

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛИНЕЙНОЙ ВО ВРЕМЕНИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Д. В. ЛЕОНЕНКО¹⁾, М. В. МАРКОВА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет транспорта,
ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь

Рассмотрена задача о динамическом деформировании круговой трехслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоев. Модель деформирования пластины построена на основе гипотезы ломаной линии. Подход к рассмотрению поставленной задачи базируется на методе декомпозиции геометрии пластины, в соответствии с чем представлены уравнения движения для каждого участка постоянной толщины, вывод которых выполнен с помощью вариационного принципа Гамильтона. Получено частное аналитическое решение для вынужденных колебаний пластины, возбуждаемых линейным во времени внешним воздействием. Представленное решение основано на суперпозиции квазистатических и динамических составляющих перемещений, возникающих в пластине при колебаниях. Для апробации решения выполнены численные исследования для различных пакетов материалов.

Ключевые слова: динамическое деформирование трехслойной пластины; квазистатическое деформирование трехслойной пластины; круговая трехслойная ступенчатая пластина.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T22M-072).

OSCILLATIONS OF A CIRCULAR THREE-LAYER PLATE UNDER EXTERNAL LINEAR IN TIME LOAD

D. V. LEONENKO^a, M. V. MARKOVA^a

^aBelarusian State University of Transport, 34 Kirava Street, Homiel 246653, Belarus
Corresponding author: M. V. Markova (1987marinamarkova@gmail.com)

The problem of dynamic deformation of a circular three-layer plate with a step-variable thickness of the outer layers is considered. The plate deformation model is based on the zig-zag theory. The approach to the consideration of the problem relies on the method of decomposition of the plate geometry. According to this, we represent the equations of motion for each section of the plate with a constant thickness. The derivation of these equations predicated on Hamilton's variational principle. A particular analytical solution is obtained for forced plate vibration induced by linear in time external action.

Образец цитирования:

Леоненко ДВ, Маркова МВ. Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:49–63.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63>

For citation:

Leonenko DV, Markova MV. Oscillations of a circular three-layer plate under external linear in time load. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1: 49–63. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63>

Авторы:

Денис Владимирович Леоненко – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства. **Марина Владимировна Маркова** – аспирантка кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства. Научный руководитель – Д. В. Леоненко.

Authors:

Denis V. Leonenko, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of structural mechanics, geotechnical engineering and building structures, faculty of industrial and civil engineering.
leoden@tut.by
<https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>
Marina V. Markova, postgraduate student at the department of structural mechanics, geotechnical engineering and building structures, faculty of industrial and civil engineering.
1987marinamarkova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-7628-9491>

The represented solution is based on a superposition of quasi-static and dynamic components of the displacement appearing in the plate during vibrations. To test the obtained solution, numerical studies were performed for various materials.

Keywords: dynamic deformation of a three-layer plate; quasi-static deformation of a three-layer plate; circular three-layer stepped plate.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project T22M-072).

Введение

Композитные элементы не являются новым инженерным решением в проектной практике. Однако с каждым годом их применение при проектировании зданий и сооружений, деталей машин и механизмов только растет ввиду явных преимуществ композитных конструкций перед конструкциями, выполненными из одного материала. Сочетание разнородных свойств нескольких материалов позволяет наделять композитный элемент требуемыми физико-механическими характеристиками. Применение такого рода конструкций в проектной практике обуславливает необходимость создания расчетных механико-математических моделей, учитывающих неоднородность их структуры и особенности работы под нагрузкой.

Рассмотренный в данной статье дискретно-структурный подход [1] к моделированию деформирования трехслойной пластины в литературе получил название гипотезы ломаной линии (*zig-zag theory* [2; 3]).

Особенностью исследуемого в работе пакета является ступенчатое изменение толщины внешних слоев. Подобного рода локальные утолщения в наиболее напряженных местах конструкций позволяют улучшить работу элемента под нагрузкой без существенного изменения его собственного веса.

В исследованиях последних лет работа круговых элементов ступенчато-переменной толщины рассматривалась с позиции однослойной конструкции. Так, с опорой на теорию сдвига первого порядка Миндлина в публикациях [4–7] проведен анализ свободных колебаний круговых однослойных пластин с многократным ступенчатым изменением толщины. В статье [8] рассмотрена плавучая конструкция понтонного типа, колебания в которой возбуждаются воздействием ветра и волн. Конструкция моделируется как круговая пластина со свободными краями. Для улучшения использования материалов при сопротивлении напряжениям и деформациям толщина пластины ступенчато изменяется вдоль радиуса. В работе [9] предложен способ изменения формы колебаний круговой пластины со свободным краем с $n = 2$ на $n = 0$ путем ступенчатого увеличения толщины от середины к внешнему контуру. Авторы подчеркивают, что возможность приведения колебаний к форме $n = 0$ имеет весомое значение для измерительных и пусковых устройств, а также больших плавучих конструкций понтонного типа. С опорой на метод декомпозиции и применение дискретной свертки в статье [10] представлен новый подход к анализу свободных колебаний круговой ступенчатой пластины, который не требует условий регуляризации (ограниченности) решения в центральной точке. Точность описанного метода проверена путем сравнения полученных результатов с имеющимися данными. В работе [11] рассмотрена задача вращения круговой пластины переменной толщины, нагруженной по внешнему контуру. В публикации [12] исследовано тепловое нагружение профилированной кольцевой пластины с учетом теплообмена с окружающей средой.

Работа трехслойных конструкций ступенчато-переменной толщины рассмотрена в рамках прямоугольных пластин [13–15] и стержней [16]. В статье [13] изучено напряженно-деформированное состояние прямоугольной изгибаемой пластины со ступенчатым увеличением толщины растянутого лицевого слоя пакета. Решение поставленной задачи построено на гипотезе ломаной линии и вариационном принципе Лагранжа. В публикациях [14; 15] рассмотрена статическая (изгиб и устойчивость) и динамическая (собственные колебания) работа прямоугольной пластины с утолщениями в зоне как растянутого, так и сжатого слоя. В статье [16] проанализирован изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной толщиной одного из несущих слоев при его частичном опирании на упругое основание.

Статическое деформирование круговой трехслойной пластины со ступенчатым изменением толщины наружных слоев изучено в работах [17–20]. В настоящей статье рассмотрено построение решения для динамического деформирования схожей круговой пластины, представленной трехслойным пакетом, толщина внешних слоев которого ступенчато изменяется вдоль радиуса, а также проанализировано влияние физико-механических характеристик слагающих пакет материалов и геометрических параметров ступенчатого профиля на величину прогибов при вынужденных колебаниях, вызванных постоянной во времени нагрузкой, и квазистатическом деформировании.

Постановка задачи

В цилиндрической системе координат r, φ, z рассмотрим круговую трехслойную пластину со ступенчатым изменением толщины внешних слоев. Относительно толщины срединного слоя 3 внешние слои 1 и 2 имеют небольшую толщину, которая задается с помощью кусочно-постоянной функции Хевисайда $H_0(r)$ [21]:

$$h_1(r) = h_{1(I)} + (h_{1(II)} - h_{1(I)}) \cdot H_0(r - R_1), \quad h_2(r) = h_{2(I)} + (h_{2(II)} - h_{2(I)}) \cdot H_0(r - R_1),$$

где римскими цифрами I и II нумеруются соответственно центральный и наружный участки, имеющие различную толщину; R_1 – радиус центрального участка. Тогда общий радиус пластины, совпадающий с внешним контуром наружного участка, обозначим как R_{II} (рис. 1).

