ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М., 1950.
2. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н.— Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 3, с. 453.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М., 1959.
4. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.— М., 1964.
5. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова.— М., 1970.
6. Булгаков Н. Г., Калитин Б. С.— Весцi АН БССР, 1978, № 3, с. 32.
7. Булгаков Н. Г., Калитин Б. С.— Весцi АН БССР, 1979, № 1, с. 70.
8. Малкин И. Г. Устойчивость движения.— М., 1966.
9. Каменков Г. В.— Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, 1939, № 9.
10. Зубов В. И. Устойчивость движения.— М., 1973.

Поступила в редакцию 24.10.80.

Кафедра МОУ

УДК 519.21

В. П. КИРЛИЦА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ РЕШАЮЩИМИ ПРАВИЛАМИ

Рассмотрим следующую задачу стохастического программирования:

$$M(c'x) \to \max, \tag{1}$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i\right\} \geqslant p_i, \ i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Будем считать матрицу $A = \|a_{ij}\|$ детерминированной, а b и c независимыми случайными векторами. Зададим решающее правило в виде

$$x = Db, \tag{3}$$

где D — неизвестная детерминированная матрица размера $n \times m$. Найти решение задачи (1)—(3)— значит вычислить элементы d_{ij} матрицы D, при которых $M(c'x)$ достигает своего максимального значения при ограничениях (2), (3).

Подробная библиография работ по стохастическому программированию содержится в монографиях [1, 2].

В монографии [1] поставленная задача (1)—(3) решена в предположении, что составляющие вектора ограничений распределены нормально. Однако метод, предложенный в указанной монографии для решения задачи (1)—(3), не применим для других типов распределения компонент b_i вектора ограничений b.

В данной работе предлагается новый подход к решению задачи (1)—(3) в общем случае, т. е. когда компоненты b_i вектора ограничений b являются непрерывно распределенными случайными величинами.

Рассмотрим суть предлагаемого метода решения задачи (1)—(3). Преобразуем запись задачи (1)—(3) к эквивалентному детерминированному виду. Подставим (3) в выражение (1) для показателя качества решения задачи. Учитывая стохастическую независимость векторов c и b, имеем $M(c'x) = M(c'Db) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \bar{b}_i \bar{c}_j$,

где $\bar{c}$ и $\bar{b}$ — математические ожидания векторов c и b. Приведем теперь условия (2) к эквивалентному детерминированному виду. Обозначим через $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ i-ю строку матрицы A. Нетрудно видеть, что условия (2), (3) эквивалентны соотношениям

$$P\{a_i' Db - b_i \leqslant 0\} \geqslant p_i, \ i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Случайная величина $a_i' Db - b_i$ является линейной комбинацией случайных величин b_i, $i=\overline{1, m}$. Учитывая это нетрудно вычислить плотность распределения $p_i(x;\ D)$ этой случайной величины, которая зависит от элементов d_{ij} матрицы D. Если известны аналитические выражения для плотностей распределения $p_i(x;\ D)$, то, очевидно, вероятностные ограничения (4) эквивалентны следующим детерминированным ограничениям: $\int\limits_{-\infty}^{0} p_i(x;\ D)\,dx \geqslant p_i,\ i=\overline{1,\ m}$.

Реализуем предлагаемый метод решения задачи для следующего простейшего типа распределения случайных величин b_i, $i=\overline{1, m}$. Предположим, что одна из компонент вектора ограничений b распределена равномерно, а остальные компоненты — детерминированные величины. Не ограничивая общности, будем считать, что величина b_1 равномерно распределена на интервале $[\alpha, \beta]$, а компоненты $b_2, \ldots, b_m$ — детерминированные величины.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{D}=\begin{bmatrix} d_{12} & \ldots & d_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ d_{n2} & \ldots & d_{nm} \end{bmatrix},\ d=\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{n1} \end{bmatrix},\ \overline{b}=\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Учитывая эти обозначения, вероятностные ограничения (4) можно записать в виде

$$P\{b_1(a_1'd-1)+a_1'\overline{D}\overline{b}\leqslant 0,\}\geqslant p_1, \tag{5}$$

$$P\{b_1a_i'd+a_i'\overline{D}\overline{b}-b_i\leqslant 0\}\geqslant p_i,\ i=\overline{2,\ m}. \tag{6}$$

Вероятностное ограничение (5) сведем к эквивалентному детерминированному ограничению. При этом важную роль играет знак выражения $a_1'd-1$. Если $a_1'd-1=0$, то ограничение (5) эквивалентно неравенству: $a_1'\overline{D}\overline{b}\leqslant 0$. Если $a_1'd-1>0$, то соотношение (5) можно записать следующим образом: $P\left\{b_1\leqslant-\dfrac{a_1'\overline{D}\overline{b}}{a_1'd-1}\right\}\geqslant p_1$. Учитывая, что b_1 распределена равномерно на интервале $[\alpha,\ \beta]$, последнее неравенство равносильно выполнению детерминированных неравенств

$$\begin{cases}[\alpha+p_1(\beta-\alpha)](a_1'd-1)+a_1'\overline{D}\overline{b}\leqslant 0,\\ a_1'd-1\geqslant 0.\end{cases} \tag{7}$$

