корней распадаются на две группы, содержащие возмущенные и невозмущенные корни соответственно, причем число возмущенных корней равно r_{ij} .

Если $r_{ij} = l$, то, следовательно, возникает лишь одна группа, а корни, принадлежащие ей, разлагаются в окрестности $\varepsilon = 0$ в ряды Пуизье по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{l}}$.

Пусть $\{\lambda_{p_s}(\varepsilon), p_s = \overline{1, r_{ij}}\}$ — группа возмущенных корней. Тогда, как следует из [3, 7], $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ будет r_{ij} — значной аналитической функцией от $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ в окрестности $\varepsilon = 0$, где $r_{ij} \in]0, l]$, $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ — одна из r_{ij} ветвей функции $\varepsilon^{\frac{1}{l}}$. Изучим детальнее вопрос о разложении $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ в ряд Пуизье.

Определим коэффициенты чувствительности k -го порядка $(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]}$ индекса r_{ij} для характеристического числа $\lambda_s(A)$ кратности l следующим рекуррентным соотношением:

$$(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_{p_s}(\varepsilon) - \lambda_s(A) - \sum_{m=1}^k (g_{ij}^{(m-1)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} \varepsilon^{\frac{m-1}{r_{ij}}}}{\varepsilon^{\frac{k}{r_{ij}}}}, \quad (5)$$

где $(g_{ij}^{(0)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = 0$, $0 < r_{ij} \leq l$.

Анализируя равенство (5), нетрудно заметить, что $(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]}$ является коэффициентом при $\varepsilon^{\frac{k}{r_{ij}}}$ в разложении $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ в ряд Пюизье.

Запишем равенство $\Delta(\lambda) + \varepsilon \Delta_{ij}(\lambda) = 0$ в виде $-\varepsilon \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} (\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}} = (\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}}$. Здесь функция $R_{ij}(\lambda, \lambda_s) = -\frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} (\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}}$ является аналитической. Заменяем уравнение $\varepsilon = \frac{(\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}}}{R_{ij}(\lambda, \lambda_s)} \therefore L_{ij}(\lambda, \lambda_s)$ следующим: $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}} = \Omega_{ij}(\lambda, \lambda_s)$.

Тогда, используя теоремы 1, 1* [7, с. 141], а также равенство (5), получаем, что $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ является r_{ij} -значной аналитической функцией от $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ в окрестности $\varepsilon = 0$ и разлагается в ряд Пюизье следующего вида:

$$\begin{aligned} \lambda_{p_s}(\varepsilon) &= \lambda_s(A) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} \varepsilon^{\frac{k}{r_{ij}}}, \text{ где} \\ (g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} &= \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(\frac{\lambda - \lambda_s}{r_{ij} \sqrt[r_{ij}]{L_{ij}(\lambda, \lambda_s)}} \right)^k = \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} (R_{ij}(\lambda, \lambda_s))^{\frac{k}{r_{ij}}} = \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(-\frac{\Delta_{ij}(\lambda) (\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}}}{\Delta(\lambda)} \right)^{\frac{k}{r_{ij}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Учитывая равенства (3), (4), из формулы (6) имеем } (g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} &= \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(-\frac{\Delta_{ij}^{(1)}(\lambda)}{\Delta_1(\lambda)} \right)^{\frac{k}{r_{ij}}}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Введем понятие коэффициента чувствительности $K_{ij}^{(m)}(\lambda_k)$ порядка m , $m > 2$ в случае простого спектра $\{\lambda_k(A), k = 1, n\}$:

$$K_{ij}^{(m)}(\lambda_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k - \sum_{l=1}^{m-1} K_{ij}^{(l)}(\lambda_k) \varepsilon^l}{\varepsilon^m}.$$
 Тогда из формулы (6), равенств (3), (4) и того факта, что для простого спектра $r_{ij} = 1$ (либо 0, но в этом случае $K_{ij}^{(k)}(\lambda_s) = 0$), следует формула для вычисления коэффициентов чувствительности k -го порядка для простого спектра:

$$K_{ij}^{(k)}(\lambda_s) = \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(-\frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta_1(\lambda)} \right)^k.$$

