УДК 539.3:534

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ОКОЛО СЛУЧАЙНО-ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. В. ЧИГАРЕВ[1], *М. Г. БОТОГОВА*[1], *Г. И. МИХАСЕВ*[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается обобщение задачи о распространении поверхностной упругой волны Рэлея около свободной поверхности, получаемой математическим деформированием свободной плоскости. Множество возможных реализаций поверхности в среднем эквивалентно плоскости, а дисперсия является постоянной величиной. Предполагается малость безразмерного параметра – градиента к поверхности, что обусловливает наличие малых флуктуаций у всех полевых величин. Определяются эффективные граничные условия на эффективной плоской границе. Из условия существования ненулевых решений задачи о собственных колебаниях полупространства с неровной границей выводится обобщенное уравнение Рэлея, содержащее дополнительный параметр безразмерной дисперсии градиента к поверхности. Численно находятся корни уравнения в зависимости от коэффициента Пуассона

Образец цитирования:
Чигарев АВ, Ботогова МГ, Михасев ГИ. Распространение поверхностной волны около случайно-шероховатой поверхности. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:38–48.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-38-48

For citation:
Chigarev AV, Botogova MG, Mikhasev GI. Propagation of a surface wave near a randomly rough surface. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:38–48. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-38-48

Авторы:
Анатолий Власович Чигарев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.
Марина Георгиевна Ботогова – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.
Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.

Authors:
Anatoly V. Chigarev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
chigarev@rambler.ru
Marina G. Botogova, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
batahova@bsu.by
Gennadi I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
mikhasev@bsu.by

и дисперсии. Влияние дисперсии градиента к неровной поверхности проявляется в трансформации нулевого корня в ненулевой при условии, что отношение скорости рэлеевской волны к скорости поперечной волны меньше единицы. Второму корню, получаемому из нулевого, соответствует появление более медленной, чем рэлеевская, волны, амплитуда которой также уменьшается с глубиной. Физически допустимые решения могут существовать только для величины дисперсии градиента меньше 0,09 в диапазоне изменения свойств материалов от твердых до резиноподобных.

Ключевые слова: упругая волна Рэлея; дисперсия неровности поверхности; малый безразмерный параметр.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (задание 1.7.01.2).

PROPAGATION OF A SURFACE WAVE NEAR A RANDOMLY ROUGH SURFACE

A. V. CHIGAREV[a]***, M. G. BOTOGOVA***[a]***, G. I. MIKHASEV***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: A. V. Chigarev (chigarev@rambler.ru)

A generalisation of the problem on the propagation of a surface elastic Rayleigh wave near a free surface obtained by continuous deformation of the initial plane is considered. The set of possible realisations of the surface is, on average, equivalent to a plane, and the dispersion is a constant. The smallness of a dimensionless parameter, the gradient to a surface, is assumed, which causes the presence of small fluctuations in all field quantities. The effective boundary conditions on a plane boundary are obtained. From the condition for the existence of non-zero solutions, the generalised Rayleigh equation is found for the case of an uneven boundary containing a parameter of a dimensionless dispersion of the gradient to a surface. Roots of the dispersion equation are numerically found depending on the Poisson's ratio and dispersion. The influence of the dispersion of surface roughness is manifested in the appearance of an additional root under the condition that the ratio of the Rayleigh wave velocity to the transverse velocity is less than unity. The second root corresponds to the appearance of a wave slower than the Rayleigh one, the amplitude of which also decreases with depth. Physically acceptable solutions can only exist for a dispersion value of less than 0.09 in the range of varying of material properties from solid to rubbery.

Keywords: elastic Rayleigh wave; dispersion of surface roughness; small dimensionless parameter.

Acknowledgements. This work was supported by the state program of scientific research «Convergence-2025» (task 1.7.01.2).

Введение

Цель исследования – разработать подход к решению задачи о распространении поверхностной волны в окрестности свободной случайно-шероховатой поверхности на основе получения обобщенного уравнения Рэлея.