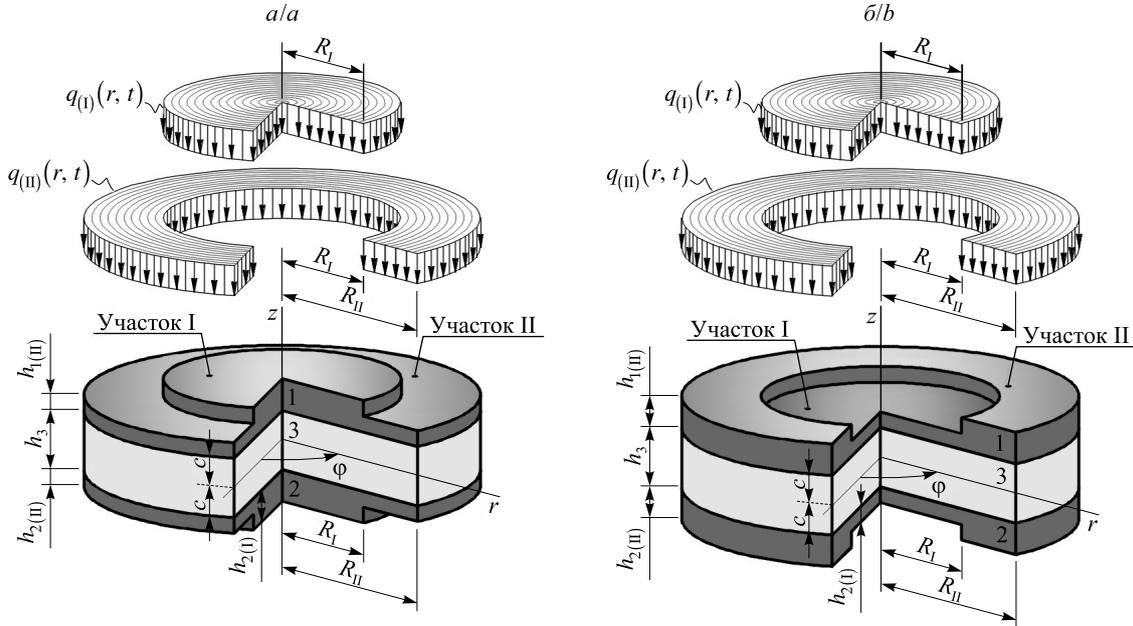


Рис. 1. Круговая трехслойная ступенчатая пластина с уширением (а) и сужением (б) в центральной части

Fig. 1. Circular three-layer stepped plate with widening (a) and narrowing (b) in the center

Срединный наполнитель, обеспечивающий монолитность всей конструкции трехслойного пакета и служащий для перераспределения усилий между внешними несущими слоями, имеет постоянную вдоль радиуса толщину $h_3 = 2c = \text{const}$. Координатная плоскость пластины r, φ совпадает со срединной плоскостью наполнителя.

Кинематика пакета описывается с помощью гипотезы ломаной линии, согласно которой деформирование тонких внешних слоев подчиняется классическим гипотезам Кирхгофа [22], а деформирование относительно толстого срединного наполнителя – сдвиговой теории Тимошенко [23].

Рассматриваемая пластина находится в покое и не имеет первоначальной деформации. В момент времени t_0 она воспринимает осесимметричное вертикальное внешнее воздействие $q = q_{(I, II)}(r, t)$, выводящее ее из состояния равновесия. В результате в пластине возникают прогиб $w(r, t)$, относительный сдвиг в наполнителе $\psi(r, t)$ и радиальное смещение координатной поверхности $u(r, t)$.

С использованием метода декомпозиции геометрии в работе [24] была представлена система дифференциальных уравнений движения для каждого участка рассматриваемой пластины, вывод которой основан на вариационном принципе Гамильтона [25]:

$$\Delta \Delta w_{(I, II)} + D_{(I, II)} m_{(I, II)} \Delta \dot{w}_{(I, II)} + D_{(I, II)} M_{1(I, II)} \dot{w}_{(I, II)} = D_{(I, II)} q_{(I, II)},$$

$$u_{(I, II)} = b_{1(I, II)} w_{(I, II)'} + C_{1(I, II)} r + \frac{C_{2(I, II)}}{r} - \frac{m_{1(I, II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I, II)} dr, \quad (1)$$

$$\psi_{(I, II)} = b_{2(I, II)} w_{(I, II)'} + C_{3(I, II)} r + \frac{C_{4(I, II)}}{r} - \frac{m_{2(I, II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I, II)} dr,$$

где Δ – оператор Лапласа; D, b_i, m, m_i и M_1 – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоев пластины; C_n – константы интегрирования, определяемые из граничных условий; w_r – угол поворота нормали при изгибе пластины (штрих в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ним координате).

Решение для пластины в целом может быть записано с помощью функции Хевисайда:

$$w = w_{(I)} + (w_{(II)} - w_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1),$$

$$u = u_{(I)} + (u_{(II)} - u_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1), \quad \Psi = \Psi_{(I)} + (\Psi_{(II)} - \Psi_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1).$$

Метод декомпозиции, применяемый при построении решения, предполагает необходимость наложения условий равенства перемещений и внутренних усилий в точке сопряжения участков различной толщины (при $r = R_1$):

$$w_{(I)} = w_{(II)}, \quad u_{(I)} = u_{(II)}, \quad \Psi_{(I)} = \Psi_{(II)}, \quad w_{(I)r} = w_{(II)r},$$

$$T_{r(I)} = T_{r(II)}, \quad M_{r(I)} = M_{r(II)}, \quad H_{r(I)} = H_{r(II)}, \quad Q_{(I)} = Q_{(II)},$$
(2)

где T_r – продольная сила; M_r – изгибающий момент; H_r – момент на границе контакта слоев; Q – поперечная сила. Выражения для определения внутренних усилий представлены в статье [26].

Условия опирания внешнего контура формируют оставшиеся выражения граничных условий, необходимые для определения констант интегрирования. Так, при жестком защемлении внешнего контура линейные ($w_{(II)}$, $u_{(II)}$) и угловые ($\Psi_{(II)}$, $w_{(II)r}$) перемещения в точке $r = R_{II}$ будут отсутствовать [27]:

$$w_{(II)} = 0, \quad u_{(II)} = 0, \quad \Psi_{(II)} = 0, \quad w_{(II)r} = 0.$$
(3)

При шарнирном опирании для пакетов с жесткой диафрагмой по внешнему контуру, препятствующей взаимному сдвигу слоев, необходимо потребовать на опоре равенства нулю изгибающего момента, прогиба, относительного сдвига в заполнителе и радиального смещения координатной поверхности:

$$w_{(II)} = 0, \quad u_{(II)} = 0, \quad \Psi_{(II)} = 0, \quad M_{r(II)} = 0.$$
(4)

Для решения системы (1) искомые функции перемещений $w(r, t)$, $u(r, t)$, $\Psi(r, t)$, возникающих в пластине при вынужденных колебаниях, представим в виде суперпозиции квазистатических ($w_s(r)$, $u_s(r)$, $\Psi_s(r)$) и динамических ($w_d(r, t)$, $u_d(r, t)$, $\Psi_d(r, t)$) составляющих [28]:

$$w_{(I, II)} = w_{s(I, II)} + w_{d(I, II)}, \quad u_{(I, II)} = u_{s(I, II)} + u_{d(I, II)}, \quad \Psi_{(I, II)} = \Psi_{s(I, II)} + \Psi_{d(I, II)}.$$
(5)

Начальные условия принимаем однородными:

$$w(r, 0) = w_s(r, 0) + w_d(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = \dot{w}_s(r, 0) + \dot{w}_d(r, 0) = 0,$$

$$w_d(r, 0) = -w_s(r, 0), \quad \dot{w}_d(r, 0) = -\dot{w}_s(r, 0).$$
(6)

С учетом решения (5) система (1) преобразуется к виду

$$\Delta \Delta w_{d(I, II)} + D_{(I, II)} m_{(I, II)} (\Delta \ddot{w}_{s(I, II)} + \Delta \ddot{w}_{d(I, II)}) +$$

$$+ D_{(I, II)} M_{1(I, II)} (\ddot{w}_{s(I, II)} + \ddot{w}_{d(I, II)}) = D_{(I, II)} q_{(I, II)} - \Delta \Delta w_{s(I, II)},$$

$$u_{s(I, II)} + u_{d(I, II)} = b_{1(I, II)} (w_{s(I, II)r} + w_{d(I, II)r}) +$$

$$+ C_{1(I, II)} r + \frac{C_{2(I, II)}}{r} - \frac{m_{1(I, II)}}{r} \int r (\ddot{w}_{s(I, II)} + \ddot{w}_{d(I, II)}) dr,$$

$$\Psi_{s(I, II)} + \Psi_{d(I, II)} = b_{2(I, II)} (w_{s(I, II)r} + w_{d(I, II)r}) +$$

$$+ C_{3(I, II)} r + \frac{C_{4(I, II)}}{r} - \frac{m_{2(I, II)}}{r} \int r (\ddot{w}_{s(I, II)} + \ddot{w}_{d(I, II)}) dr.$$
(7)

