Математика и механика

УДК 517.9

Б. С. КАЛИТИН

К УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Метод функций Ляпунова [1] позволяет изучать устойчивость решений, описываемых дифференциальными уравнениями с существенно нелинейной правой частью. Дополненный идеей использования знакоопределенных функций со знакопостоянной производной по времени [2—4], метод приобрел большое практическое значение (см [5]). Наряду с этим в [6] отмечено, что для установления свойства асимптотической устойчивости и устойчивости в целом стационарных систем можно воспользоваться и знакопостоянными функциями Ляпунова. Примеры применения таких функций содержатся в [7]. К последним примыкают и предлагаемые исследования.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum\limits_{k=m}^{\infty} P_i^{(k)}(x) + \sum\limits_{s=\nu}^{\infty} X_i^{(s)}(x)\,\alpha_{is}(y), \\ \dot{y} = Y(x,\ y) \end{cases} \tag{1}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_p)$, $y=(y_1,\ldots,y_q)$, $m\geqslant 1$, $\nu\geqslant 1$; $P_i^{(k)}$ и $X_i^{(k)}$ — однородные формы k-ой степени по компонентам вектора x, а α_{is} — аналитические функции, исчезающие при $y=0$. Предположим, что ряды в правой части (1) равномерно сходятся в достаточно малой окрестности начала координат Евклидова пространства R^{p+q}. Кроме того, пусть вектор-функция Y непрерывна, $Y(0,\ 0)=0$ и в шаре $B_H=\{z\in R^{p+q} : \|z\|<H\}$, $H>0$, принадлежащем указанной окрестности, выполнены условия существования и единственности решений системы (1).

В случае, когда Y — голоморфная в окрестности начала координат функция, к системе (1) приводятся многие системы, соответствующие тем или иным критическим случаям [9—10].

Заметим, что система (1) обладает интегральной поверхностью $x=0$. Попытаемся построить знакопостоянную функцию Ляпунова переменной x, удовлетворяющую всем требованиям теоремы 1 [6].

Рассмотрим систему в некотором смысле первого приближения для первой группы уравнений (1)

$$\dot{x}_i = P_i^{(m)}(x),\ i=\overline{1,\ p}. \tag{2}$$

Предположим, что нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво. Тогда по теореме 36 [10] с учетом [10, с. 138] существует функция Ляпунова V в виде формы $(r+1-m)$-ой степени по переменным $x_1,\ldots$ $\ldots, x_p$, являющаяся определенно положительной функцией, производная которой, $\dot{V}=W$, вдоль решений системы (2) определенно отрицательна. Здесь r — достаточно большое натуральное число. Вычислим теперь полную производную по времени от $V(x)$ в силу системы (1). Легко видеть, что при условии $r=\nu$ эта производная представима в виде $\frac{dV(x)}{dt}=W(x)+O(\|x\|^r)\alpha(y)+o(\|x\|^r)$, $\alpha(0)=0$. Следовательно, при достаточно малых отклонениях норм $\|x\|$ и $\|y\|$ будет выполнено неравенство $dV(x)/dt$, если $x\neq 0$. Таким образом, если $r=\nu$, то для системы (1) существует знакоположительная функция Ляпунова, производная по времени от которой в силу этой системы является знакоотрицательной функцией в достаточно малой окрестности начала координат. Эта функция обращается в нуль на интегральной поверхности, на которой система (1) принимает вид

$$\dot{y}=Y(0,\ y). \tag{3}$$

Если нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво, то (см. [3, 10]) существует окрестность точки $y=0$, не содержащая ненулевых отрицательных полутраекторий. Поэтому условие 2) теоремы 1 [6] выполняется. Условие 3) этой теоремы заведомо выполнено, ибо в данном случае $M\setminus M_0=\varnothing$.

Итак, пришли к следующему утверждению.

Теорема 1. Пусть для системы (2) существует определенно положительная функция Ляпунова в виде формы не выше $(\nu+1-m)$-ой степени по переменным $x_1, \ldots, x_p$, полная производная по времени от которой в силу этой системы — определенно отрицательная форма ν-ой степени. Тогда, если нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (1) также асимптотически устойчиво.

Следствие. Если $m=1$ и нулевое решение системы (2), (3) асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (1) также асимптотически устойчиво.

Действительно, в этом случае по известной теореме Ляпунова [1] форму V можно всегда выбрать квадратичной.

Пример 2. Пусть задана механическая система с голономными стационарными связями, положение которой определяется обобщенными координатами $q=(q_1, \ldots, q_n)$, а движение ее описывается векторным уравнением Лагранжа второго рода $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q(q,\ \dot{q})$ $\left(\dot{q}=\frac{dq}{dt}\right)$.