Если $a_1'd-1<0$, то ограничение (5) можно записать в виде $P\left\{b_1<\right.$ $\left.<\dfrac{a_1'\overline{D}\overline{b}}{1-a_1'd}\right\}\leqslant 1-p_1$. Поскольку случайная величина b_1 распределена равномерно на интервале $[\alpha,\ \beta]$, то предыдущее неравенство эквивалентно неравенствам:

$$\begin{cases}[\alpha+(1-p_1)(\beta-\alpha)](a_1'd-1)\,a_1'\overline{D}\overline{b}\leqslant 0,\\ a_1'd-1<0.\end{cases} \tag{8}$$

Нетрудно показать, что область, определяемая неравенствами (7), (8), может быть записана в виде:

$$\begin{cases}[\alpha+p_1(\beta-\alpha)](a_1'd-1)+a_1'\overline{D}\overline{b}\leqslant 0,\\ [\alpha+(1-p_1)(\beta-\alpha)](a_1'd-1)+a_1'\overline{D}\overline{b}\leqslant 0.\end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, мы показали, что стохастическое ограничение (5) эквивалентно детерминированному ограничению (9).

Аналогично рассуждая, можно показать, что стохастические ограничения (6) эквивалентны следующим детерминированным ограничениям:

$$\begin{cases}[\alpha + p_i(\beta - \alpha)]\, a_i' d + a_i' \overline{Db} - b_i \leqslant 0,\\ [\alpha + (1 - p_i)(\beta - \alpha)]\, a_i' d + a_i' \overline{Db} - b_i \leqslant 0, \quad i = \overline{2,\ m}.\end{cases}$$

Итак, в рассматриваемом случае, задача (1)—(3) сводится к задаче обычного линейного программирования.

Рассмотрим следующий

Пример.

$$M(x_1 + x_2) \to \min, \tag{10}$$

$$P\{2x_1 - 4x_2 \leqslant b_1\} \geqslant 0{,}7, \tag{11}$$

$$P\{-3x_1 + x_2 \leqslant 6\} \geqslant 0{,}6, \tag{12}$$

где случайная величина b_1 распределена равномерно в интервале $[-2{,}2]$, а решающее правило задано в виде (3).

В соответствии с изложенной теорией, решение задачи (10)—(12) сводится к решению следующей задачи линейного программирования:

$$d_{21} + d_{22} \to \min,$$

$$\begin{cases}0{,}4d_{11} - 0{,}8d_{21} + 3d_{12} - 6d_{22} \leqslant 0{,}2,\\ -0{,}4d_{11} + 0{,}8d_{21} + 3d_{12} - 6d_{22} \leqslant -0{,}2,\\ -0{,}6d_{11} + 0{,}2d_{21} - 9d_{12} + 3d_{22} \leqslant 3,\\ 0{,}6d_{11} - 0{,}2d_{21} - 9d_{12} + 3d_{22} \leqslant 3,\end{cases}$$

которая имеет следующее решение: $d_{11}^0 = -0{,}1$; $d_{12}^0 = -0{,}4$; $d_{21}^0 = -0{,}3$; $d_{22}^0 = -0{,}2$. Таким образом, решение задачи (10)—(12) имеет вид: $x_1^0 = -0{,}1 \cdot b_1 - 2{,}4$; $x_2^0 = -0{,}3 \cdot b_1 - 1{,}2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации.— М., 1974.
2. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования.— М., 1976.

Поступила в редакцию
10.06.81.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 681.3.06

Г. А. ДРОБУШЕВИЧ, И. В. КОМАРОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОЙ ОБРАБОТКИ ФАЙЛОВ

Под задачей совместной обработки файлов будем понимать управление передвижением файлов с последовательной организацией, используемых программой. В [1] предлагаются методы проектирования программ совместной обработки $n(n \geqslant 2)$ одинаково упорядоченных файлов с оценкой сложности проектирования $O(2^n)$. Это фактически означает, что в одном программном модуле необходимо ограничиваться двумя-тремя входными файлами, что никак не способствует эффективности (по времени и памяти) решения задач АСУП.

В настоящей работе описывается математическая модель и приводится алгоритм решения достаточно широкого класса задач, а именно — задач совместной обработки упорядоченных файлов, множество значений ключей которых образует древовидную структуру соответствия записей. Этот класс охватывает большую часть задач АСУП, которые могут быть решены с использованием методов совместной обработки файлов. При наличии алгоритма решения задач этого класса сложность проектирования программ решения таких задач уже не зависит от числа входных файлов.

1. Файл **F** можно представить как множество записей $\{z\}$, а каждую запись — как слово в некотором алфавите V. Мы будем рассматривать