Система, описывающая квазистатическое деформирование пластины, может быть получена из системы (1) путем обнуления инерционных слагаемых:

$$\Delta \Delta w_{s(I, II)} = D_{(I, II)} q_{(I, II)},$$
(8)

$$u_{s(I, II)} = b_{1(I, II)} w_{s(I, II)'} r + C_{s1(I, II)} r + \frac{C_{s2(I, II)}}{r},$$

$$\Psi_{s(I, II)} = b_{2(I, II)} w_{s(I, II)'} r + C_{s3(I, II)} r + \frac{C_{s4(I, II)}}{r}.$$

Решить систему (8) можно посредством четырехкратного интегрирования первого выражения с последующей подстановкой полученного результата в последние два уравнения:

$$w_{s(I, II)} = C_{s5(I, II)} + C_{s6(I, II)} r^2 + C_{s7(I, II)} \ln r +$$

$$+ C_{s8(I, II)} r^2 \ln r + D_{(I, II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I, II)}) dr dr dr dr,$$

$$u_{s(I, II)} = C_{s1(I, II)} r + \frac{C_{s2(I, II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)} b_{1(I, II)} r + C_{s7(I, II)} \frac{b_{1(I, II)}}{r} +$$

$$+ C_{s8(I, II)} b_{1(I, II)} r (2 \ln r + 1) + \frac{D_{(I, II)} b_{1(I, II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I, II)}) dr dr dr, \quad (9)$$

$$\Psi_{s(I, II)} = C_{s3(I, II)} r + \frac{C_{s4(I, II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)} b_{2(I, II)} r + C_{s7(I, II)} \frac{b_{2(I, II)}}{r} +$$

$$+ C_{s8(I, II)} b_{2(I, II)} r (2 \ln r + 1) + \frac{D_{(I, II)} b_{2(I, II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I, II)}) dr dr dr,$$

где C_{sn} – константы интегрирования квазистатического деформирования, определяемые из граничных условий (2)–(4).

Для линейной во времени внешней нагрузки $\dot{w}_{s(I, II)} = 0$, тогда с учетом уравнений (8) система (7) преобразуется к виду

$$\Delta \Delta w_{d(I, II)} + D_{(I, II)} m_{(I, II)} \Delta \ddot{w}_{d(I, II)} + D_{(I, II)} M_{1(I, II)} \ddot{w}_{d(I, II)} = 0,$$

$$u_{d(I, II)} = b_{1(I, II)} w_{d(I, II)'} r + C_{d1(I, II)} r + \frac{C_{d2(I, II)}}{r} - \frac{m_{1(I, II)}}{r} \int r \ddot{w}_{d(I, II)} dr, \quad (10)$$

$$\Psi_{d(I, II)} = b_{2(I, II)} w_{d(I, II)'} r + C_{d3(I, II)} r + \frac{C_{d4(I, II)}}{r} - \frac{m_{2(I, II)}}{r} \int r \ddot{w}_{d(I, II)} dr.$$

Система (10) представляет собой уравнения движения, описывающие собственные колебания пластины. Решение данной системы можно получить с помощью метода Фурье [29], представив функцию прогиба пластины в виде произведения двух функций:

$$w_{d(I, II)}(r, t) = W_{(I, II)}(r) \zeta(t), \quad (11)$$

где $W_{(I, II)}(r)$ – функция, зависящая только от координаты r ; $\zeta(t)$ – функция, зависящая только от времени t .

После подстановки выражения (11) в первое уравнение системы (10) получаем

$$\Delta \Delta [W_{(I, II)}(r)] - 2\alpha_{(I, II)}^2 \Delta [W_{(I, II)}(r)] - \beta_{(I, II)}^4 [W_{(I, II)}(r)] = 0, \quad \ddot{\zeta}(t) + \omega^2 \zeta(t) = 0,$$

где $\alpha_{(I, II)}$ и $\beta_{(I, II)}$ – коэффициенты, зависящие от частоты колебаний пластины ω , при этом

$$\alpha_{(I, II)} = \sqrt{0,5\omega^2 D_{(I, II)} m_{(I, II)}}, \quad \beta_{(I, II)} = \sqrt[4]{\omega^2 D_{(I, II)} M_{1(I, II)}}.$$

Частоты собственных колебаний ступенчатой пластины ω определяются из трансцендентного уравнения, полученного из граничных условий.

Таким образом, решение для функции $w_{d(I, II)}$ и остальных динамических составляющих перемещений представляется в виде ряда [30]:

$$\begin{aligned}
 w_{d(I, II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d5n(I, II)} J_0(r\gamma_n^+) + C_{d6n(I, II)} K_0(r\gamma_n^+) + C_{d7n(I, II)} J_0(r\gamma_n^-) + \right. \\
 &\quad \left. + C_{d8n(I, II)} Y_0(r\gamma_n^-) \right] (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\
 u_{d(I, II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d1n(I, II)} r + \frac{C_{d2n(I, II)}}{r} + C_{d5n(I, II)} I_1(r\gamma_n^+) \right] \left(\gamma_n^+ b_{1(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_n^+} \right) - \\
 &\quad - C_{d6n(I, II)} K_1(r\gamma_n^+) \left(\gamma_n^+ b_{1(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_n^+} \right) - \\
 &\quad - C_{d7n(I, II)} J_1(r\gamma_n^-) \left(\gamma_n^- b_{1(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_n^-} \right) - \\
 &\quad - C_{d8n(I, II)} Y_1(r\gamma_n^-) \left(\gamma_n^- b_{1(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_n^-} \right) \right] (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\
 \psi_{d(I, II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d3n(I, II)} r + \frac{C_{d4n(I, II)}}{r} + C_{d5n(I, II)} I_1(r\gamma_n^+) \right] \left(\gamma_n^+ b_{2(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_n^+} \right) - \\
 &\quad - C_{d6n(I, II)} K_1(r\gamma_n^+) \left(\gamma_n^+ b_{2(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_n^+} \right) - C_{d7n(I, II)} J_1(r\gamma_n^-) \left(\gamma_n^- b_{2(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_n^-} \right) - \\
 &\quad - C_{d8n(I, II)} Y_1(r\gamma_n^-) \left(\gamma_n^- b_{2(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_n^-} \right) \right] (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где γ_n^\pm – коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний пластины ω_n ; $J_0(r\gamma_n^-)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $Y_0(r\gamma_n^-)$ – функция Бесселя нулевого порядка второго рода (функция Неймана); $I_0(r\gamma_n^+)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода (функция Инфельда); $K_0(r\gamma_n^+)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка второго рода (функция Макдональда) [31; 32]; C_{dn} – константы интегрирования, определяемые из граничных условий; A_n и B_n – константы, определяемые из начальных условий колебаний пластины (6).

Константы интегрирования $C_{s2(1)}$, $C_{s4(1)}$, $C_{s7(1)}$, $C_{s8(1)}$, $C_{d2n(1)}$, $C_{d4n(1)}$, $C_{d6n(1)}$, $C_{d8n(1)}$ требуется принять равными нулю исходя из условий регулярности функций перемещений, обусловленных сингулярностью в центральной точке пластины (при $r = 0$):

$$C_{s2(1)} = C_{s4(1)} = C_{s7(1)} = C_{s8(1)} = C_{d2n(1)} = C_{d4n(1)} = C_{d6n(1)} = C_{d8n(1)} = 0. \tag{13}$$

Система уравнений, сформированная из граничных условий (2)–(4), служит для определения констант интегрирования как при квазистатическом, так и при динамическом деформировании.

Временные константы интегрирования A_n и B_n могут быть определены из начальных условий (6). Опираясь на свойство ортогональности координатных функций динамических составляющих прогибов $W_n(r)$, получим выражения для A_n и B_n :

$$\begin{aligned}
 A_n &= \int_0^{R_{II}} r W_n(r) w_d(r, 0) dr = - \int_0^{R_I} r W_{n(I)}(r) w_{s(I)}(r, 0) dr - \int_{R_I}^{R_{II}} r W_{n(II)}(r) w_{s(II)}(r, 0) dr = \\
 &= - \int_0^{R_I} \left(r \left[C_{d5n(I)} I_0(r \gamma_{n(I)}^+) + C_{d7n(I)} J_0(r \gamma_{n(I)}^-) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[C_{s5(I)} + C_{s6(I)} r^2 + D_{(I)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I)}(r, 0)) dr dr dr dr \right] \right) dr - \\
 &- \int_{R_I}^{R_{II}} \left(r \left[C_{d5n(II)} I_0(r \gamma_{n(II)}^+) + C_{d6n(II)} K_0(r \gamma_{n(II)}^+) + C_{d7n(II)} J_0(r \gamma_{n(II)}^-) + C_{d8n(II)} Y_0(r \gamma_{n(II)}^-) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[C_{s5(II)} + C_{s6(II)} r^2 + C_{s7(II)} \ln r + C_{s8(II)} r^2 \ln r + D_{(II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(II)}(r, 0)) dr dr dr dr \right] \right) dr, \quad (14) \\
 B_n &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^{R_{II}} r W_n(r) \dot{w}_d(r, 0) dr = \frac{-1}{\omega_n} \left(\int_0^{R_I} r W_{n(I)}(r) \dot{w}_{s(I)}(r, 0) dr + \int_{R_I}^{R_{II}} r W_{n(II)}(r) \dot{w}_{s(II)}(r, 0) dr \right) = \\
 &= \frac{-1}{\omega_n} \int_0^{R_I} \left(r \left[C_{d5n(I)} I_0(r \gamma_{n(I)}^+) + C_{d7n(I)} J_0(r \gamma_{n(I)}^-) \right] D_{(I)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r \dot{q}_{(I)}(r, 0)) dr dr dr dr \right) dr + \\
 &+ \int_{R_I}^{R_{II}} \left(r \left[C_{d5n(II)} I_0(r \gamma_{n(II)}^+) + C_{d6n(II)} K_0(r \gamma_{n(II)}^+) + C_{d7n(II)} J_0(r \gamma_{n(II)}^-) + C_{d8n(II)} Y_0(r \gamma_{n(II)}^-) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times D_{(II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r \dot{q}_{(II)}(r, 0)) dr dr dr dr \right) dr \Big].
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение (5) с учетом выражений (9) и (12), а также констант (13) и (14) является решением задачи о вынужденных колебаниях трехслойной ступенчатой пластины.

Численные исследования

Для апробации полученного решения рассмотрим деформирование следующих пакетов трехслойных ступенчатых пластин: Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т, сталь – фторопласт-4 – сталь, сталь – ПС-1 – сталь (Д16Т – дюралюминий, ПС-1 – полистирольный пенопласт). Физико-механические характеристики рассматриваемых материалов [33–35]: Д16Т – $\rho_{1,2} = 2700 \text{ кг/м}^3$, $K_{1,2} = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $G_{1,2} = 0,267 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; фторопласта-4 – $\rho_3 = 2150 \text{ кг/м}^3$, $K_3 = 3,45 \cdot 10^7 \text{ Па}$, $G_3 = 9,0 \cdot 10^7 \text{ Па}$; стали – $\rho_{1,2} = 7850 \text{ кг/м}^3$, $K_{1,2} = 1,913 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $G_{1,2} = 0,78 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; ПС-1 – $\rho_3 = 60 \text{ кг/м}^3$, $K_3 = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Па}$, $G_3 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Па}$ (ρ – плотность материала, K – модуль объемной деформации материала, G – модуль сдвига материала). Радиус внешнего контура рассматриваемых пластин R_{II} равен 1 м. Значения толщин наружных слоев: $h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,04 \text{ м}$, $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,02 \text{ м}$ (для пластин с уширением в центральной части); $h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,02 \text{ м}$, $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,04 \text{ м}$ (для пластин с сужением в центральной части). Толщина срединного заполнителя h_3 составляет 0,3 м. На пластину действует постоянная во времени динамическая нагрузка $q(t) = \text{const}$. Во всех численных расчетах ограничение длины суммируемых рядов (12) в каждом случае исследовалось отдельно.

На рис. 2–4 представлены графики изменения величины прогиба w в центральной точке пластины ($r = 0$) с течением времени t вынужденных колебаний, вызванных равномерно распределенной по всей площади нагрузкой интенсивностью $q_{(I)} = q_{(II)} = -100 \text{ кПа}$.

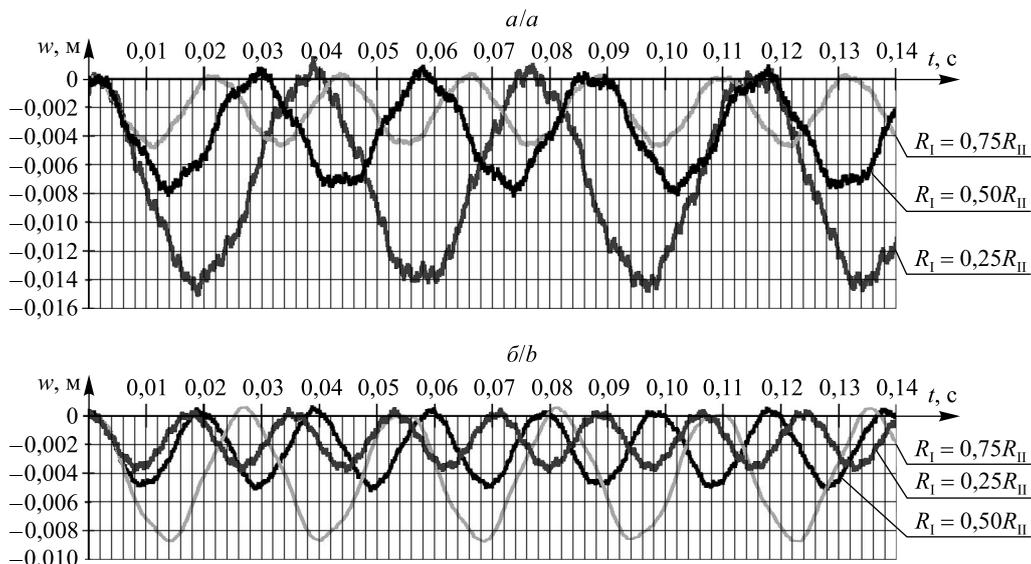


Рис. 2. Изменение величины прогиба в центральной точке пакета Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т с уширением (а) и сужением (б) в центральной части
 Fig. 2. Change of deflection at the central point of the package D16T – PTFE – D16T with widening (a) and narrowing (b) in the center

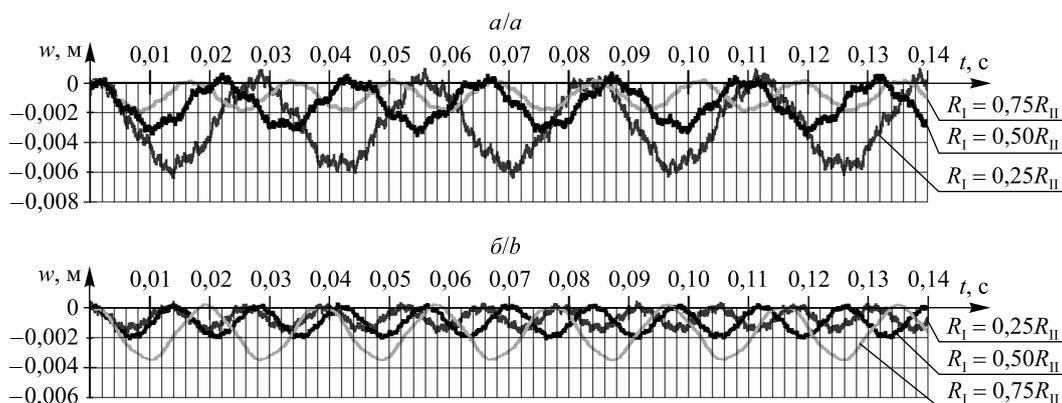


Рис. 3. Изменение величины прогиба в центральной точке пакета сталь – фторопласт-4 – сталь с уширением (а) и сужением (б) в центральной части
 Fig. 3. Change of deflection at the central point of the package steel – PTFE – steel with widening (a) and narrowing (b) in the center

