Математика и механика

УДК 62-50

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ОДИН МЕТОД ПРОВЕРКИ КРИТЕРИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

где x — n-вектор; A, A_1 — постоянные $n \times n$, $n \times r$ — матрицы соответственно; u — r-вектор управления.

Известно [1], что система (1) управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\} = n. \tag{2}$$

Иногда на практике, в силу больших размеров матриц A и B, проверка критерия (2) вызывает большие затруднения. Рассмотрим метод, который позволяет от проверки равенства (2) перейти к проверке соотношений, имеющих, как правило, матрицы малых размеров.

Пусть T — неособая $n \times n$-матрица, преобразующая матрицу A к форме Жордана: $I = TAT^{-1} = [I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)]$, $\sum\limits_{i=1}^{s} \rho_i = n$. Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — различные собственные числа матрицы A, $I_{\rho_l}(\lambda_l) = \operatorname{diag}\{\Gamma_{\rho_l, 1}(\lambda_l),\ \Gamma_{\rho_l, 2}(\lambda_l),\ \ldots,\ \Gamma_{\rho_l, m_l}(\lambda_l)\}$, $l = \overline{1, s}$, где $\Gamma_{\rho_l, i}$ — $n_{\rho_l, i} \times n_{\rho_l, i}$ — клетка Жордана, отвечающая элементарному делителю $(\lambda - \lambda)^{n_{\rho_l, i}}$ матрицы A. Пусть $n_{\rho_l, 1} \geqslant n_{\rho_l, 2} \geqslant \ldots \geqslant n_{\rho_l, m_l}$, $\sum\limits_{i=1}^{m_l} n_{\rho_l, i} = \rho_l$. Равенство (2) эквивалентно равенству

$$\operatorname{rank} Q = n,\ Q = [TB,\ ITB,\ \ldots,\ I^{n-1}TB]. \tag{3}$$

Положим

$$TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_s \end{bmatrix},$$

где B_i — $\rho_i \times r$ — матрицы. Покажем, что существует невырожденное преобразование столбцов такое, что

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & q_s & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где $q_i = [B_i,\ H_{\rho_i} B_i,\ \ldots,\ H_{\rho_i}^{n_{\rho_i,1}-1} B_i]$, $H_{\rho_i} = I_{\rho_i}(0)$, $i = \overline{1,\ s}$. Действительно, пусть $TB = \{b_{\gamma\beta}\} = [b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_r]$, $\gamma = \overline{1,\ n}$, $\beta = \overline{1,\ r}$. Матрицу Q можно представить в виде $Q = [b_1,\ Ib_1,\ \ldots,\ I^{n-1}b_1,\ b_2,\ \ldots,\ I^{n-1}b_2,\ \ldots,\ b_r,\ \ldots,\ I^{n-1}b_r]$. Введем дополнительные обозначения. Через b обозначим произвольный столбец матрицы TB. Пусть $b' = [b_{(1)}^{(0)\prime},\ b_{(2)}^{(0)\prime},\ \ldots,\ b_{(s)}^{(0)\prime}] = \{b_\gamma^{(0)}\}$, где $b_{(i)}^{(0)}$ — ρ_i — вектор-столбцы, $i = \overline{1,\ s}$; $b_\gamma^{(0)}$ — элементы вектора b;

$$\Phi^{(0)}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix} = [b,\ Ib,\ \ldots\ I^{n-1}b] = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Phi_s^{(0)} \end{bmatrix},$$

$\Phi_i^{(0)}$ — $\rho_i \times n$ — матрица; $\Phi_{(i)j}^{(0)}$ — j-ый столбец матрицы $\Phi_i^{(0)}$. Вычислим $j+1$-ый столбец матрицы $\Phi_i^{(0)}$:

$$\Phi_{(i),\,j+1}^{(0)} = \Bigg\{ \sum_{\sigma=0}^{n_{\rho_i,1}-1} C_j^\sigma \lambda_i^{j-\sigma} b^{(0)}_{\sum_{l=1}^{i-1}\rho_l+\sigma+1} \quad \sum_{\sigma=0}^{n_{\rho_i,1}-2} C_j^\sigma \lambda_i^{j-\sigma} b^{(0)}_{\sum_{l=1}^{i-1}\rho_l+\sigma+2} \ \ldots$$

$$\ldots\ C_j^0 \lambda_i^j b^{(0)}_{\sum_{l=1}^{i-1}\rho_l+n_{\rho_i,1}} \ \ldots \ \sum_{\sigma=0}^{n_{\rho_i,m_i}-1} C_j^\sigma \lambda_i^{j-\sigma} b^{(0)}_{\sum_{l=1}^{i-1}\rho_l+\sum_{m=1}^{m_i-1} n_{\rho_i,m}+1} \ \ldots\ C_j^0\lambda_i^j b^{(0)}_{\sum_{l=1}^{i}\rho_l} \Bigg\}.$$

