

субоптимальный план $z^0 = (3; 4; 3; 1,2; 1,5; 3; 1,3)$, $c(z^0) = 2$ задачи (1.5). Следуя алгоритму, переходим ко второму этапу. Нетрудно убедиться, что $x^0(J) = z^0(J)$, $c(x^0) = 2$ — оптимальный план задачи (5.1) — (5.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. — Минск, 1977—1980, ч. 1—3.

Поступила в редакцию
30.12.81.

Кафедра МОУ

УДК 517.925

В. Х. КОВАЧЕВ

БИЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассматриваем уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены двух независимых переменных x, y с вещественными коэффициентами. Будем считать, что степени P и Q не выше n , хотя бы один из этих многочленов не равен тождественно нулю и что у них нет нетривиального общего делителя. Исследуем поведение интегральных кривых уравнения (1) вблизи особых точек $(\bar{x}, \bar{y})$, т. е. точек, где $P(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Сначала попытаемся упростить уравнение (1) при помощи преобразования

$$\left. \begin{aligned} axu + bxv + cyu + dyv &= h \\ Axu + Bxv + Cyu + Dyv &= H \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где u, v — новые переменные; $a, b, c, d, h, A, B, C, D, H$ — вещественные числа, удовлетворяющие условиям, которые перечислим ниже. Нетрудно увидеть, что получаем уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tilde{P}(u, v)}{\tilde{Q}(u, v)}, \quad (3)$$

где $\tilde{P}, \tilde{Q}$ вообще являются многочленами степени не выше, чем $2n+2$. Возможен, однако, случай, когда многочлены $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ имеют общий делитель, и тогда (после сокращения) их степени будут ниже чем $2n+2$.

Постараемся получить информацию о поведении интегральных кривых уравнения (1), исследуя поведение интегральных кривых уравнения (3) и свойства преобразования (2). При этом особенно интересен случай, когда степени P и Q не превышают двух, а степени $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ не превосходят единицы (или наоборот, так как обратное преобразование имеет тот же самый вид).

$$\text{Вводим обозначение } [a, c] = \begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix}, \dots, [b, d] = \begin{vmatrix} b & d \\ B & D \end{vmatrix}.$$

Рассматривая (2) как линейную систему относительно x, y , находим

$$x = \frac{[h, c]u + [h, d]v}{R(u, v)}, \quad y = \frac{[a, h]u + [b, h]v}{R(u, v)}, \quad (4)$$

где $R(u, v) = [a, c]u^2 + ([a, d] + [b, c])uv + [b, d]v^2$.

Для того, чтобы мы действительно смогли выразить x, y из (2) через u, v , потребуем, чтобы $R(u, v) \neq 0$, т. е. чтобы одно из чисел $[a, c]$, $[b, d]$ и $[a, d] + [b, c]$ не равнялось нулю. Аналогичным образом потребуем, чтобы из (2) мы могли выразить u, v через x, y . Наконец вычислим якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{\Delta}{R^2(u, v)}, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} [a, h] & [b, h] \\ [h, c] & [h, d] \end{vmatrix}.$$

Потребуем, чтобы $\Delta \neq 0$. Тогда свойства преобразования (2) будут определяться видом множества нулей многочлена $R(u, v)$, т. е. знаком дискриминанта $\delta = ([a, d] + [b, c])^2 - 4[a, c][b, d]$.

Допустим, что степени многочленов P, Q не превосходят единицы: $P(x, y) = a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$, $Q(x, y) = b_{10}x + b_{01}y + b_{00}$.

Будем искать случаи, когда в преобразованном уравнении (3) степени $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ не превосходят двух. Выведем также соотношения между коэффициентами $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ в этих случаях. Тем самым найдем уравнения вида (3), в которых степени числителя и знаменателя не превосходят двух, и которые некоторым преобразованием вида (2) можно привести к виду (1), где степени числителя и знаменателя не превосходят единицы. Ниже перечислено несколько таких случаев.

Предложение 1: Если выполнено одно из условий

$$\left. \begin{aligned} 4A_{20}B_{02} &= A_{11}B_{11}, \\ 2A_{20}(2A_{02} - B_{11}) + A_{11}(2B_{20} - A_{11}) &= 0, \\ A_{20}^2 + A_{11}^2 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

или

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= A_{11} = 0, \\ 4B_{20}B_{02} + B_{11}(2A_{02} - B_{11}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (ii)$$

то уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{A_{20}u^2 + A_{11}uv + A_{02}v^2}{B_{20}u^2 + B_{11}uv + B_{02}v^2} \quad (5)$$

можно преобразованием вида (2) привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{00}}{b_{00}} \quad (6)$$

(здесь не исключаются случаи $a_{00} = 0$, $b_{00} \neq 0$ и $a_{00} \neq 0$, $b_{00} = 0$).

Следствие. Так как интегральные кривые (6) имеют уравнения $b_{00}y - a_{00}x + C = 0$, находим, что интегральные кривые (5) имеют уравнения $CR(u, v) + \alpha u + \beta v = 0$, где α и β зависят от коэффициентов (5). Эти кривые — конические сечения, вид которых определяется знаком δ , т. е. свойствами преобразования (2).

Предложение 2. Если выполнено одно из условий (i), (ii) либо

$$A_{20} = 0, B_{20} = 2A_{11} \text{ (iii)}, B_{02} = 0, A_{02} = 2B_{11}, \text{ (iv)}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= 0, \\ B_{20}B_{11}^2 - A_{02}B_{11}(2B_{20} - A_{11}) - B_{02}(2B_{20} - A_{11})^2 &= 0, \\ A_{02}^2 + 4B_{20}B_{02} &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{02} &= 0, \\ A_{02}A_{11}^2 - B_{20}A_{11}(2A_{02} - B_{11}) - A_{20}(2A_{02} - B_{11})^2 &= 0, \\ B_{20}^2 + 4A_{20}A_{02} &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (vi)$$

то уравнение (5) можно преобразованием вида (2) привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{10}x + a_{01}y}{b_{10}x + b_{01}y} \quad (7)$$

(поведение интегральных кривых (7) хорошо изучено).

Предложение 3. Если выполнено одно из условий (i) или (ii), то уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{A_{20}u^2 + A_{11}uv + A_{02}v^2 + A_{10}u + A_{01}v}{B_{20}u^2 + B_{11}uv + B_{02}v^2 + B_{10}u + B_{01}v}$$

можно преобразованием вида (2) привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{10}x + a_{01}y + a_{00}}{b_{10}x + b_{01}y + b_{00}}.$$

Поступила в редакцию
06.01.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.926

М. М. ФЕДЕНЯ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КРАТНОГО СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим n -мерную линейную стационарную систему (ЛСС)

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1)$$

со спектром $\{\lambda_k(A), k=1, n\}$, где $\lambda_k(A)$ — корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = \det[A - \lambda E] = 0$, и возмущенную систему

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon E_{ij})x, \quad (2)$$

где E_{ij} — $(0, 1)$ -матрица, единственный ненулевой элемент которой расположен в позиции (i, j) .

Пусть в спектре ЛСС (1) содержится корень $\lambda_s(A)$ кратности l , т. е. справедливы соотношения

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^l \Delta_1(\lambda) \quad (3), \quad \Delta_{ij}(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^{m_{ij}} \Delta_{ij}^{(1)}(\lambda), \quad (4)$$

причем $\Delta_1(\lambda_s) \neq 0$, $\Delta_{ij}^{(1)}(\lambda_s) \neq 0$ ($\Delta_{ij}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение к (i, j) -му элементу матрицы $A - \lambda E$).

Составим разность $r_{ij} = l - m_{ij}$, которую в дальнейшем будем называть индексом коэффициента чувствительности. Из равенства $\det[A + \varepsilon E_{ij} - \lambda E] = \Delta(\lambda) + \varepsilon \Delta_{ij}(\lambda)$, указанного в [1], а также из соотношений (3), (4) следует, что при $r_{ij} \leq 0$ характеристическое число $\lambda_s(A)$ нечувствительно [1, 2] к возмущениям матрицы A в позиции (i, j) .

Из результатов [3, с. 219—233], [4, с. 77—85], [2, 5, 6] вытекает, что для системы (2) l корней распадаются на две группы, содержащие возмущенные и невозмущенные корни соответственно, причем число возмущенных корней равно r_{ij} .

Если $r_{ij} = l$, то, следовательно, возникает лишь одна группа, а корни, принадлежащие ей, разлагаются в окрестности $\varepsilon = 0$ в ряды Пуизье по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{l}}$.

Пусть $\{\lambda_{p_s}(\varepsilon), p_s = 1, r_{ij}\}$ — группа возмущенных корней. Тогда, как следует из [3, 7], $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ будет r_{ij} — значной аналитической функцией от $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ в окрестности $\varepsilon = 0$, где $r_{ij} \in]0, l]$, $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ — одна из r_{ij} ветвей функции $\varepsilon^{\frac{1}{l}}$. Изучим детальнее вопрос о разложении $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ в ряд Пуизье.

Определим коэффициенты чувствительности k -го порядка $(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]}$ индекса r_{ij} для характеристического числа $\lambda_s(A)$ кратности l следующим рекуррентным соотношением:

$$(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_{p_s}(\varepsilon) - \lambda_s(A) - \sum_{m=1}^k (g_{ij}^{(m-1)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} \varepsilon^{\frac{m-1}{r_{ij}}}}{\varepsilon^{\frac{k}{r_{ij}}}}, \quad (5)$$

где $(g_{ij}^{(0)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = 0$, $0 < r_{ij} \leq l$.