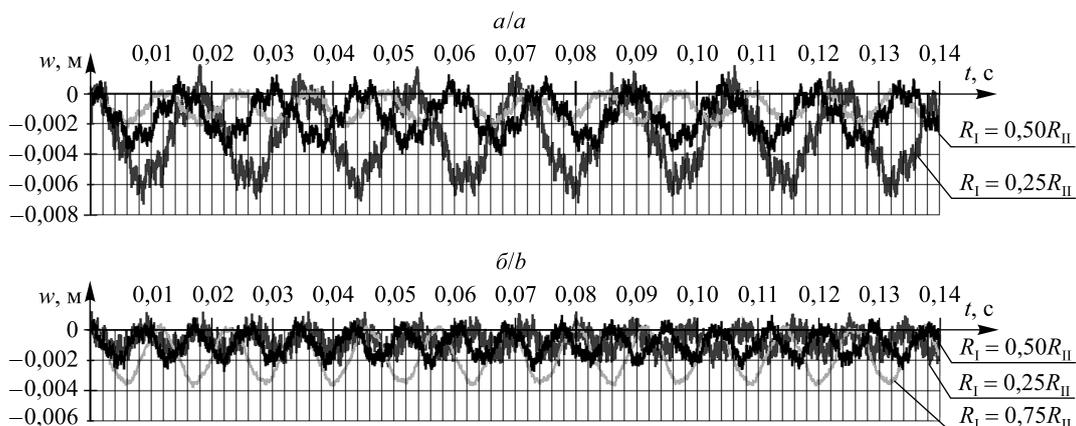


Рис. 4. Изменение величины прогиба в центральной точке пакета сталь – ПС-1 – сталь с уширением (а) и сужением (б) в центральной части
 Fig. 4. Change of deflection at the central point of the package steel – PS-1 – steel with widening (a) and narrowing (b) in the center

Изменение величины максимального прогиба и периода колебаний обусловлено изменением жесткости элемента при варьировании его геометрических параметров и физико-механических свойств. Из рис. 2–4 видно, что деформативность трехслойных элементов при динамическом нагружении в большей степени зависит от механических характеристик внешних слоев, чем от механических характеристик срединного заполнителя. Так, при увеличении модуля объемной деформации внешних слоев в 2,4 раза прогиб пластин рассматриваемой геометрии в среднем уменьшился в 2,35 раза. При уменьшении модуля объемной деформации срединного заполнителя в 34,5 раза прогиб пластины увеличился в 1,1 раза.

Рассмотрим первый максимальный прогиб пластины, возникающий в процессе колебаний, и проследим за изменением его величины при изменении радиуса центрального участка указанных выше пакетов пластин. На рис. 5 представлены графики изменения прогиба при квазистатическом и динамическом деформировании.

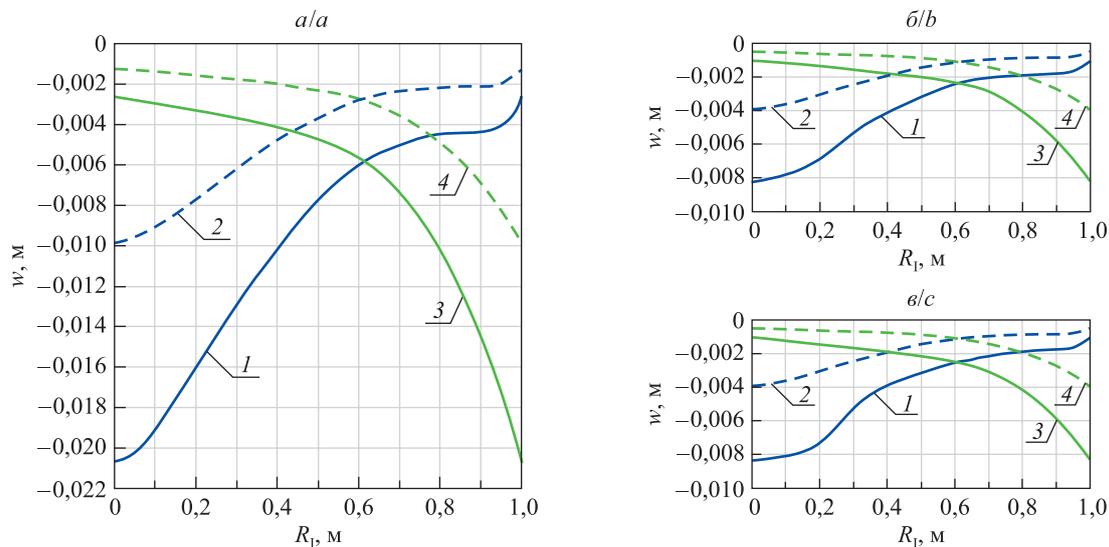


Рис. 5. Изменение величины прогиба в центральной точке пакетов Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т (а), сталь – фторопласт-4 – сталь (б), сталь – ПС-1 – сталь (в): 1, 2 – динамическое (в момент первого максимального прогиба) и квазистатическое деформирование пластины с уширением в центральной части соответственно; 3, 4 – динамическое (в момент первого максимального прогиба) и квазистатическое деформирование пластины с сужением в центральной части соответственно

Fig. 5. Change of deflection at the central point of the packages D16T – PTFE – D16T (a), steel – PTFE – steel (b), steel – PS-1 – steel (c): 1, 2 – dynamic (at the moment of the first maximum deflection) and quasi-static deformation of the plate with widening in the center respectively; 3, 4 – dynamic (at the moment of the first maximum deflection) and quasi-static deformation of the plate with narrowing in the center respectively

Из рис. 5 видно, что для рассмотренных пакетов при $R_1 = 0,615R_{II}$ как при квазистатическом (кривые 2 и 4), так и при динамическом (кривые 1 и 3) деформировании пластины с уширением (кривые 1 и 2) и пластины с сужением (кривые 3 и 4) в центральной части имеют одинаковый прогиб. При этом объем материала, требуемый для изготовления внешних слоев пластины с сужением в центральной части, на 18 % превышает объем материала, требуемый для изготовления внешних слоев пластины с уширением в центральной части. Из этого можно сделать вывод, что при равной деформативности двух видов пластин пластина с уширением в центральной части менее материалоемка.

Равная материалоемкость пластин с уширением и сужением в центральной части достигается при $R_1 = 0,707R_{II}$, что видно из рис. 6.

Рассмотрим деформативность ступенчатых пластин под действием равномерно распределенной лишь вдоль одного участка нагрузки (рис. 7–9). Равнодействующая нагрузки, воспринимаемой пластиной, составляет величину $F = -100$ кН. Для давления, действующего по площади центрального участка, $q_{(I)} = \frac{F}{\pi R_1^2}$; для давления, действующего по площади наружного участка, $q_{(II)} = \frac{F}{\pi(R_{II}^2 - R_1^2)}$.

При нагружении центрального участка кривые прогибов для пластин с уширением (кривые 1) и сужением (кривые 2) пересекаются в точке A при $R_I = 0,54R_{II}$ (для пакета Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т) (см. рис. 7) и $R_I = 0,55R_{II}$ (для пакетов сталь – фторопласт-4 – сталь и сталь – ПС-1 – сталь) (см. рис. 8 и 9). В этом случае объем материала, требуемый для изготовления внешних слоев пластины с сужением в центральной части при рассматриваемых геометрических параметрах, на 32 % (для пакета Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т) и 30 % (для пакетов сталь – фторопласт-4 – сталь и сталь – ПС-1 – сталь) превышает объем материала, требуемый для изготовления внешних слоев пластины с уширением в центральной части. Таким образом, в случае приложения внешнего воздействия лишь в зоне участка I пластина с уширением в центральной части также является менее материалоемкой при условии равной деформативности.