Из $j+1$-ого столбца матрицы $\Phi^{(0)}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$ вычтем k-ый столбец, $k = \overline{1,\ j}$, умноженный на $C_j^{k-1}\lambda_1^{j-k+1}$. Первые ρ_1 строк преобразованной матрицы $\Phi^{(1)}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$ примут вид

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
b_1^{(0)} & \ldots & b_{n_{\rho_1,1}}^{(0)} & \\
\vdots & \diagup & \vdots & \\
b_{n_{\rho_1,1}}^{(0)} & \ldots & 0 & \\
b_{n_{\rho_1,1}+1}^{(0)} & \ldots & b_{n_{\rho_1,1}+n_{\rho_1,2}}^{(0)} & \\
\vdots & \diagup & \vdots & 0 \\
b_{n_{\rho_1,1}+n_{\rho_1,2}}^{(0)} & \ldots & 0 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
b^{(0)}_{\sum_{i=1}^{m_1-1} n_{\rho_1,i}+1} & \ldots & b_{\rho_1}^{(0)} & \\
\vdots & \diagup & \vdots & \\
b_{\rho_1}^{(0)} & \ldots & 0 &
\end{array}\right] = [b_{(1)}^{(0)},\ H_{\rho_1} b_{(1)}^{(0)},\ \ldots,\ H_{\rho_1}^{n_{\rho_1,1}-1} b_{(1)}^{(0)},\ 0].$$

Остальные $n-\rho_1$ строк матрицы $\Phi^{(1)}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$ сохраняют свой вид, но вместо λ_i теперь будут стоять числа $\lambda_i^{(1)} = (\lambda_i - \lambda_1)$. Рассмотрим матрицу $\Phi^{(1)}\begin{pmatrix} n-\rho_1 & \ldots & n \\ n-\rho_1 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Первый столбец этой матрицы обозначим через $[b_{(2)}^{(1)\prime},\ b_{(3)}^{(1)\prime},\ \ldots,\ b_{(s)}^{(1)\prime}]$, где $b_{(i)}^{(1)} = I_{\rho_i}^{n_{\rho_1,1}}(\lambda_i^{(1)})\, b_{(i)}^{(0)}$, $i = \overline{2,\ s}$. С матрицей $\Phi^{(1)}\begin{pmatrix} n-\rho_1 & \dots & n \\ n-\rho_1 & \dots & n \end{pmatrix}$ повторим те же операции. В результате первые ρ_2 строк матрицы $\Phi^{(1)}$ примут вид, аналогичный (5).

Переходим к матрице $\Phi^{(2)}\begin{pmatrix} n-\rho_1-\rho_2 & \dots & n \\ n-\rho_1-\rho_2 & \dots & n \end{pmatrix}$ и т. д.

В результате матрица $\Phi^{(0)}\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ путем элементарных преобразований столбцов приводится к виду

$$\Phi^{(s-1)}=\begin{bmatrix}
b^{(1)}_{(0)} & H_{\rho_1} b^{(0)}_{(1)} & \dots & H_{\rho_1}^{n_{\rho_1,1}-1} b^{(0)}_{(1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & & & \\
b^{(0)}_{(2)} & I_{\rho_2}(\lambda_2^{(1)}) b^{(0)}_{(2)} & \dots & I_{\rho 2}^{n_{\rho_1,1}-1}(\lambda_2^{(1)}) b^{(0)}_{(2)} & b^{(1)}_{(2)} & \dots & H_{\rho_2}^{n_{\rho_2,1}-1} b^{(1)}_{(2)} & \dots & & & \\
b^{(0)}_{(3)} & I_{\rho_3}(\lambda_3^{(1)}) b^{(0)}_{(3)} & \dots & I_{\rho_3}^{n_{\rho_1,1}-1}(\lambda_3^{(1)}) b^{(0)}_{(3)} & b^{(1)}_{(3)} & \dots & I_{\rho_3}^{n_{\rho_2,1}-1}(\lambda_3^{(2)}) b^{(1)}_{(3)} & \dots & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & & & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & & & \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & & & \\
b^{(0)}_{(s)} & I_{\rho_s}(\lambda_s^{(1)}) b^{(0)}_{(s)} & \dots & I_{\rho_s}^{n_{\rho_1,1}-1}(\lambda_s^{(1)}) b^{(0)}_{(s)} & b^{(1)}_{(s)} & \dots & I_{\rho_s}^{n_{\rho_2,1}-1}(\lambda_s^{(2)}) b^{(1)}_{(s)} & \dots & b^{(s-1)}_{(s)} & \dots & H_{\rho_s}^{n_{\rho_s,1}-1} b^{(s-1)}_{(s)}
\end{bmatrix}.$$