Пример. Пусть в системе (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда $\Delta(\lambda) = (1 - \lambda)^3$,

$$\lambda_s(A) = 1, \quad l = 3. \quad [\Delta_{ij}(\lambda)] = \begin{bmatrix} (\lambda - 1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & (\lambda - 1)^2 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу индексов $R = [r_{ij}]$, в которой условимся писать символ « $\times$ » в том случае, когда $\Delta_{ij} = 0$ (если $\Delta_{ij} \neq 0$, то, очевидно,

$$(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = 0): \quad R = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times \\ 2 & 1 & \times \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отличные от 0 коэффициенты чувствительности соответствующих индексов вычислим по формуле (6): $(g_{11}(\lambda_s))^{[r_{11}]} = (g_{22}(\lambda_s))^{[r_{22}]} =$

$= (g_{33}(\lambda_s))^{[r_{33}]} = (g_{21}(\lambda_s))^{[r_{21}]} = (g_{32}(\lambda_s))^{[r_{32}]} = (g_{31}(\lambda_s))^{[r_{31}]} = 1$. Коэффициенты чувствительности более высоких порядков равны 0 (ряд Пюизье «обрывается»).

Тогда можно записать разложение, дающее представление о смысле коэффициентов чувствительности

$$[\lambda_{p_s}(A + \varepsilon E_{ij})] = [\lambda_s(A)] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{1/3} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{1/2} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Феденя М. М. О чувствительности квазихарактеристических чисел и действительных компонент характеристических чисел.— Рукопись деп. в ВИНТИ. № 2466-78. Деп. от 20.07.78.
2. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / Под ред. Е. Н. Розенвассера и Р. М. Юсупова.— Л., 1971.
3. Ланкастер П. Теория матриц.— М., 1978.
4. Уилкинсон Д. ж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений.— М., 1970.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А.— Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 3 (93).
6. Лидский В. Б.— Ж. vych. матем. и матем. физики, 1966, № 1.
7. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.— М., 1968.

Поступила в редакцию
19.03.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 681.3-192

А. Е. ЛЮЛЬКИН

К МИНИМИЗАЦИИ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТОВ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Применение регулярных алгоритмов построения проверяющих тестов комбинационных схем, основанных на переборе неисправностей, приводит в случае больших схем к тестам большой длины. Необходимо отметить, однако, что входные наборы, входящие в тест, построенный с помощью таких широко распространенных методов, как *D*-алгоритм, булево дифференцирование и других, являются, как правило, не полностью определенными, т. е. значения на некоторых входах в наборе являются безразличными. При этом с ростом числа входов и выходов в схеме, как правило, возрастает и степень неопределенности получаемых входных наборов, которая определяется числом входов, на которых значения во входном наборе не определены. В настоящей работе рассматривается метод сокращения длины проверяющего теста, где входные наборы не полностью определены.

Пусть $t_i = (t_1^i, t_2^i, \dots, t_k^i, \dots, t_n^i)$ и $t_j = (t_1^j, t_2^j, \dots, t_k^j, \dots, t_n^j)$ — два входных набора. Здесь $t_k^i, t_k^j \in \{0, 1, x\}$, где x означает, что значение на соответствующем входе не определено; n — число входов в схеме. Будем называть наборы t_i и t_j совместимыми (обозначим $t_i \sim t_j$), если для каждого k выполняется $t_k^i = t_k^j$, если $t_k^i, t_k^j \in \{0, 1\}$. В противном случае, наборы t_i и t_j будем называть несовместимыми. Очевидно, введенное отношение совместимости является рефлексивным ($t_i \sim t_i$), симметричным (из $t_i \sim t_j$ следует, что $t_j \sim t_i$), но не транзитивным (из $t_i \sim t_j$, $t_j \sim t_u$ не следует $t_i \sim t_u$), т. е. не является отношением эквивалентности.

Введем операцию $\cap$ склеивания наборов, которая выполняется как покомпонентная операция над одноименными компонентами наборов согласно следующему правилу: