УДК 517.949.2

Н. Г. БУЛГАКОВ

К ТЕОРИИ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. Рассмотрим ν-мерную дискретную систему

$$x_{n+1}=f(x_n),\ f(0)=0, \tag{1}$$

где x_n, x_{n+1}, f — вещественные ν-векторы; n принимает целые значения (положительные или отрицательные). Если $f(x)$ непрерывна в некотором шаре $B_H=\{x\in R^\nu: \|x\|<H,\ 0<H\leqslant\infty\}$ (что и предполагается в дальнейшем), то из любой точки $x_0\in B_H$ в положительном направлении выходит только одно решение $x(n, x_0)$, $x(0, x_0)=x_0$ и это решение непрерывно зависит от x_0 [1].

Предположим, кроме того, что для системы (1) существует функция Ляпунова $V(x)$: $R^\nu\to R$, $x\to V(x)$, $V(x)\in C(R^\nu)$, $V(0)=0$ такая, что

$$\exists\ 0<h\leqslant H:\ V(x)\geqslant 0,\ \Delta V(x)=V(f(x))-V(x)\leqslant 0,\ x\in \mathring{B}h. \tag{2}$$

Здесь $\mathring{B}_h=B_h|\{0\}$. В дальнейшем $m=\{x\in R^\nu: V(x)=0\}$; $M=\{x\in R^\nu: \Delta V(x)=0\}$; $\bar{B}_r$ — замыкание B_r, $0<r<h$; $m^\sigma=\{x\in B_\sigma: V(x)=0\}$, $M^\sigma=\{x\in B_\sigma: \Delta V(x)=0\}$, $0<\sigma\leqslant h$; $\bar{m}^r=\{x\in\bar{B}_r: V(x)=0\}$; $\dot{m}^h\not\ni x^-(n)\to 0$: множество $\dot{m}^h$ не содержит отрицательных траекторий, втекающих в начало координат при $n\to-\infty$; $\dot{m}^h\not\ni x^-(n_k)\to 0$: множество $\dot{m}^h$ не содержит отрицательных траекторий, имеющих ω-предельную точку в начале координат; $\Omega_\omega(x_0)$ — множество всех ω-предельных точек ограниченной траектории, выходящей из точки x_0; $\Omega_\alpha(\hat{x}^-(n, x_0))$ — множество всех α-предельных точек для $\hat{x}^-(n, x_0)$, Z — множество целых чисел (положительных и отрицательных). Решения, определенные при $n=[0, \infty[$, $[0, -\infty[$, $]-\infty, \infty[$, назовем соответственно положительной, отрицательной, целой траекторией и обозначим $x^+(n)$, $x^-(n)$, $x^\infty(n)$. Траектории, лежащие в ограниченной области пространства R^ν, обозначим $\hat{x}^+(n)$, $\hat{x}^-(n)$, $\hat{x}^\infty(n)$.

Заметим, что решения системы (1) обладают следующим важным свойством:

$$x(n_1+n_2, x_0)=x(n_2, \xi_1), \tag{3}$$

где $\xi_1=x(n_1, x_0)$. Тождество (3) справедливо при всех $n_1\geqslant 0$, $n_2\geqslant 0$, при которых определены решения, входящие в него. Например, если решение $x(n, x_0)=\varphi(n)$ определено при $n=[0, \infty[$, тождество (3) справедливо для любых n_1, $n_2\in[0, \infty[$. Если $n_1\geqslant 0$, $n_2\leqslant 0$, то из точки ξ_1 в отрицательном направлении могут выходить, вообще говоря, несколько решений. Тождество (3) будет выполняться только для одного из них, а именно, для $x_\varphi(n, \xi_1)=\varphi(n+n_1)$. Это решение определено при $n=[0, -n_1]$ и непрерывно зависит от ξ_1. Таким образом, тождество (3) в этом случае следует понимать так: существует решение $x_\varphi(n, \xi_1)$ такое, что $x(n_1+n_2, x_0)=x_\varphi(n_2, x(n_1, x_0)$ для всех $n_1\in[0, \infty[$, $n_2\in[0, -n_1]$.

Опуская индекс φ, сформулируем окончательный результат. Если решение $x(n, x_0)$ определено при $n\in[0, \infty[$ ($n\in[0, -\infty[$), тождество (3) справедливо (в указанном выше смысле) для любых $n_1\in[0, \infty[$ ($n_1\in[0, -\infty[$), $n_2\in\{n_2: n_1+n_2\geqslant 0\}$ ($n_2\in\{n_2: n_1+n_2\leqslant 0\}$).

Нуль системы (1) назовем v-устойчивым в положительном направлении (короче v-устойчивым), если $\forall\ 0<\varepsilon<h$, $\exists\ 0<\delta(\varepsilon)\leqslant\varepsilon$: $\forall\ x_0\in m^\delta\Rightarrow x(n, x_0)\in B_\varepsilon$ при $n\geqslant 0$.

Если, кроме того, $x(n, x_0)\to 0$, $n\to\infty$, то нуль системы (1) назовем v-асимптотически устойчивым.

Очевидно, что устойчивость (асимптотическая устойчивость) по Ляпунову влечет v-устойчивость (v-асимптотическую устойчивость); v-устойчивость (v-асимптотическая устойчивость) при $V(x)\equiv 0$ переходит в устойчивость (асимптотическую устойчивость) по Ляпунову; если нуль системы (1) v-устойчив, то $\dot{m}^h\not\ni x^-(n_k)\to 0$.

Задача состоит в установлении критерия неасимптотической устойчивости нуля системы (1) в терминах знакопостоянных функций $V\geqslant 0$ и $\Delta V\leqslant 0$. Аналогичные критерии для асимптотической устойчивости сформулированы в [1]. Там же приведена подробная библиография.

2. Теорема А (ср. [2], теорема А). Если для системы (1) существует функция Ляпунова $V(x)\in C(R^{\nu})$, $V(0)=0$ такая, что

1) $\exists\, 0<h\leqslant H$: $V(x)\geqslant 0$, $\Delta V(x)\leqslant 0$, $x\in\dot{B}_h$,

2) выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

а) нуль системы (1) v-асимптотически устойчив,

б) $\exists\, 0<\sigma\leqslant h$: $\dot{m}^{\sigma}\equiv\hat{x}^{\infty}(n)$, $\dot{m}^{h}\equiv x^{-}(n)\to 0$,

в) $\exists\, 0<\sigma\leqslant h$: $\dot{m}^{\sigma}\equiv\hat{x}^{-}(n)$,

то нуль системы (1) устойчив по Ляпунову.

Доказательство этой теоремы приведено в приложении.

Следствие 1 (теорема Б) (ср. [1], теорема 3). Если к условиям 1), 2) теоремы А добавить условие 3): $\exists\, 0<\sigma\leqslant h: M^{\sigma}\setminus m^{\sigma}\equiv x^{\infty}(n)$, то нуль системы (1) асимптотически устойчив по Ляпунову.

Действительно, нуль системы (1) во всяком случае устойчив по Ляпунову. Заключительную часть доказательства можно провести аналогично тому, как это сделано в конце леммы 6(см. приложение). Дополнительный случай ($x^{*}\neq 0$, $V(x^{*})>0$), который здесь возникает, исключается ссылкой на лемму 2 и условие 3) теоремы.

Условие 2, б) и 3), теоремы Б можно, очевидно, заменить условиями: $\dot{M}^{\sigma}\equiv x^{\infty}(n)$, $\dot{m}^{h}\equiv x^{-}(n)\to 0$. При этом, если $\sigma=h=H=\infty$, то второе из этих условий оказывается следствием первого (множество $\dot{m}^{h}$ в этом случае положительно инвариантно). Если к оставшимся условиям добавить требование, чтобы система (1) была устойчивой по Лагранжу, то нуль системы (1) будет асимптотически устойчив при любых начальных возмущениях.

Таким образом, приходим к следующему предложению, полученному в [1] иным путем.

Следствие 2 (теорема С). Если для системы (1) существует функция Ляпунова $V(x)\in C(R^{\nu})$, $V(0)=0$ такая, что:

1) $V(x)\geqslant 0$, $\Delta V(x)\leqslant 0$, $x\in\dot{R}^{\nu}$,

2) $\dot{M}\equiv\hat{x}^{\infty}(n)$,

3) для $\forall\, x_0\in R^{\nu}$ тректория $x^{+}(n, x_0)$ ограничена, то нуль системы (1) устойчив в целом.