Обобщение задачи о распространении поверхностных волн Рэлея рассматривается во многих работах в связи с их практическим применением в разных областях геофизики, акустики, электроники и др. [1–4]. Большое количество публикаций посвящено различным аспектам распространения поверхностных волн вблизи свободной границы в неоднородных средах, однородных и неоднородных телах с криволинейной границей [5–14], в том числе с учетом поверхностного натяжения [15; 16] и при наличии поверхностного покрытия [17].

Как известно, поверхностная волна Рэлея, распространяющаяся вдоль свободной поверхности, является суперпозицией падающей и отраженной неоднородных волн, поэтому проблема дифракции волн на неровных поверхностях представляет интерес и в случае распространения поверхностных волн вблизи шероховатых поверхностей [18–21].

Многообразие различных топографий поверхностей обусловливает многообразие методов решения задач в зависимости от соотношения между длиной волны и масштабом неровности. Наиболее известны метод малых возмущений рельефа поверхности (далее – метод малых возмущений) и метод Кирхгофа [18; 19]. Метод малых возмущений применяется для исследования распространения волн в случае, когда величина флуктуации поверхности, характеризуемая модулем градиента функции, описывающей поверхность рельефа, значительно меньше единицы. Это позволяет ввести малый безразмерный параметр, по которому проводится разложение всех полевых величин. Для эффективной среды с плоской в среднем границей формулируются преобразованные граничные условия. Для случая статистически однородной квазиплоской поверхности выводится обобщенное уравнение Рэлея.

Метод Кирхгофа [19] позволяет получить приближенные решения для поверхностей, у которых радиусы кривизны неровностей значительно больше длины волны.

Отметим, что метод малых возмущений использовался Дж. У. Рэлеем и в дальнейшем совершенствовался в разных исследованиях. Метод Кирхгофа широко применялся в задачах рассеяния волн на шероховатых поверхностях. В случае слабошероховатой поверхности приближение Кирхгофа дает такой же результат, как и метод малых возмущений [19].

Материалы и методы исследования

Рассмотрим упругое полупространство такое, что в системе координат *Oxyz* (рис. 1) свободная граница описывается выражением

$$z = h(x),\ -\infty < x < +\infty,\ h_{\min} \le z \le h_{\max}. \tag{1}$$

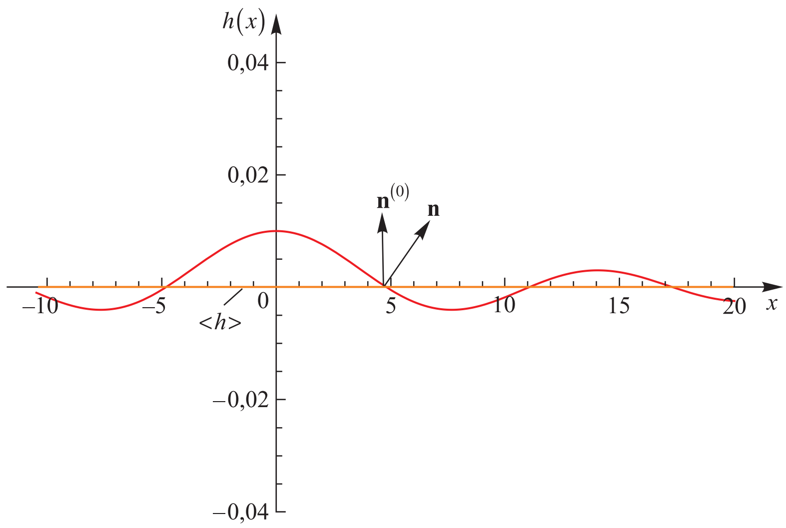

Рис. 1. Упругое полупространство со свободной шероховатой поверхностью (профилограмма в плоскости *Ohx*) ($\mathbf{n}$ – нормаль к неровной поверхности; $\mathbf{n}^{(0)}$ – нормаль к плоскости $z = 0$)

Fig. 1. Elastic half-space with free rough surface (profilogram in the *Ohx* plane) ($\mathbf{n}$ – normal to rough surface; $\mathbf{n}^{(0)}$ – normal to surface $z = 0$)

Это означает, что распространение поверхностной волны происходит в упругой полуплоскости *xOz*, свободный край которой согласно выражению (1) является неровным. Как обычно, вводятся потенциалы φ и ψ, через которые по известным формулам находятся все полевые величины.

