при различающихся между собой значениях β_1 и β_2. Например, для типичного случая $P_г \approx 50$ мВт, $P_д^{opt} \approx 1$ мВт и $P_р^{opt} \approx 1$ мВт, $\beta_1 = 0{,}01$, $\beta_2 = 1$. В реальных пределах изменения величин $P_г$ (10 ÷ 200 мВт), $P_д^{opt}$ (1 ÷ 10 мВт) и $P_р^{opt}$ (0,1 ÷ 100 мВт) диапазон оптимальных значений β_2(0,01÷100) значительно шире диапазона для β_1(0,01÷5). Таким образом, в спектрометре целесообразно предусмотреть регулировку связи со стороны детектора в более широких пределах, чем со стороны генератора.

В спектрометре проходного типа на образец воздействует как магнитная компонента поля стоячей волны $H_с$, так и компонента $H_б$ бегущей волны, поступающей на детектор. Оценка показывает, что $H_б/H_с = \sqrt{P_д}/\sqrt{QP_р}$ и при значениях $Q \approx 100...10000$ учет поля становится существенным при $P_д/P_р > 10$.

Автор признателен В. Ф. Стельмаху за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пул Ч. Техника ЭПР-спектроскопии.— М., 1970, с. 483; 250.
2. Wilmshurst T. H., Gambling W. A., Ingram P. J.— J. Electron. Control., 1962, v. 13, p. 332.

Поступила в редакцию 06.09.82.

Кафедра физики полупроводников

УДК 621.391.24

А. Н. ЛАЗАРЧИК

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ВРЕМЕННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ В ТЕОРИИ ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Цель настоящей работы — оценка точности приближения в методе временной дискретизации в зависимости от величины интервала дискретизаций для случая стационарных процессов.

Рассмотрим случайный сепарабельный, стационарный в широком смысле процесс $x(t)$. Будем предполагать, что для него существуют многомерные плотности вероятности любой размерности. Случайный процесс $x(t)$ считается заданным, если для него задан набор многомерных плотностей распределения $\{W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих условиям симметрии и согласованности [1]. Условие симметрии требует, чтобы функции W_n были симметричны по всем переменным (x_i, t_i). Условие согласованности выражается соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_1, t_1; \ldots; x_i\ t_i; \ldots; x_n, t_n)\,dx_i =$$
$$= W_{n-1}(x_1, t_1; \ldots; x_{i-1}; t_{i-1}, x_{i+1}, t_{i+1}; \ldots; x_n, t_n).$$

Интегральную функцию распределения абсолютного максимума случайного процесса на интеграле времени $(0, T)$ можно определить как вероятность нахождения процесса $x(t)$ ниже некоторого фиксированного уровня h на интервале времени $(0, T)$, т. е. $F(h, T) = P\{\sup\limits_{t\in(0,T)} x(t) < h\}$. Как отмечалось в [2], значение функции распределения можно определить следующим пределом:

$$F(h, T) = \lim_{n\to\infty} F_n(h, T), \quad (2)$$

где $F_n(h, T)$ — n-мерная интегральная функция распределения процесса, определяемая равенством

$$F_n(h, T) = \int_{-\infty}^{h} \ldots \int_{-\infty}^{h} W_n(x_1, t_1; \ldots; x_n\ t_n)\,dx_1 \ldots dx_n. \quad (3)$$

В предельном переходе (2) предполагается, что точки t_i задают некоторое Δ-разбиение интервала $(0, T)$, и диаметр этого разбиения стремится к нулю при $n \to \infty$. Существование предела (2) следует из условия согласованности (1). В дальнейшем будем рассматривать только равномерные разбиения интервала $(0, T)$, т. е. точки t_i в выражении (3) будут выбираться следующим образом: $t_i=(i-1)\tau,\ i=\overline{1,\ n},\ \tau=T/(n-1)$.

Сущность метода дискретизации заключается в том, что функция $F(h, T)$ заменяется конечномерной функцией распределения $F_n(h, T)$. В результате такой замены допускается некоторая погрешность $\delta_n = F_n(h, T)-F(h, T)$, зависящая от величины интервала дискретизации τ. Справедлива следующая теорема, позволяющая оценить δ_n, если известна трехмерная плотность распределения процесса.

Теорема 1. Пусть $x(t)$ — случайный, непрерывно дифференцируемый с вероятностью единица, процесс с указанными свойствами, тогда справедливо неравенство $\delta_n < \frac{T}{\tau}\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k g\left(\frac{\tau}{2^k}\right)$, где $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{h}\int\limits_{h}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{h} W_3(x_1,\ 0;\ x_2,\ t/2;\ x_3,\ t)\, dx_1 dx_2 dx_3$.

Доказательство. Построим последовательность функций F_m, $m=n,\ n+1,\ \ldots,$ следующим образом. Дельта-разбиение интервала $(0, T)$, соответствующее члену последовательности F_{n+1}, получается из дельта-разбиения, соответствующего члену F_n, добавлением одной точки t_{n+1}, которая делит первый τ-отрезок пополам. Учитывая (1), можно записать, что $F_{n+1}=F_n - V_{n+1}$, где $V_{n+1} = \int\limits_{-\infty}^{h}\ldots\int\limits_{-\infty}^{h}\int\limits_{h}^{\infty} W_{n+1}(x_1,\ t_1;\ \ldots;\ x_n,\ t_n;\ x_{n+1},\ t_{n+1})\, dx_1 \ldots dx_n dx_{n+1}$.