Обозначим $\Phi^{(s-1)}\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \Phi_1^{(s-1)} \\ \vdots \\ \Phi_s^{(s-1)} \end{bmatrix}.$

В матрице $\Phi_s^{(s-1)}$ рассмотрим блок $[b_{(s)}^{(s-1)}, H_{\rho_s} b_{(s)}^{(s-1)}, \ldots, H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}, 1^{-1}} b_{(s)}^{(s-1)}]$. Разделим каждый столбец этого блока на отличное от нуля число $\lambda_s^{(s-1)\,(\sigma - n_{\rho_s}, 1)}$, где $\sigma = \sum_{i=1}^{s} n_{\rho_i, 1}$. Из i-ого $(i < \sigma)$ столбца вычтем j-ый $(j = \overline{i+1, \sigma})$ столбец, умноженный на $C_{\sigma - n_{\rho_s}, 1}^{j-i} / \lambda_s^{(s-1)\,(j-i)}$. В результате, вместо блока $[b_{(s)}^{(s-1)}, H_{\rho_s} b_{(s)}^{(s-1)}, H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}, 1^{-1}} b_{(s)}^{(s-1)}]$ получим блок $[b_{(s)}^{(0)} \ldots$ $\ldots H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}, 1^{-1}} b_{(s)}^{(0)}]$. Вычитая соответствующие комбинации столбцов последнего блока из предыдущих столбцов матрицы $\Phi_s^{(s-1)}$, в первых $(s-1)$ блоках получим нули (очевидно, что остальные матрицы $\Phi_1^{(s-1)}, \ldots, \Phi_{s-1}^{(s-1)}$ не изменяются). С матрицами $\Phi_1^{(s-1)}, \ldots, \Phi_{s-1}^{(s-1)}$ поступаем аналогичным образом. Итак, существует невырожденное преобразование столбцов, приводящее матрицу $\Phi^{(0)} \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$ к виду

$$\begin{bmatrix} b_{(1)}^{(0)} H_{\rho_1} b_{(1)}^{(0)} \ldots H_{\rho_1}^{n_{\rho_1}, 1^{-1}} b_{(1)}^{(0)} & 0 & \ldots & \\ & b_{(2)}^{(0)} \ldots H_{\rho_2}^{n_{\rho_2}, 1^{-1}} b_{(2)}^{(0)} & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & 0 \\ & 0 & \ldots & \\ & & \ldots & b_{(s)}^{(0)} \ldots H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}, 1^{-1}} b_{(s)}^{(0)} \end{bmatrix}$$

Вид последней матрицы (поскольку доказательство приводилось для произвольного столбца b матрицы TB) и доказывает, что соотношение (4) выполняется.

Теперь, используя (4), нетрудно видеть, что проверка критерия (2) сводится к проверке равенств

$$\operatorname{rank}\{B_i, H_{\rho_i} B_i, \ldots, H_{\rho_i}^{n_{\rho_i}, 1^{-1}} B_i\} = \rho_i, \quad i = \overline{1, s}. \tag{6}$$

Если же окажется, что и в соотношениях (6) матрицы все же имеют большие размеры, то для их проверки в дальнейшем следует использовать алгоритм, изложенный в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р.— Труды I конгресса ИФАК.— М., 1961, т. 2, с. 521.
2. Размыслович Г. П.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 1141.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1967.

Зак. 81 Бубневич 3-3 нал. Громак

Поступила в редакцию 24.09.81.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 519.76

И. А. КОРОЛЬ

СИНТЕЗ В ОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА КАК ЗАДАЧА ИНФОРМАЦИОННОГО ПОИСКА

При решении многих прикладных задач для описания языков (в частности, языки описания данных, алгоритмические и естественные языки) удобно использовать определенные формализмы, так называемые *метаязыки* [1]. Так, для описания синтаксиса языков используют *метасинтаксические языки.*

Наиболее распространенным метасинтаксическим языком являются *нормальные формы Бекуса* (или *металингвистические формулы*), основ-