УДК 535.421

А. П. МАКАРОВ

ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЭЛЕЯ

В работах [1—3] подробно обсуждаются свойства интегральных преобразований, наиболее употребительных в скалярной теории дифракции, и формулируются теоремы отсчетов, в которых функции отсчетов определяются видом ядер интегральных преобразований. Однако для преобразования Рэлея не приводится конкретных выражений функций отсчетов. В предлагаемой статье дан вывод теоремы отсчетов на основании свойств ядра интегрального преобразования Рэлея, находится вид функций отсчетов и кратко обсуждаются условия применимости полученных выражений.

Теорема отсчетов для плоскопараллельного поля. Решение скалярного волнового уравнения Гельмгольца для плоскопараллельного поля при граничных условиях Рэлея дается следующим интегральным преобразованием [3]:

$$U(x,\ z)=\int_{-\infty}^{+\infty} V(f,\ z_0)\,H(f,\ z-z_0)\,e^{j2\pi fx}df, \tag{1}$$

где

$$V(f,\ z_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} U(x,\ z_0)\,\mathrm{e}^{-j2\pi fx}\,dx, \tag{2}$$

$$H(f,\ z)=\begin{cases} e^{jz\sqrt{k^2-(2\pi f)^2}}, & |f|\leqslant \dfrac{k}{2\pi} \\ e^{-z\sqrt{(2\pi f)^2-k^2}}, & |f|>\dfrac{k}{2\pi}\end{cases}, \tag{3}$$

f — пространственная частота; $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$; λ — длина волны излучения и $z>z_0$, а $U(x,\ z_0)$ представляет собой граничное условие на прямой $z=z_0$. Выражение (1) является интегральным преобразованием Рэлея с ядром $H(f,\ z-z_0)$, называемым также передаточной функцией свободного пространства для плоскопараллельного поля. Обозначив через $V(f,\ z)$ Фурье-спектр функции $U(x,\ z)$, получим для него следующее алгебраическое уравнение:

$$V(f,\ z)=V(f,\ z_0)H(f,\ z-z_0). \tag{4}$$

Если функция $V(f,\ z_0)$ обращается в нуль за пределами сегмента $[-f_1,\ f_1]$, то $V(f,\ z)$ также обращается в нуль за пределами этого сегмента и наоборот. Рассмотрим поведение функции $H(f,\ z-z_0)$ для $|f|>\dfrac{k}{2\pi}$. Для этого введем величину $|\Delta f|$, равную модулю разности пространственной частоты f и $f_0 = \pm \frac{k}{2\pi}$, для которой величина функции H уменьшается от 1 в точках $\pm \frac{k}{2\pi}$ до 0,001 ($\approx e^{-7}$). Введя безразмерную величину $\delta = \frac{|\Delta f|}{|f_0|}$, получаем

$$\delta = \sqrt{1 + \frac{49}{k^2 (z - z_0)^2}} - 1. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что величина $|\Delta f|$, определяющая скорость убывания функции H, зависит от произведения $k(z-z_0)$. Выбрав указанную величину достаточно большой, будем приближенно считать, что функция $H(f, z - z_0)$ обращается в нуль за пределами сегмента $\left[-\frac{k}{2\pi}, \frac{k}{2\pi}\right]$. Тогда из (4) следует, что $V(f, z)$ за пределами указанного отрезка обращается в нуль, и можно считать, что $V(f, z_0)$ также обращается в нуль вне этого отрезка. Разложим функцию $V(f, z_0)$ на сегменте $\left[-\frac{k}{2\pi}, \frac{k}{2\pi}\right]$ в ряд Фурье:

$$V(f, z_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{-j2\pi f\left(\frac{m\pi}{k}\right)}, \qquad (6)$$

где

$$c_m = \frac{\pi}{k} \int_{-k/2\pi}^{k/2\pi} V(f, z_0)\, e^{j2\pi f\left(\frac{m\pi}{k}\right)} df = \frac{\pi}{k} U\left(\frac{m\lambda}{2}, z_0\right). \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (4) и проводя обратное преобразование Фурье, получаем

$$U(x, z) = \frac{\pi}{k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{m\lambda}{2}, z_0\right) S_m(x, z - z_0), \qquad (8)$$