В области $z < h(x)$ имеют место следующие уравнения для потенциалов $\varphi(x, z)$ и $\psi(x, z)$ [2; 4]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_l^2\varphi = 0,\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k_t^2\psi = 0,\\
k_l^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2},\ k_t^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2},\\
c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\ c_t^2 = \frac{\mu}{\rho},
\end{gathered} \tag{2}$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе; k_l – волновое число продольной волны; c_l – скорость продольной волны; k_t – волновое число поперечной волны; c_t – скорость поперечной волны; ω – частота; ρ – плотность.

В уравнениях (2) учтено, что зависимость полевых величин от времени, как правило, определяется множителем $\exp(i\omega t)$. Обычно это означает рассмотрение гармонической волны. Напряжения выражаются через $\varphi(x, z)$ и $\psi(x, z)$ по формулам

$$\sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right),$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

$$\sigma_{xx} = 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

Условия на граничной поверхности $z = h(x)$ имеют вид

$$\sigma_{ij} n_j = 0,\ i, j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где $\overline{n}$ – вектор нормали к свободной поверхности; $\sigma_{11} = \sigma_{xx}$, $\sigma_{22} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{33} = \sigma_{zz}$, $\sigma_{12} = \sigma_{xy}$, $\sigma_{13} = \sigma_{xz}$, $\sigma_{23} = \sigma_{yz}$.

Из уравнений (2) и (4) следует, что в случае задачи Рэлея для плоской свободной границы обобщение для неровной свободной границы является задачей о свободных колебаниях полупространства.

Рассмотрим случай, когда $h(x)$ – случайная функция, представимая в виде

$$h(x) = \langle h\rangle + \tilde{h},$$

где $\langle h\rangle$ – средняя поверхность; $\tilde{h}$ – случайная флуктуация от $\langle h\rangle$. Положим, что $\langle h\rangle = 0$ (плоскость $z = 0$), тогда двухточечная корреляционная функция для $h(x)$ имеет вид (в корреляционном приближении)

$$R(x_1,\ x_2) = \left\langle \tilde{h}(x_1)\tilde{h}(x_2)\right\rangle, \tag{5}$$

где x_1, x_2 – произвольные точки на оси x.

Предположим, что шероховатая поверхность описывается статистически однородной случайной функцией, тогда в формуле (5) имеем

$$R(x_1,\ x_2) = R(x_2 - x_1),$$

где $R(0)$ – дисперсия (среднеквадратичная амплитуда шероховатости), являющаяся постоянной величиной. Геометрически эти условия задают квазиплоскую поверхность, т. е. $h(x)$ – статистически однородная функция, характеризующая изменение $h(x)$ в направлении оси z.

Представим вектор $\mathbf{n}$ в следующем виде [22]:

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{dh}{dx}\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\left[1 + \left(\dfrac{dh}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \approx \left(-\frac{dh}{dx},\ 0,\ 1\right) \tag{6}$$

в предположении, что $\left(\dfrac{dh}{dx}\right)^2 \ll 1$.

В рассматриваемом случае граничные условия (4) записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xz} n_z &= 0,\\ \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zz} n_z &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Представим все величины в уравнениях (7) следующим образом:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^{(0)} + \mathbf{n}^{(1)},\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)},\ i, j = 1, 2. \tag{8}$$

Выпишем уравнения (7) для приближений по параметру $\dfrac{dh}{dx}$. Для нулевого приближения из уравнений (7) с учетом выражений (8) получаем

$$\sigma_{xx}^{(0)} n_x^{(0)} + \sigma_{xz}^{(0)} n_z^{(0)} = 0,$$

$$\sigma_{zx}^{(0)} n_x^{(0)} + \sigma_{zz}^{(0)} n_z^{(0)} = 0.$$

Для первого приближения имеем

$$\begin{gathered} \sigma_{xx}^{(0)} n_x^{(1)} + \sigma_{xx}^{(1)} n_x^{(0)} + \sigma_{xz}^{(0)} n_z^{(1)} + \sigma_{xz}^{(1)} n_z^{(0)} = 0, \\ \sigma_{zx}^{(0)} n_x^{(1)} + \sigma_{zx}^{(1)} n_x^{(0)} + \sigma_{zz}^{(0)} n_z^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)} n_z^{(0)} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