Продолжим указанный процесс деления остальных τ-отрезков первоначального разбиения до тех пор, пока все τ-отрезки не будут поделены пополам. В результате получим

$$F_{2n-1} = F_n - \sum_{i=1}^{n-1} V_{n+i}. \qquad (4)$$

Новое дельта-разбиение, соответствующее члену F_{2n-1}, будет вновь равномерным, но с шагом $\tau_1=\tau/2$. Вследствие соотношения (1) и условия стационарности процесса справедливо неравенство

$$V_{n+i} < g(\tau),\ i=\overline{1,\ n-1}. \qquad (5)$$

Принимая во внимание (5), получим из (4) $F_{2n-1} > F_n - \frac{T}{\tau} g(\tau)$. Производя описанную операцию деления пополам τ_1 — отрезков, придем к следующему неравенству: $F_{4n-1} > F_{2n-1} - \frac{2T}{\tau} g\left(\frac{\tau}{2}\right)$. Продолжая неограниченно указанную процедуру деления, получим цепочку неравенств $F_{2^k n-1} > F_{2^{k-1} n-1} - \frac{2^{k-1}T}{\tau} g\left(\frac{\tau}{2^{k-1}}\right)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ из которой непосредственно следует утверждение теоремы 1.

Следует отметить, что условие дифференцируемости процесса обеспечивает сходимость ряда в правой части неравенства теоремы. Действительно, для функции $g(\tau)$ справедливо следующее неравенство: $g(\tau) \leqslant P\{C(0,\ \tau) \geqslant 2\}$, где $C(0,\ \tau)$ — число пересечений уровня h процессом $x(t)$ на интервале $(0,\ \tau)$. Согласно [1], для стационарного процесса, непрерывно дифференцируемого с вероятностью единица, можно утверждать, что $P\{C(0,\ \tau) \geqslant 2\} = o(\tau)$, при $\tau \to 0$.

Таким образом, $g(\tau)$ есть функция более высокого порядка малости, чем τ. В этом случае, как легко убедиться, ряд в правой части неравенства теоремы сходится.

Для дальнейшего анализа конкретизируем вид рассматриваемого процесса. Одним из классов случайных процессов, для которых многомерные плотности вероятности задаются сравнительно просто, является класс гауссовских случайных процессов. В этом случае имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $x(t)$ — стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и коэффициентом корреляции $r(t)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $r(\tau) = 1 - \frac{\omega^2}{2}\tau^2 + \frac{a}{3!}|\tau|^3 + o(\tau^3)$ при $\tau \to 0$, то $\delta_n = O(\tau)$ при $\tau \to 0$;

2) если $r(\tau) = 1 - \frac{\omega^2}{2}\tau^2 + \frac{r_0^{(4)}}{4!}\tau^4 + o(\tau^4)$ при $\tau \to 0$, то $\delta_n = O(\tau^2)$ при $\tau \to 0$.

Доказательство. Определим порядок малости функции $g(\tau)$ при указанных в теореме условиях. С этой целью вычислим производные по τ функции $g(\tau)$ в точке $\tau = 0$. При вычислении производных воспользуемся следующим известным тождеством, которому удовлетворяют гауссовские многомерные плотности: $\frac{\partial G_n}{\partial r_{ij}} = \frac{\partial^2 G_n}{\partial x_i \partial x_j}$, где G_n — n-мерная гауссовская плотность; $r_{ij} = r(t_i - t_j)$ — коэффициент корреляции i-того и j-того отсчетов процесса.

Используя условие первого пункта теоремы 2, найдем $g'(0) = 0$; $g''(0) = \frac{a}{24\pi\omega} e^{-\frac{h_2}{2}}$.

Отсюда следует, что

$$g(\tau) \sim \frac{1}{2} g''(0)\tau^2. \tag{6}$$

Воспользовавшись теоремой 1 и соотношением (6), получим утверждение первого пункта теоремы 2. Аналогично для условия второго пункта теоремы получим $g'(0) = g''(0) = 0$; $g'''(0) = \frac{1}{64\pi}\left\{\frac{24(r_0^{(4)} - \omega^4) + 3\omega^4 h^2}{\omega} \times\right.$ $\left.\times e^{-\frac{h^2}{2}}\left[1 - \Phi\left(\frac{\omega^2 h}{\sqrt{r_0^{(4)} - \omega^4}}\right)\right] - 6h\omega\sqrt{\frac{r_0^{(4)} - \omega^4}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{h^2 r_0^{(4)}}{2(r_0^{(4)} - \omega^4)}\right\}\right\}$,

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. Отсюда

$$g(\tau) \sim \frac{1}{6} g'''(0)\tau^3. \tag{7}$$

Из теоремы 1 и соотношения (7) следует утверждение второго пункта теоремы 2.

Таким образом, в случае гауссовских процессов, удовлетворяющих пункту 1) теоремы 2, при достаточно малом τ можно пользоваться верхней оценкой для погрешности $\delta_n < Tg''(0)\tau$. Соответствующее неравенство для процессов, удовлетворяющих второму пункту теоремы 2, имеет следующий вид: $\delta_n < \frac{2}{9} T g'''(0)\tau^2$.

Полученные результаты позволяют оценить погрешность метода дискретизации случайного процесса при заданном интервале дискретизации или по допустимой погрешности определить необходимый шаг дискретизации. В заключение отметим, что приведенные соотношения, как нетрудно видеть, справедливы и для случая вычисления вероятности нахождения процесса выше некоторого фиксированного уровня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы.— М., 1969.
2. Фомин Я. А. Теория выбросов случайных процессов.— М., 1980.

Поступила в редакцию 01.12.81.

НИИ ПФП