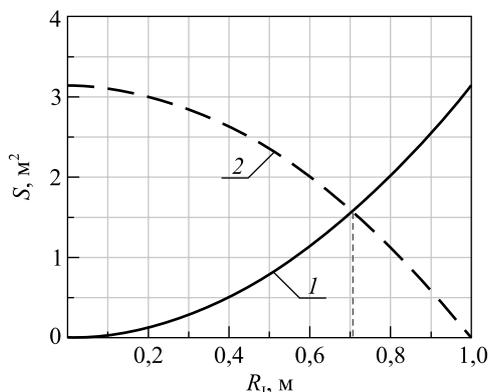


Рис. 6. Зависимость площади участков ступенчатой пластины от радиуса границы перепада толщины внешних несущих слоев:
 1 – участок I; 2 – участок II

Fig. 6. Dependence of the area of the stepped plate sections on the radius of the thickness difference in the outer bearing layers:
 1 – section I; 2 – section II

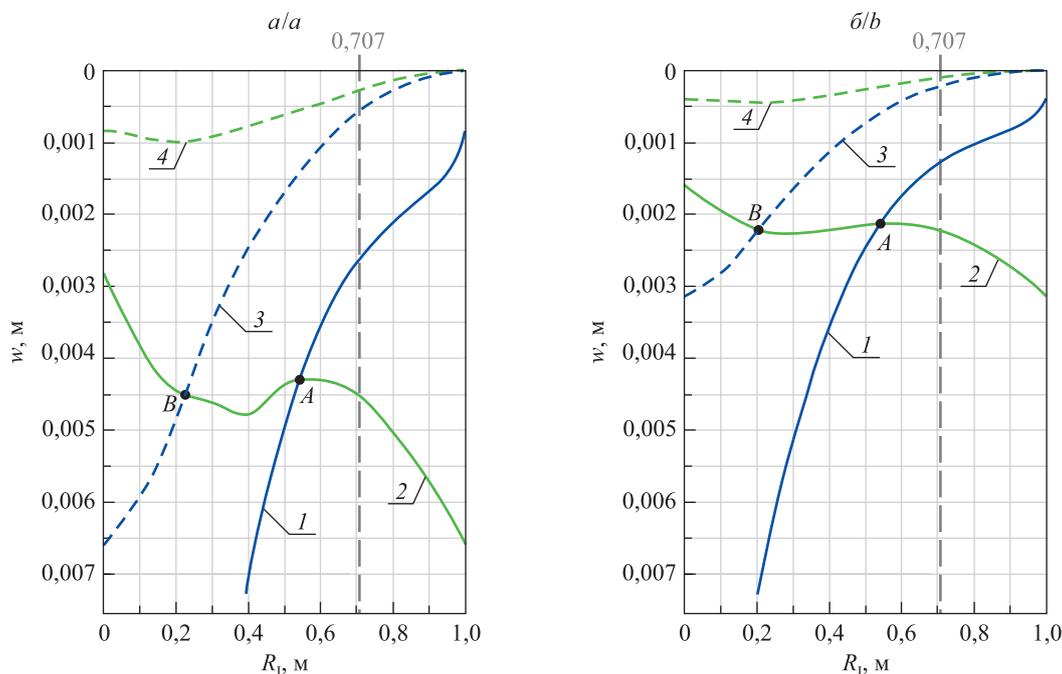


Рис. 7. Изменение прогиба в центральной точке пакета Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании:
 1, 2 – нагружение участка I в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно;
 3, 4 – нагружение участка II в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно

Fig. 7. Change of deflection at the central point of the package D16T – PTFE – D16T during dynamic (a) and quasi-static (b) deformation:
 1, 2 – loading of section I in the plate with widening and narrowing in the center respectively;
 3, 4 – loading of section II in the plate with widening and narrowing in the center respectively

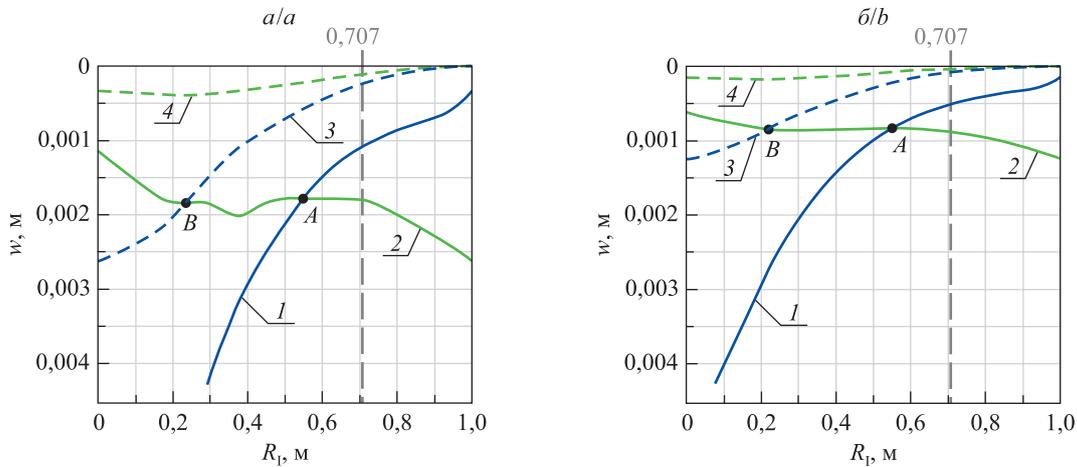


Рис. 8. Изменение прогиба в центральной точке пакета сталь – фторопласт-4 – сталь при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании: 1, 2 – нагружение участка I в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно; 3, 4 – нагружение участка II в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно

Fig. 8. Change of deflection at the central point of the package steel – PTFE – steel during dynamic (a) and quasi-static (b) deformation: 1, 2 – loading of section I in the plate with widening and narrowing in the center respectively; 3, 4 – loading of section II in the plate with widening and narrowing in the center respectively

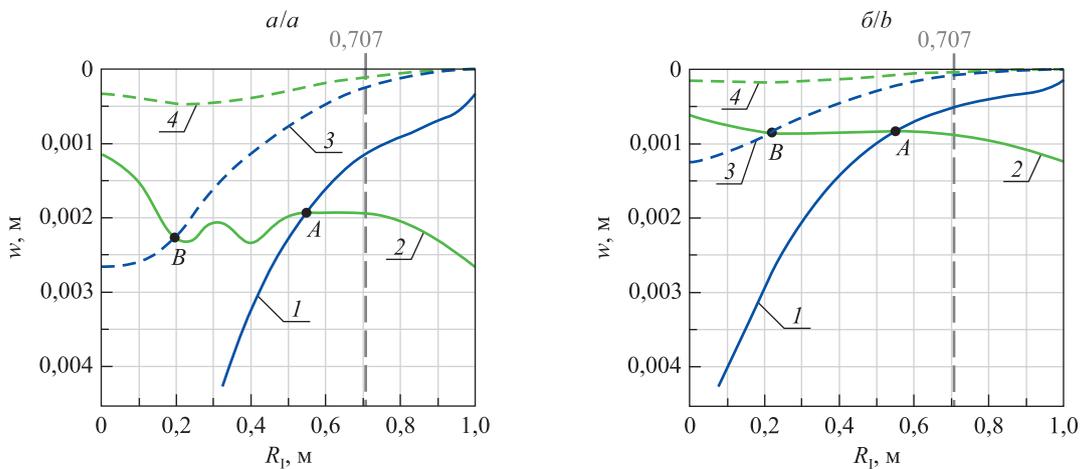


Рис. 9. Изменение прогиба в центральной точке пакета сталь – PS-1 – сталь при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании: 1, 2 – нагружение участка I в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно; 3, 4 – нагружение участка II в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно

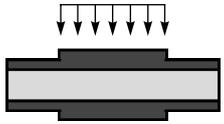
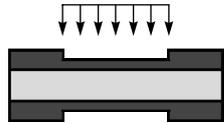
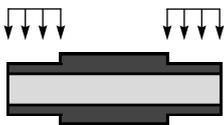
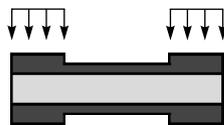
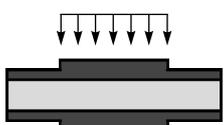
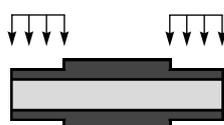
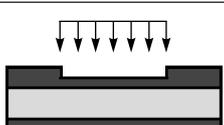
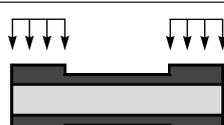
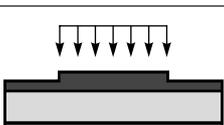
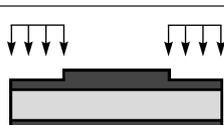
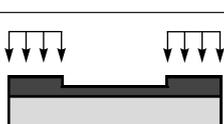
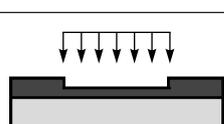
Fig. 9. Change of deflection at the central point of the package steel – PS-1 – steel during dynamic (a) and quasi-static (b) deformation: 1, 2 – loading of section I in the plate with widening and narrowing in the center respectively; 3, 4 – loading of section II in the plate with widening and narrowing in the center respectively

Рассмотрев радиус центрального участка $R_I = 0,707R_{II}$, при котором материалоемкость пластин различной формы будет одинакова, видим, что при нагружении участка I (кривые 1 и 2) прогиб, возникающий в пластине с уширением в центральной части, для всех исследованных пакетов составляет 58 % от прогиба, возникающего в пластине с сужением в центральной части.