С учетом формулы (6) из уравнений (9) следуют уравнения

$$\begin{gathered} -\sigma_{xx}^{(0)} \frac{dh}{dx} + \sigma_{xz}^{(1)} = 0, \\ -\sigma_{zx}^{(0)} \frac{dh}{dx} + \sigma_{zz}^{(1)} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Из уравнений (10) выражаем приближения первого порядка для $\sigma_{ij}^{(1)}$ через $\sigma_{ij}^{(0)}$ при малой величине параметра $\frac{dh}{dx}$:

$$\begin{gathered} \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xx}^{(0)} \frac{dh}{dx}, \\ \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zx}^{(0)} \frac{dh}{dx}. \end{gathered} \tag{11}$$

С учетом приближений (11) граничные условия (7) имеют вид эффективных граничных условий на плоскости $z = 0$:

$$\begin{gathered} \sigma_{xz}^{(0)} + \sigma_{xx}^{(0)} \frac{dh}{dx} = 0 \text{ при } z = 0, \\ \sigma_{zz}^{(0)} + \sigma_{zx}^{(0)} \frac{dh}{dx} = 0 \text{ при } z = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Граничные условия (12) представляют собой приближение действительных граничных условий $\sigma_{ij} n_j = 0$ на границе $z = h(x)$, перенесенных на среднюю границу $z = 0$. Это приближение имеет место при выполнении условия $\left|\frac{dh}{dx}\right| \ll 1.$

В силу линейности уравнений (2) для приближений $\varphi^{(0)}$, $\psi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, $\psi^{(1)}$ записываются несвязанные системы уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} + k_l^2 \varphi^{(i)} = 0, \ i = 0, 1, \\ \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial z^2} + k_t^2 \psi^{(i)} = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

а также соответствующие напряжения (3) для приближений, уравнения для которых будут несвязанными:

$$\begin{gathered} \sigma_{xz}^{(i)} = \mu\left(\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial z^2}\right), \ i = 0, 1, \\ \sigma_{zz}^{(i)} = 2\mu\left(\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x \partial z}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right), \\ \sigma_{xx}^{(i)} = 2\mu\left(\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x \partial z}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Решение уравнений (13) для нулевого приближения ищем в виде

$$\varphi^{(0)} = A^{(0)}\exp\left(ikx + \nu_1 z\right),$$
$$\psi^{(0)} = B^{(0)}\exp\left(ikx + \nu_2 z\right), \tag{15}$$
$$\nu_1 = \left(k^2 - k_l^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \nu_2 = \left(k^2 - k_t^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ – постоянные амплитуды; $k = \dfrac{\omega}{c}$ – волновое число поверхностной волны; c – скорость поверхностной волны.

Подставляя уравнения (14) в граничные условия (12), получаем

$$\sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial z^2}\right) +$$
$$+ \frac{dh}{dx}\left[2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial x\partial z}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial z^2}\right)\right] = 0 \ \text{ при } z = 0, \tag{16}$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial x\partial z}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial z^2}\right) +$$
$$+ \frac{dh}{dx}\left[\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial z^2}\right)\right] = 0 \ \text{ при } z = 0. \tag{17}$$

После подстановки выражений (15) в формулы (16) и (17) имеем систему алгебраических уравнений относительно $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ вида

$$2\mu(ik)\nu_1 A^{(0)} + \frac{dh}{dx}\left[2\mu(ik)^2 + \lambda\left((ik)^2 + \nu^2\right)\right]A^{(0)} + \left[\mu\left((ik)^2 - \nu_2^2\right) + \frac{dh}{dx}2\mu(ik)\nu_2\right]B^{(0)} = 0,$$
$$\left[2\mu\nu_1^2 + \lambda\left((ik)^2 + \nu_1^2\right) + \frac{dh}{dx}2\mu(ik)\nu_1\right]A^{(0)} + \left[2\mu(ik)\nu_2 + \frac{dh}{dx}\mu\left((ik)^2 - \nu^2\right)\right]B^{(0)} = 0. \tag{18}$$

Система (18) является результатом применения метода характеристического уравнения к уравнениям (13), (14) и граничным условиям (12).