З а м е ч а н и е. а) Условие 3) теоремы С можно заменить более жестким требованием: $V(x)\to\infty$, $\|x\|\to\infty$, б) всюду выше вместо шаров можно рассматривать области произвольной конфигурации, содержащие начало координат в своей внутренней части.

Теоремы А, Б и С позволяют иногда легко обнаруживать свойство устойчивости (асимптотической устойчивости) там, где решение задачи с помощью знакоопределенных функций Ляпунова приводит к серьезным трудностям.

3. Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=\alpha x_n+\varphi(x_n-y_n),\\ y_{n+1}&=\alpha x_n+\psi(x_n-y_n), \end{aligned}\tag{4}$$

где $\varphi(0)=\psi(0)=0$, $0<\alpha<1$, $H=\infty$. Требуется показать, что если $F(z)=[\varphi(z)-\psi(z)]^2-z^2\equiv 0$, $z\in\dot{R}$, то нуль системы (4) устойчив по Ляпунову. Возьмем $\sigma=h=\infty$, $V(x, y)=(x-y)^2\geqslant 0\Rightarrow\Delta V(x, y)=F(x-y)\equiv 0$, $(x, y)\in\dot{R}^2$. На множестве $m=\{(x, y):x-y\}$ система (4) принимает вид

$$y_{n+1}=x_{n+1}=\alpha x_n.\tag{5}$$

Так как $\forall (x_0, y_0)\in\dot{R}^2: |x^{-}(n, x_0, y_0)|\to\infty$, $|y^{-}(n, x_0, y_0)|\to\infty$, $n\to-\infty$, то $\dot{m}\equiv(\hat{x}^{-}(n), \hat{y}^{-}(n))$. Все условия теоремы А выполнены, что и требовалось.

Пример 2. Показать, что если $F(z)<0$, $z\in\dot{R}$, то нуль системы (4) асимптотически устойчив по Ляпунову. Действительно, в этом случае $M=m=\{(x, y):x=y\}$ и, следовательно, условие 3) теоремы Б выполняется.

Пример 3. Показать, что если в условиях примера 2 функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ ограничены ($|\varphi(z)|\leqslant C_1$, $|\psi(z)|\leqslant C_2$, $z\in R$), то нуль системы (4) устойчив в целом. В самом деле, в этом случае $\forall\, n\geqslant 0: |x(n, x_0, y_0)|\leqslant |x_0|+C_1$, $|y(n, x_0, y_0)|\leqslant |x_0|+C_2$. Следовательно, $\forall (x_0, y_0)\in R^2$ траектория $\{x^+(n, x_0, y_0), y^+(n, x_0, y_0)\}$ ограничена. Кроме того, все отрицательные траектории системы (5) уходят в бесконечность при $n\to-\infty$ (пример 1). Поэтому $\dot{M}\Subset\{\hat{x}^\infty(n), \hat{y}^\infty(n)\}$. Все условия теоремы С выполнены, что и требовалось.

Приложение

Доказательство теоремы А основывается на приводимых ниже леммах 1—6.

Лемма 1. Если для $x^+(n, x_0)$ $(x^-(n, x_0))$ существует ω-предельная (α-предельная) точка x^*, т. е. $\exists\, n_k\to\infty\,(-\infty)$, $k\to\infty$: $x(n_k, x_0)\to x^*$, то существует целая траектория $x^\infty(n, x^*)$, все точки которой являются ω-предельными (α-предельными) для рассматриваемой траектории.

Доказательство. В силу (3) $\forall\, n_k\in[0, \infty[$, $\forall\, N\in\{N\in Z: n_k+N\geqslant 0\}$ имеем $x(n_k+N, x_0)=x(N, x(n_k, x_0))$. Переходя к пределу, получаем

$$\forall\, N\in Z: \lim_{k\to\infty} x(n_k+N, x_0)=x(N, x^*). \tag{6}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Если $x(n, x_0)\in\bar{B}_r$ при $n\geqslant 0$ $(n\leqslant 0)$ и x^* ее ω-предельная (α-предельная) точка, то существует целая траектория $x^\infty(n, x^*)$, лежащая на одной и той же поверхности уровня функции $V(x): x^\infty(n, x^*)\in\{x\in\bar{B}_r: V(x)=V(x^*)\}$.