где функция отсчетов $S_m(x, z-z_0)$ задается выражением

$$S_m(x, z) = \int_{-k/2\pi}^{k/2\pi} e^{jz\sqrt{k^2 - (2\pi f)^2}}\, e^{j2\pi f\left(x - \frac{m\lambda}{2}\right)} df.$$

Представим функцию $S_m(x, z)$ в виде $S_m(x, z) = R_m(x, z) + jT_m(x, z)$, где

$$R_m(x, z) = \int_{-k/2\pi}^{k/2\pi} \cos\{z\sqrt{k^2 - (2\pi f)^2}\}\, e^{j2\pi f\left(x - \frac{m\lambda}{2}\right)} df, \qquad (9)$$

$$T_m(x, z) = \int_{-k/2\pi}^{k/2\pi} \sin\{z\sqrt{k^2 - (2\pi f)^2}\}\, e^{j2\pi f\left(x - \frac{m\lambda}{2}\right)} df. \qquad (10)$$

Выражая в (9) и (10) cos и sin через функции Бесселя и используя интегралы Сонина и Пуассона [4, 5], можно найти явный вид функций R_m и T_m:

$$R_m(x, z) = \frac{k}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n + 1/2)} \left[\frac{(kz)^2}{2}\right]^n \frac{J_{n+1/2}\left[k\left(x - \frac{m\lambda}{2}\right)\right]}{\left[k\left(x - \frac{m\lambda}{2}\right)\right]^{n+1/2}},$$

$$T_m(x, z) = \frac{kz}{2} \cdot \frac{J_1\left[k\sqrt{\left(x - \frac{m\lambda}{2}\right)^2 + z^2}\right]}{\sqrt{\left(x - \frac{m\lambda}{2}\right)^2 + z^2}},$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν, а $\Gamma(x)$ — Гамма-функция Эйлера [6]. Таким образом, доказана

Теорема. Для достаточно большой величины произведения $k(z-z_0)$ решение скалярного волнового уравнения Гельмгольца для плоскопараллельного поля приближенно может быть представлено с помощью отсчетов функции $U(x, z_0)$, отстоящих друг от друга на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$.

Теорема отсчетов для поля в трехмерном пространстве. Обобщая (1)—(4) для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве, придем к следующим выражениям для интегрального преобразования Рэлея [3]:

$$U(x, y, z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} V(f_x, f_y, z_0) H(f_x, f_y, z-z_0) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y,$$

$$V(f_x, f_y, z_0) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z_0) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dxdy,$$

$$H(f_x, f_y, z) = \begin{cases} e^{jz\sqrt{k^2-(2\pi f_x)^2-(2\pi f_y)^2}}, & f_x^2 + f_y^2 \leqslant \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \\ e^{-z\sqrt{(2\pi f_x)^2+(2\pi f_y)^2-k^2}}, & f_x^2 + f_y^2 > \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2. \end{cases}$$

Вводя радиальную пространственную частоту $f_r = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ и рассматривая поведение функции H для $f_r > \frac{k}{2\pi}$, можно получить выражение для δ_r, совпадающее с (5). Продолжая рассуждения в указанном порядке и считая, что спектр Фурье граничного условия $U(x, y, z_0)$ не обладает симметрией, разложим его в двумерный ряд Фурье в квадрате $-\frac{k}{2\pi} \leqslant f_x \leqslant \frac{k}{2\pi}$, $-\frac{k}{2\pi} \leqslant f_y \leqslant \frac{k}{2\pi}$. Затем, отыскивая выражение для $U(x, y, z)$, получим двумерную теорему отсчетов

$$U(x, y, z) = \frac{\pi^2}{k^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{m\lambda}{2}, \frac{n\lambda}{2}, z_0\right) S_{mn}(x, y, z-z_0). \quad (11)$$