Условия существования ненулевых решений уравнений (18) приводят к обобщенному уравнению Рэлея, которое в случае шероховатой границы содержит малые безразмерные параметры $\dfrac{dh}{dx}, \left(\dfrac{dh}{dx}\right)^2$, представляющие собой случайные функции. Осредняя определитель системы уравнений (18) с учетом условий

$$\langle h\rangle = 0,\ \left\langle\frac{dh}{dx}\right\rangle = 0,\ \left\langle\left(\frac{dh}{dx}\right)^2\right\rangle = D,$$

находим осредненное уравнение Рэлея для множества возможных реализаций шероховатости поверхности, получаемых геометрическим или топологическим деформированием:

$$F(\eta,\ \nu,\ D) = (2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\theta\eta)} +$$
$$+ D\left\{(2-\eta)^2 + 2\eta(2-\eta) + 4\sqrt{(1-\eta)(1-\theta\eta)}\right\} = 0, \tag{19}$$

где безразмерные параметр θ и искомая величина η определяются по формулам

$$\eta = \left(\frac{c}{c_t}\right)^2,\ \theta = \left(\frac{c_t}{c_l}\right)^2,$$

здесь c – искомая скорость волны Рэлея; c_l – скорость продольной волны; c_t – скорость поперечной волны. При $D = 0$ уравнение (19) преобразуется в классическое уравнение Рэлея.

Отметим, что если не проводить осреднение определителя системы уравнений (18), а выписать его в явном виде, то получим уравнение

$$R^{(0)} + \frac{dh}{dx} R^{(1)} + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 R^{(2)} = 0, \tag{20}$$

где

$$R^{(0)} = -4\mu k^2 \nu_l \nu_t + \left[2\mu\nu_1^2 + \lambda\left((ik)^2 + \nu_1^2\right)\right]\mu\left((ik)^2 - \nu_2^2\right),$$

$$R^{(1)} = \left[2\mu(ik)^2 + \lambda\left((ik)^2 + \nu^2\right)\right]2\mu(ik)\nu_2 - \left[2\mu\nu_1^2 + \lambda\left((ik)^2 + \nu_1^2\right)\right]\left(2\mu(ik)\nu_2\right),$$

$$R^{(2)} = \left[2\mu(ik)^2 + \lambda\left((ik)^2 + \nu^2\right)\right]\left[\mu(ik)^2 - \nu^2\right] - 2\mu(ik)\nu_2 \cdot 2\mu(ik)\nu_1.$$

Уравнение (20) устанавливает связь между η и $h(x)$, которая имеет место, если возможна функциональная зависимость c_l, c_t от x. Это можно реализовать, если решать уравнение (20) относительно $\frac{dh}{dx}$. Осреднение целесообразно осуществлять на множестве возможных реализаций случайной функции $h(x)$, что дает уравнение (19), в котором все величины не зависят от x.

Отметим, что выбор малого безразмерного параметра $\frac{dh}{dx}$ не единствен.

Результаты и их обсуждение

Уравнение (19) решалось численно при различных значениях параметров ν и D. Результаты представлены в таблице.

Корни обобщенного уравнения Рэлея в зависимости от значений параметров ν и D

Roots of the generalised Rayleigh equation depending on the values of the parameters ν and D