Доказательство. По условию $\exists\, n_k\to\infty$, $k\to\infty: x(n_k, x_0)\to x^*$. В силу (2) $\forall\, N\in Z: V[x(n_k+N, x_0)]\to C=\mathrm{const}>0$, $k\to\infty$. С другой стороны, с учетом (6) имеем: $\forall\, N\in Z: V[x(n_k+N, x_0)]\to V[x(N, x^*)]$. Сравнивая, получаем $\forall\, N\in Z: V[x(N, x^*)]=C=V(x^*)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если для системы (1) существует такое $0<\sigma\leqslant h$, что выполняются условия: 1) $\dot{m}^\sigma\Subset x^\infty(n)$ 2) $\dot{m}^h\Subset x^-(n)\to 0$, то для любого

$0<\varepsilon<\sigma: \dot{m}^\varepsilon\,\overline{\ni}\, x^-(n)$.

Доказательство. Пусть от противного $\exists\, 0<r<\sigma$, $\exists\, x_0\in\dot{m}^r$, $\exists\, x^-(n, x_0): \dot{m}^r\ni x^-(n, x_0)$. Тогда $\exists\, x^*\in\Omega_\alpha(x^-(n, x_0))\subset\overline{m^r}$. Если $x^*\neq 0$, то (лемма 2) $\exists\, x^\infty(n, x^*)\in\dot{m}^\sigma$, что противоречит 1). Пусть $x^*=0$, т. е. $\exists\, n_k\to-\infty$, $k\to\infty: x^-(n_k, x_0)\to 0$. С другой стороны, согласно 2) $x^-(n, x_0)\not\to 0$. Следовательно, $\exists\, 0<\rho<\|x_0\|$ такое, что при $n\to-\infty$ траектория $x^-(n, x_0)$ бесконечное число раз побывает в области $\rho\leqslant\|x\|\leqslant r$. Поэтому $\exists\, y^*$, $0<\rho\leqslant\|y^*\|\leqslant r$, $V(y^*)=0$, $y^*\in\Omega_\alpha(x^-(n, x_0))$. Таким образом, этот случай сводится к предыдущему. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $0<L<h$ — произвольное число, а число $0<l(L)<L$ таково, что $\forall\, \|x\|<l(L)\Rightarrow\|f(x)\|<L$. Если нуль системы (1) неустойчив по Ляпунову, то $\exists\, 0<\varepsilon_0<h$ такое, что $\forall\, 0<\varepsilon\leqslant l(\varepsilon_0)$ найдется точка $x_0\in\{x: V(x)=0, \varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant\varepsilon_0\}$ и траектория $x^-(n, x_0)$, для которых

$x^-(n, x_0)\setminus\{x_0\}\in\dot{m}^\varepsilon$.

Доказательство. По условию нуль системы (1) неустойчив. Следовательно, $\exists\, 0<\varepsilon_0<h$ такое, что $\forall\, 0<\varepsilon\leqslant l(\varepsilon_0)$, $\exists\{y_k\}$, $y_k\to 0$, $k\to\infty$, $y_k\in\dot{B}_\varepsilon$, $\exists\,\{n_k>0\}$: $\|x(n, y_k)\|<\varepsilon$, $n\in[0, n_k-1]$; $\varepsilon_0>\|f(x(n_k-1, y_k))\|=\|x(n_k y_k\|=\|\xi_k\|\geqslant\varepsilon$. Очевидно, что $n_k\to\infty$, $k\to\infty$. Не нарушая общности, можно считать, что $\xi_k\to x_0$, $k\to\infty$; $\varepsilon\leqslant\|x_0\|\leqslant\varepsilon_0$. Так как $0\leqslant V(\xi_k)\leqslant V(y_k)$, то $V(x_0)=0$. Кроме того, $\varepsilon>\|x(n, y_k)\|_{n=0}^{n=n_k-1}=\|x(n-n_k, x(n_k, y_k))\|_{n=0}^{n=n_k-1}=\|x(N, \xi_k)\|_{N=-1}^{N=-n_k}\Rightarrow\exists\, x^-(n, x^0)\setminus\{x_0\}\in\dot{B}_\varepsilon$. Далее имеем для любого $N\leqslant 0$ и достаточно большого $n_k>0: 0\leqslant V[x(N, x(n_k, y_k))]=V[x(n_k+N, y_k)]\leqslant V(y_k)$. Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим $V[x(N, x_0)]=0$, $\forall\, N\leqslant 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если для системы (1) выполняются условия 1), 2) леммы 3, то нуль этой системы устойчив по Ляпунову.