В случае приложения внешней нагрузки к участкам, имеющим минимальную толщину (наружному участку для пластины с уширением в центральной части (кривые 3) и центральному участку для пластины с сужением в центральной части (кривые 2)), пластины обеих форм получают равный прогиб при радиусе центрального участка от $R_I = 0,20R_{II}$ до $R_I = 0,23R_{II}$ (точки B на рис. 7–9). При этом материалоемкость пластины с сужением в центральной части будет выше на 85–88 %.

Результаты исследования по определению приоритетного варианта передачи внешней нагрузки на участки ступенчатых пластин, основанные на сравнении параметров деформативность – материалоемкость, сведены в таблицу.

Оптимальный способ нагружения пластины при сравнении возможных вариантов
 The optimal way to load the plate when comparing possible options

Сравниваемые пластины	Нагружение с наименьшей деформативностью при равной материалоемкости	Сравниваемые пластины	Нагружение с наименьшей деформативностью при равной материалоемкости
<i>Вариант 1</i>		<i>Вариант 4</i>	
	-		-
	+		+
<i>Вариант 2</i>		<i>Вариант 5</i>	
	+		-
	-		+
<i>Вариант 3</i>		<i>Вариант 6</i>	
	-		+
	+		-

Примечание. Оптимальный способ нагружения для каждого из вариантов отмечен знаком «плюс».

Заключение

В работе получено аналитическое решение, которое позволяет определить перемещения, возникающие при вынужденных колебаниях круговой трехслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних несущих слоев. Полученное решение справедливо для пакетов, собранных из любых материалов, которые воспринимают линейное во времени осесимметричное вертикальное внешнее воздействие, имеющее произвольную локализацию на участках пластины. Составной частью представленного решения является решение, позволяющее определить перемещения при квазистатическом деформировании трехслойной ступенчатой пластины, что дает возможность параллельно рассматривать сразу две задачи.

В рамках численных исследований проанализированы пакеты из различных материалов и выявлено, что динамическое внешнее воздействие приводит к увеличению прогиба в среднем в 2 раза по сравнению с прогибом при восприятии квазистатического воздействия такой же интенсивности. Пластины со ступенчатым изменением толщины внешних несущих слоев, имеющие утолщение в центральной части, обладают меньшей материалоемкостью при условии равной деформативности, чем пластины, имеющие утолщение по периферии.

Библиографические ссылки

1. Григлюк ЭИ, Коган ФА. Современное состояние теории многослойных оболочек. *Прикладная механика*. 1972;8(6):3–17.
2. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 2003;56(3): 287–308. DOI: 10.1115/1.1557614.
3. Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered, orthotropic plates. *Composite Structures*. 2000;50(2):183–198. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00099-4.
4. Xiang Y, Zhang L. Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;280(3–5): 633–655. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.12.017.
5. Gupta US, Lal R, Sharma S. Vibration of non-homogeneous circular Mindlin plates with variable thickness. *Journal of Sound and Vibration*. 2007;302(1–2):1–17. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.07.005.
6. Gao C, Pang F, Li H, Jia D, Tang Y. Steady and transient vibration analysis of uniform and stepped annular/circular plates based on FSDT. *Acta Mechanica*. 2022;233(3):1061–1082. DOI: 10.1007/s00707-022-03157-y.
7. Hao Q, Chen Z, Zhai W. Free transverse vibration of circular plate of stepped thickness with general boundary conditions by an improved Fourier – Ritz method. *Shock and Vibration*. 2022;1643050. DOI: 10.1155/2022/1643050.
8. Hang LTT, Wang CM, Wu TY. Exact vibration results for stepped circular plates with free edges. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005;47(8):1224–1248. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.04.002.
9. Duan WH, Wang CM, Wang CY. Modification of fundamental vibration modes of circular plates with free edges. *Journal of Sound and Vibration*. 2008;317(3–5):709–715. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.065.
10. Duan G, Wang X, Jin C. Free vibration analysis of circular thin plates with stepped thickness by the DSC element method. *Thin-Walled Structures*. 2014;85:25–33. DOI: 10.1016/j.tws.2014.07.010.
11. Королевич ВВ. Поле напряжений вращающегося анизотропного диска переменной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;2:40–51. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-2-40-51.
12. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с окружающей средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:86–91. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-86-91.
13. Старовойтов ЭИ, Тарлаковский ДВ. Деформирование трехслойной ортотропной пластины ступенчато-переменной толщины. *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2014;2:38–43.
14. Nguyen CH, Butukuri RR, Chandrashekhara K, Birman V. Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2011;11(4):697–716. DOI: 10.1142/S0219455411004300.
15. Nguyen CH, Chandrashekhara K, Birman V. Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2011;13(2):237–260. DOI: 10.1177/1099636210369615.
16. Старовойтов ЭИ, Поддубный АА. Изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей, частично опертого на упругое основание. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011;1:51–55.
17. Леоненко ДВ. Поперечный изгиб круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины. *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. 2020;6:151–155.
18. Леоненко ДВ. Локальное нагружение ступенчатой круговой сэндвич-пластины. В: Шимановский АО, редактор. *Механика. Исследования и инновации. Выпуск 14 = Mechanics. Researches and Innovations. Volume 14*. Гомель: [б. и.]; 2021. с. 126–130.
19. Леоненко ДВ. Упругий изгиб круговой трехслойной пластины ступенчато-переменной толщины (на англ.). *Механика машин, механизмов и материалов*. 2021;1:25–29. DOI: 10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29.
20. Парфенова ВС. Деформирование круглой упругой трехслойной пластины со ступенчато-переменной границей. В: Шимановский АО, редактор. *Механика. Исследования и инновации. Выпуск 10 = Mechanics. Researches and Innovations. Volume 10*. Гомель: [б. и.]; 2017. с. 157–163.
21. Зорич ВА. *Математический анализ. Часть 1*. 6-е издание. Москва: Издательство МЦНМО; 2012. XVIII, 702 с.
22. Bauchau OA, Craig JI. *Structural analysis. With applications to aerospace structures*. Dordrecht: Springer; 2009. Chapter 16, Kirchhoff plate theory; p. 819–914 (Gladwell GML, editor. *Solid mechanics and its applications*; volume 163). DOI: https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6_16.
23. Timoshenko SP. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 6*. 1921;41(245):744–746. DOI: 10.1080/14786442108636264.
24. Леоненко ДВ, Маркова МВ. Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2022;3:68–76. DOI: 10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76.
25. Новацкий В. *Теория упругости*. Победра БЕ, переводчик. Москва: Мир; 1975. 872 с.
26. Маркова МВ, Леоненко ДВ. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трехслойной пластины переменной толщины. В: Василевич ЮВ, Чигарев ВА, Микулик ТН, Савицкая АВ, редакторы. *Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 36*. Минск: БНТУ; 2022. с. 3–10.
27. Старовойтов ЭИ, Нестерович АВ. Неосесимметричное нагружение упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;2:57–69. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
28. Тонг КН. *Теория механических колебаний*. Лужин ОВ, переводчик; Сеницын АП, редактор. Москва: Машгиз; 1963. 351 с.
29. Араманович ИГ, Левин ВИ. *Уравнения математической физики*. 2-е издание. Москва: Наука; 1969. 288 с. (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов).
30. Власов ВЗ, Леонтьев НН. *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*. Москва: Физматгиз; 1960. 491 с.
31. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*. Виленкин НЯ, переводчик. 2-е издание. Москва: Наука; 1974. 296 с. (Справочная математическая библиотека).