D	$\nu = 0$ ($\theta = 0{,}5$)	$\nu = 0{,}1$ ($\theta = 0{,}444$)	$\nu = 0{,}3$ ($\theta = 0{,}286$)	$\nu = 0{,}4$ ($\theta = 0{,}1667$)	$\nu = 0{,}5$ ($\theta = 0$)
0	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0{,}764$	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0{,}798$	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0{,}86$	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0{,}888$	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0{,}913$
0,01	$\eta_1 = 0{,}086$ $\eta_2 = 0{,}723$	$\eta_1 = 0{,}076$ $\eta_2 = 0{,}765$	$\eta_1 = 0{,}058$ $\eta_2 = 0{,}841$	$\eta_1 = 0{,}049$ $\eta_2 = 0{,}874$	$\eta_1 = 0{,}041$ $\eta_2 = 0{,}903$
0,05	$\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 5{,}425$	$\eta_1 = 2{,}25$ $\eta_2 = 5{,}148$	$\eta_1 = 0{,}366$ $\eta_2 = 0{,}695$	$\eta_1 = 0{,}286$ $\eta_2 = 0{,}783$	$\eta_1 = 0{,}227$ $\eta_2 = 0{,}844$
0,06	$\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 5{,}466$	$\eta = 5{,}189$	Нет вещественных корней	$\eta_1 = 0{,}367$ $\eta_2 = 0{,}74$	$\eta_1 = 0{,}283$ $\eta_2 = 0{,}822$
0,08	$\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 5{,}55$	$\eta = 5{,}276$	Нет вещественных корней	Нет вещественных корней	$\eta_1 = 0{,}42$ $\eta_2 = 0{,}753$
0,09	$\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 5{,}593$	$\eta = 5{,}321$	Нет вещественных корней	Нет вещественных корней	$\eta_1 = 0{,}53$ $\eta_2 = 0{,}676$

Примечание. Линия синего цвета отделяет множество действительных корней от корней, не имеющих физического смысла.

Из таблицы видно, что нулевой корень уравнения Рэлея при $D = 0$ трансформируется в ненулевой, который перемещается влево вдоль оси η при росте D.

Действительные корни существуют для значений коэффициента Пуассона $0 \le \nu \le 0{,}5$ и дисперсии $0 \le D \le 0{,}09$. Таким образом, при $D \le 0{,}01$ существуют два физически допустимых корня. Это свидетельствует о возможности существования двух поверхностных волн, скорости которых при $\nu = 0$

различаются на порядок. Скорость более быстрой волны на порядок больше скорости медленной волны и на порядок меньше скорости поверхностной волны, распространяющейся около свободной поверхности без шероховатости. Из таблицы следует, что существование поверхностных волн зависит от величины дисперсии D, рост которой до 0,09 совместно с ростом ν до 0,5 свидетельствует о наличии двух поверхностных волн. Таким образом, около шероховатой границы распространяются две волны (быстрая и медленная), которые затухают с глубиной.

На рис. 2 представлена зависимость функции $F = F(\eta,\ \nu,\ D)$ в плоскости $O\eta F$ от величины $0 \le \eta \le 1$ при $\nu = 0{,}1$, $\nu = 0{,}3$, $\nu = 0{,}4$, $\nu = 0{,}5$ и $D = 0{,}01$, демонстрирующая сближение корней с ростом ν при $D = 0{,}01$. На рис. 3 изображена та же зависимость при $D = 0{,}05$.

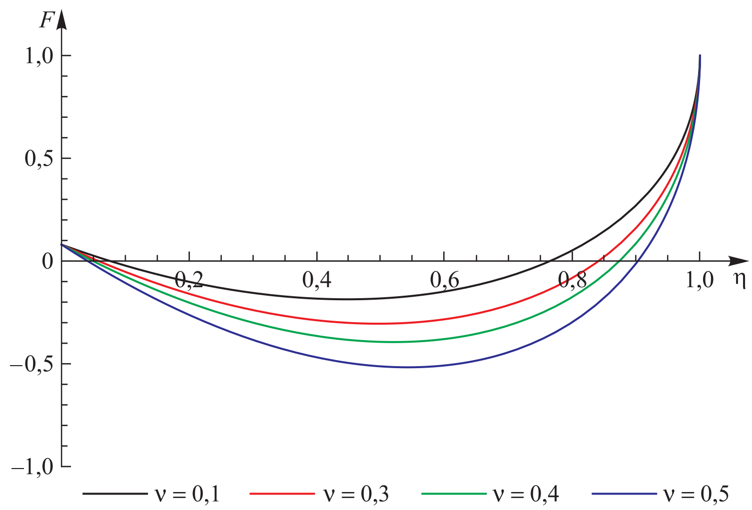

Рис. 2. Зависимость функции $F(\eta,\ \nu,\ D)$ от η
при $D = 0{,}01$ и различных значениях коэффициента Пуассона
Fig. 2. Function $F(\eta,\ \nu,\ D)$ versus η
for $D = 0.01$ and different values of Poisson's ratio