Воспользовавшись при вычислении функции S_{mn} тем, что $H(f_x, f_y, z-z_0)$ обращается в нуль за пределами круга $f_x^2 + f_y^2 = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2$, можно получить для действительной и мнимой частей функции отсчетов соответственно следующие выражения:

$$R_{mn}(x, y, z) = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\Gamma(i+1/2)} \left[\frac{(kz)^2}{2}\right]^i \times$$

$$\times \frac{J_{i+1}\left[k\sqrt{\left(x-\frac{m\lambda}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{n\lambda}{2}\right)^2}\right]}{\left[k\sqrt{\left(x-\frac{m\lambda}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{n\lambda}{2}\right)^2}\right]^{i+1}}, \quad (12)$$

$$T_{mn}(x, y, z) = \left(\frac{k}{2}\right)^{3/2} \frac{z}{\sqrt{\pi}} \frac{J_{3/2}\left[k\sqrt{\left(x-\frac{m\lambda}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{n\lambda}{2}\right)^2 + z^2}\right]}{\left[\sqrt{\left(x-\frac{m\lambda}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{n\lambda}{2}\right)^2 + z^2}\right]^{3/2}}. \quad (13)$$

Равенство (11) является аналитическим выражением следующей теоремы.

Теорема. Для достаточно большой величины произведения $k(z-z_0)$ решение уравнения Гельмгольца может быть представлено приближенно с помощью отсчетов функции $U(x, y, z_0)$, находящихся в узлах квадратной сетки со стороной $\frac{\lambda}{2}$.

Из (12), (13) видно, что функция отсчетов обладает круговой симметрией. Это можно объяснить тем, что отсчет представляет собой светящуюся точку, характер излучения которой меняется вместе с параметром z.

При выводе теорем отсчетов не давались конкретные оценки величины $|\Delta f|$, зависящей от произведения $k(z-z_0)$ и определяющей применимость (8) и (11). Величина $|\Delta f|$ определяется условиями измерения поля в определенном диапазоне частот. Используя (5), можно показать, например, что в радиодиапазоне при $z-z_0>10\lambda$ величина $|\Delta f|$ будет иметь порядок 10^{-2} и, следовательно, полученные теоремы могут быть применены для расчета поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kojima K. e. a.— Jap. J. Appl. Phys., 1975, v. 14, № 11, p. 1799.
2. Kojima K. e. a.— Jap. J. Appl. Phys., 1976, v. 15, № 11, p. 2181.
3. Kojima K.— Jap. J. Appl. Phys., 1977, v. 16, № 5, p. 817.
4. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах.— М., 1954.
5. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций.— М., 1971.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М., 1974.

Поступила в редакцию
20.03.80.

НИИ ПФП

УДК 620.19 : 778.4.621.382.002

А. З. НИКОЛАЕНЯ, Л. Д. БУЙКО,
В. А. ШУЛАКОВ, В. А. РУДЕНКОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

В проектировании изделий электронной техники, а также при их эксплуатации возникает необходимость изучения температурных полей в окружающем пространстве исследуемых приборов. Решение этой проблемы осуществляется в основном оптическими интерференционными методами [1], которые позволяют проводить не только визуализацию и качественную оценку температурного поля, но и в некоторых случаях количественные измерения. К таким методам в полной мере может быть отнесена и голографическая интерферометрия, имеющая ряд преимуществ по сравнению с обычными оптическими методами. Для повышения точности изучения тепловых характеристик вместо функционирующей интегральной схемы (ИС) обычно используют тест-структуру аналогичного ей технологического исполнения [2].

В данной работе методом голографической интерферометрии исследовались тепловые поля специальной тест-структуры, содержащей четыре диода с последовательно параллельным включением, попарно размещенных между тремя 300-омными резисторами. Технологическое исполнение тест-структуры произведено по базовому технологическому маршруту биполярных ИС с толщиной эпитаксиальной пленки 3 мкм. Посадка кристаллов в металлокерамический корпус осуществлена с помощью эвтектики золото — кремний, а разварка — алюминиевой проволокой ∅ 40 мкм. Исследования проводились на голографической установке УИГ-2М по оптической схеме (рис. 1), обеспечивающей получение интерферограмм фазовых объектов методом двойных экспозиций и в режиме реального времени.