Доказательство. В силу леммы 3 $\exists\, 0<R<\sigma : \dot{\bar{m}}^R \ni x^-(n, x_0)$, $x_0 \in \dot{\bar{m}}^R$. Предположим от противного, что нуль системы (1) неустойчив. Тогда (лемма 4) $\exists\, 0<\varepsilon_0<h$ (без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_0<R$), $\exists\, 0<r<l(\varepsilon_0)$, $\exists\, x_0 \in \{x : V(x)=0,\ r \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon_0\} \subset \dot{\bar{m}}^R$: $x^-(n, x_0) \setminus \{x_0\} \in \dot{m}^r \Rightarrow x^-(n, x_0) \in \dot{\bar{m}}^R$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 6. Для того, чтобы нуль системы (1) был v-асимптотически устойчив, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1), 2) леммы 3.

Доказательство. Необходимость. Условие 2) является необходимым условием v-устойчивости. Остается показать 1). Пусть от противного $\forall\, 0<\rho<\delta$ (δ — число из определения v-асимптотической устойчивости) $\exists\, x_0 \in \dot{m}^\rho : \dot{x}^\infty(n, x_0) \in \dot{m}^\rho \Rightarrow \exists\, x^* \in \Omega_\alpha(x^-(n, x_0)) \subset m^\delta \Rightarrow x^+(n, x^*) \to 0$, $n \to \infty$. Так как $x^+(n, x^*) \in \Omega_\alpha(x^-(n, x_0))$, то $\exists\, n_k<0 : \dot{m}^h \supset \dot{m}^\rho \ni x^-(n_k, x_0) \to 0$, что несовместимо с v-устойчивостью. Достаточность. Из условий 1), 2) следует (лемма 5), что нуль системы (1) v-устойчив, т. е. $\forall\, 0<\varepsilon<\sigma$, $\exists\, 0<\delta\leqslant\varepsilon : \forall\, x_0 \in m^\delta \Rightarrow x^+(n, x_0) \in m^\varepsilon \Rightarrow \exists\, x^* \in \Omega_\omega(x_0) \subset \bar{m}^\varepsilon$. Остается показать, что $x^+(n, x_0) \to 0$. Если $\Omega_\omega(x_0)$ состоит из одной точки $x^*=0$, то лемма, очевидно, доказана. Пусть $x^* \neq 0$. Тогда (лемма 2) $x^\infty(n, x_0) \in \dot{m}^\varepsilon \subset \dot{m}^\sigma$, что противоречит условию 1). Лемма полностью доказана.

Замечание. а) Условия 1), 2) в формулировке леммы 6 можно заменить одним эквивалентным условием: $\dot{m}^\sigma \ni x^-(n)$, б) при $V(x) \equiv 0$ лемма 6 является дискретным аналогом теоремы В. И. Зубова ([3], теорема 10).

Теорема А вытекает из сопоставления лемм 5, 6 и замечания к лемме 6 (ср. [4], с. 790).

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Н. Г., Калитин Б. С., Покатаев А. В. К устойчивости дискретных систем.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1543-79. Деп. от 05.07.79.
2. Булгаков Н. Г. Структура окрестности v-устойчивой точки покоя периодических систем.— В кн.: Проблемы оптимального управления.— Минск, 1981.
3. Зубов В. И. Устойчивость движения.— М., 1973.
4. Булгаков Н. Г.— Докл. АН БССР, 1980, № 9, т. 24, с. 788.

Поступила в редакцию 29.06.81.

Кафедра МОУ

УДК 517.928

ДАНГ ДИНЬ ТЯУ

ИССЛЕДОВАНИЕ СИЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧНЫХ d-ЧИСЕЛ

Рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_{k_n}, \ldots, x_n, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in R$, $1 \leqslant k_n \leqslant k_{n+1} \leqslant n+1$, $(n=1, 2, \ldots)$.

Пусть существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел (n_s) такая, что $k_{n_s}=n_s$ $(s=1, 2, \ldots)$.