Предположим, что кинетическая энергия системы $T=\frac{1}{2}\dot{q}'\dot{q}$, а нелинейные обобщенные силы имеют вид $Q(q,\ \dot{q})=-\left[\frac{\partial\alpha(q)}{\partial q}+h(q,\ \dot{q})E\right]\dot{q}-$ $-h(q,\ \dot{q})\alpha(q)$, где E — единичная матрица, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Будем считать, что вектор-функция α непрерывно дифференцируема, равна нулю при $q=0$, а h — непрерывная скалярная функция.

Итак, мы имеем следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка: $\ddot{q}+\left[\frac{\partial\alpha(q)}{\partial q}+h(q,\ \dot{q})E\right]\dot{q}-h(q,\ \dot{q})\alpha(q)$.

Теорема 2. Если выполнены условия: а) все собственные числа матрицы $-\partial\alpha(0)/\partial q$ имеют отрицательные действительные части; в) $h(q,\ \dot{q})>$ >0 в достаточно малой окрестности значений $q=0$, $\dot{q}=0$, то невозмущенное движение $q=\dot{q}=0$ асимптотически устойчиво относительно обобщенных координат q и обобщенных скоростей $\dot{q}$.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $V(q,\ \dot{q})=$ $=[\dot{q}+\alpha(q)]'[\dot{q}+\alpha(q)]$. Ясно, что $V(q,\ \dot{q})\geqslant 0$, а производная по времени, вычисленная от V в силу уравнений движения, $\dot{V}(q,\ \dot{q})=-h(q,\ \dot{q})[\dot{q}+$ $+\alpha(q)]'[\dot{q}+\alpha(q)]$. В силу в) $\dot{V}(q,\ \dot{q})\leqslant 0$, причем $M=M_0$ (см. теорему 1 [6]), поэтому выполнены условия 1) и 3) теоремы 1 [6]. Кроме того, поверхность $\dot{q}+\alpha(q)=0$, как нетрудно проверить, интегральная, и на ней с учетом а) решение $q=0$ асимптотически устойчиво. Условие 2) теоремы 1 [6] проверяется так же, как и в теореме 1. Утверждение теоремы 2 поэтому следует из теоремы 1 [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М., 1950.
2. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н.— Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 3, с. 453.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М., 1959.
4. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.— М., 1964.
5. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова.— М., 1970.
6. Булгаков Н. Г., Калитин Б. С.— Весці АН БССР, 1978, № 3, с. 32.
7. Булгаков Н. Г., Калитин Б. С.— Весці АН БССР, 1979, № 1, с. 70.
8. Малкин И. Г. Устойчивость движения.— М., 1966.
9. Каменков Г. В.— Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, 1939, № 9.
10. Зубов В. И. Устойчивость движения.— М., 1973.

Поступила в редакцию 24.10.80.

Кафедра МОУ

УДК 519.21

В. П. КИРЛИЦА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ РЕШАЮЩИМИ ПРАВИЛАМИ

Рассмотрим следующую задачу стохастического программирования:

$$M(c'x) \to \max, \tag{1}$$

$$P\left\{\sum_{=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i\right\} \geqslant p_i,\ i=\overline{1,\ m}. \tag{2}$$

Будем считать матрицу $A=\|a_{ij}\|$ детерминированной, а b и c независимыми случайными векторами. Зададим решающее правило в виде

$$x=Db, \tag{3}$$

где D — неизвестная детерминированная матрица размера $n\times m$. Найти решение задачи (1)—(3)— значит вычислить элементы d_{ij} матрицы D, при которых $M(c'x)$ достигает своего максимального значения при ограничениях (2), (3).

Подробная библиография работ по стохастическому программированию содержится в монографиях [1, 2].

В монографии [1] поставленная задача (1)—(3) решена в предположении, что составляющие вектора ограничений распределены нормально. Однако метод, предложенный в указанной монографии для решения задачи (1)—(3), не применим для других типов распределения компонент b_i вектора ограничений b.

В данной работе предлагается новый подход к решению задачи (1)—(3) в общем случае, т. е. когда компоненты b_i вектора ограничений b являются непрерывно распределенными случайными величинами.

Рассмотрим суть предлагаемого метода решения задачи (1)—(3). Преобразуем запись задачи (1)—(3) к эквивалентному детерминированному виду. Подставим (3) в выражение (1) для показателя качества решения задачи. Учитывая стохастическую независимость векторов c и b, имеем $M(c'x)=M(c'Db)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\bar{b}_i\bar{c}_j$,
где $\bar{c}$ и $\bar{b}$ — математические ожидания векторов c и b. Приведем теперь условия (2) к эквивалентному детерминированному виду. Обозначим через $a_i=(a_{i1},\ \ldots,\ a_{in})$ i-ю строку матрицы A. Нетрудно видеть, что условия (2), (3) эквивалентны соотношениям

$$P\{a_i'Db-b_i\leqslant 0\}\geqslant p_i,\ i=\overline{1,\ m}. \tag{4}$$

Случайная величина $a_i'Db-b_i$ является линейной комбинацией случай-