32. Ватсон ГН. *Теория бесселевых функций. Часть 1*. Берман ВС, переводчик. Москва: Издательство иностранной литературы; 1949. 799 с.
33. Плескачевский ЮМ, Старовойтов ЭИ, Леоненко ДВ. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием*. Москва: Физматлит; 2011. 560 с.
34. Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь. *СП 5.04.01-2021. Стальные конструкции*. Минск: [б. и.]; 2021. 147 с.
35. Иванов АМ, Алгазинов КЯ, Мартинец ДВ, Мартемьянов ВИ. *Строительные конструкции с применением пластмасс. Примеры проектирования и расчета*. Иванов АМ, редактор. Москва: Высшая школа; 1968. 220 с.

References

1. Grigolyuk EI, Kogan FA. [The current state of the theory of multilayer shells]. *Prikladnaya mekhanika*. 1972;8(6):3–17. Russian.
2. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 2003;56(3):287–308. DOI: 10.1115/1.1557614.
3. Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered, orthotropic plates. *Composite Structures*. 2000;50(2):183–198. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00099-4.
4. Xiang Y, Zhang L. Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;280(3–5):633–655. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.12.017.
5. Gupta US, Lal R, Sharma S. Vibration of non-homogeneous circular Mindlin plates with variable thickness. *Journal of Sound and Vibration*. 2007;302(1–2):1–17. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.07.005.
6. Gao C, Pang F, Li H, Jia D, Tang Y. Steady and transient vibration analysis of uniform and stepped annular/circular plates based on FSDT. *Acta Mechanica*. 2022;233(3):1061–1082. DOI: 10.1007/s00707-022-03157-y.
7. Hao Q, Chen Z, Zhai W. Free transverse vibration of circular plate of stepped thickness with general boundary conditions by an improved Fourier – Ritz method. *Shock and Vibration*. 2022;1643050. DOI: 10.1155/2022/1643050.
8. Hang LTT, Wang CM, Wu TY. Exact vibration results for stepped circular plates with free edges. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005;47(8):1224–1248. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.04.002.
9. Duan WH, Wang CM, Wang CY. Modification of fundamental vibration modes of circular plates with free edges. *Journal of Sound and Vibration*. 2008;317(3–5):709–715. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.065.
10. Duan G, Wang X, Jin C. Free vibration analysis of circular thin plates with stepped thickness by the DSC element method. *Thin-Walled Structures*. 2014;85:25–33. DOI: 10.1016/j.tws.2014.07.010.
11. Karalevich UV. The field of tensions of a rotating anisotropic disc of a variable thickness loaded with undistracted forces on the outer contour. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;2:40–51. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-2-40-51.
12. Karalevich UV, Medvedev DG. The influence of the length of heat sources on the external border on the temperature distribution in profiled polar-orthotropic ring plates taking into account their heat exchange with the external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:86–91. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-86-91.
13. Starovoitov EI, Tarlakovsky DV. Stress-strain condition of a three-layer orthotropic plate with the strengthening onlay. *Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*. 2014;2:38–43. Russian.
14. Nguyen CH, Butukuri RR, Chandrashekhara K, Birman V. Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2011;11(4):697–716. DOI: 10.1142/S0219455411004300.
15. Nguyen CH, Chandrashekhara K, Birman V. Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2011;13(2):237–260. DOI: 10.1177/1099636210369615.
16. Starovoitov EI, Poddubny AA. The bending of three-layer beam with variable border laying on the elastic basis. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2011;1:51–55. Russian.
17. Leonenko DV. Transverse bending of a circular sandwich plate of stepped thickness. *Proceedings of Francisk Scorina Gomel State University*. 2020;6:151–155. Russian.
18. Leonenko DV. Local loading of a stepped circular sandwich plate. In: Shimanovskii AO, editor. *Mechanics. Researches and Innovations. Volume 14*. Homiel: [s. n.]; 2021. p. 126–130. Russian.
19. Leonenko DV. Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2021;1:25–29. Russian. DOI: 10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29.
20. Parfenava VS. The deformation of the elastic three-layered plate with a step-varied border. In: Shimanovskii AO, editor. *Mechanics. Researches and Innovations. Volume 10*. Homiel: [s. n.]; 2017. p. 157–163. Russian.
21. Zorich VA. *Matematicheskii analiz. Chast' 1* [Mathematical analysis. Part 1]. 6th edition. Moscow: Izdatel'stvo MTsNMO; 2012. XVIII, 702 p. Russian.
22. Bauchau OA, Craig JL. *Structural analysis. With applications to aerospace structures*. Dordrecht: Springer; 2009. Chapter 16, Kirchhoff plate theory; p. 819–914 (Gladwell GML, editor. Solid mechanics and its applications; volume 163). DOI: https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6_16.
23. Timoshenko SP. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 6*. 1921;41(245):744–746. DOI: 10.1080/14786442108636264.
24. Leonenko DV, Markova MV. Vibrations of a three-layer circular step plate under periodic impact. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2022;3:68–76. Russian. DOI: 10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76.
25. Nowacki W. *Teoria sprężystości*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe; 1970. 770 s.
Russian edition: Nowacki W. *Teoriya uprugosti*. Pobedrya BE, translator. Moscow: Mir; 1975. 872 p.
26. Markova MV, Leonenko DV. [Definition of the initial-boundary value problem for axisymmetric vibrations of a circular three-layer plate with variable thickness]. In: Vasilevich YuV, Chigarev VA, Mikulik TN, Savitskaya AV, editors. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika. Vypusk 36* [Theoretical and applied mechanics. Issue 36]. Minsk: Belarusian National Technical University; 2022. p. 3–10. Russian.

27. Starovoitov EI, Nesterovich AV. The non-axisymmetric loading of an elastoplastic three-layer plate in its plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;2:57–69. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
28. Tong KN. *Theory of mechanical vibration*. New York: Wiley; 1960. XII, 348 p.
Russian edition: Tong KN. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy*. Luzhin OV, translator; Sinitsyn AP, editor. Moscow: Mashgiz; 1963. 351 p.
29. Aramanovich IG, Levin VI. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. 2nd edition. Moscow: Nauka; 1969. 288 p. (Izbrannye glavy vysshei matematiki dlya inzhenerov i studentov vtuzov). Russian.
30. Vlasov VZ, Leont'ev NN. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on an elastic foundation]. Moscow: Fizmatgiz; 1960. 491 p. Russian.
31. Bateman H, Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Volume 2*. New York: McGraw-Hill Book Company; 1953. XVI, 396 p.
Russian edition: Bateman H, Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*. Vilenkin NYa, translator. 2nd edition. Moscow: Nauka; 1974. 296 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka).
32. Watson GN. *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1944. VIII, 804 p.
Russian edition: Watson GN. *Teoriya besselevykh funktsii. Chast' 1*. Berman VS, translator. Moscow: Izdatel'stvo inostranoi literatury; 1949. 799 p.
33. Pleskachevskii YuM, Starovoitov EI, Leonenko DV. *Mekhanika trekhsloinykh sterzhnei i plastin, svyazannykh s uprugim osnovaniem* [Mechanics of three-layer bars and plates connected to an elastic foundation]. Moscow: Fizmatlit; 2011. 560 p. Russian.
34. Ministry of Architecture and Construction of the Republic of Belarus. *SP 5.04.01-2021. Stal'nye konstruksii* [CR 5.04.01-2021. Steel construction]. Minsk: [s. n.]; 2021. 147 p. Russian.
35. Ivanov AM, Algazinov KYa, Martinets DV, Martem'yanov VI. *Stroitel'nye konstruksii s primeneniem plastmass. Primery proektirovaniya i rascheta* [Building structures using plastics. Design and calculation examples]. Ivanov AM, editor. Moscow: Vysshaya shkola; 1968. 220 p. Russian.

Получена 31.10.2022 / исправлена 22.02.2023 / принята 22.02.2023.
Received 31.10.2022 / revised 22.02.2023 / accepted 22.02.2023.