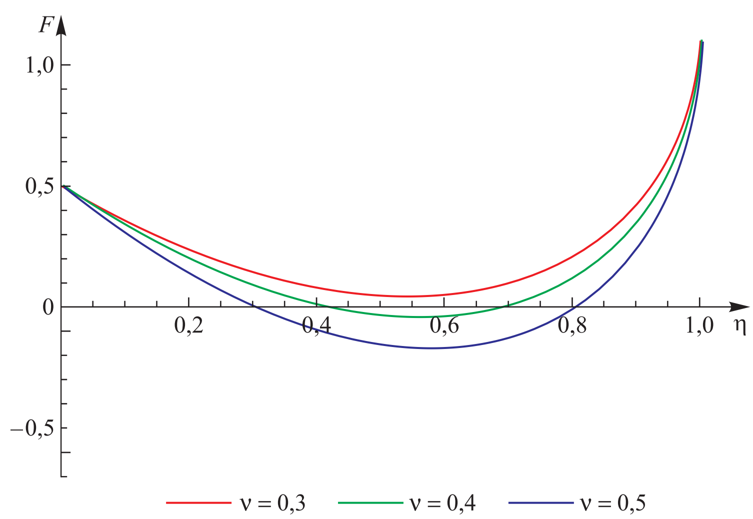

Рис. 3. Зависимость функции $F(\eta,\ \nu,\ D)$ от η
при $D = 0{,}05$ и различных значениях коэффициента Пуассона
Fig. 3. Function $F(\eta,\ \nu,\ D)$ versus η
for $D = 0.05$ and different values of Poisson's ratio

При $D = 0{,}09$ и $\nu = 0{,}5$ существуют две поверхностные волны с близкими скоростями. При дальнейшем росте D, начиная с $D = 0{,}1$, действительных и физически допустимых корней не существует. Точки пересечения кривых с осью η определяют корни обобщенного уравнения Рэлея.

На рис. 4 изображена зависимость η от ν при $D = 0$, $D = 0{,}01$, $D = 0{,}05$.

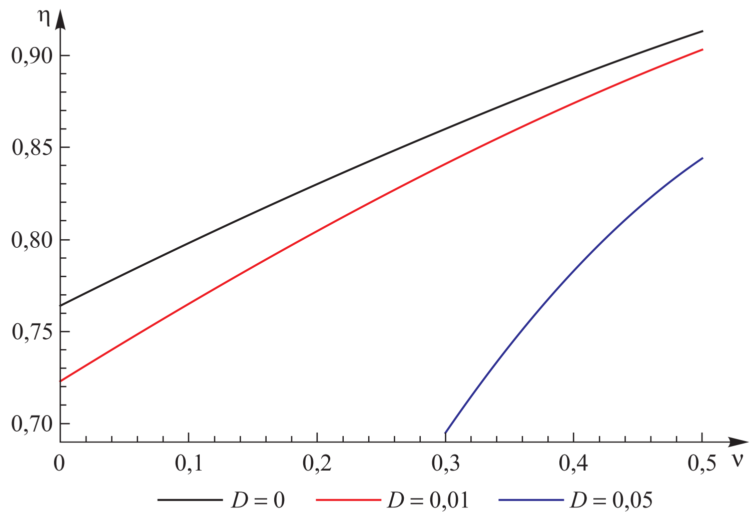

Рис. 4. Функция $\eta(\nu)$ при различных значениях параметра D

Fig. 4. Function $\eta(\nu)$ for different values of parameter D

Видно, что с ростом D зависимость η от ν при конкретном ν уменьшается. При $D = 0{,}05$ зависимость η от ν начинается с $\nu = 0{,}3$, что свидетельствует о существовании зоны нечувствительности, когда корни не имеют физического смысла.

Заключение

В ходе исследования получены следующие результаты.

1. Разработан подход к решению задачи о распространении поверхностных волн рэлеевского типа около свободной шероховатой границы, основанный на использовании эффективных граничных условий в сочетании с методом последовательных приближений по абсолютной величине градиента к поверхности. Существуют и другие подходы к исследованию волн Рэлея, использующие иные методы последовательных приближений.

2. Обобщен подход Рэлея к получению уравнения для скорости поверхностной волны, в которое входят безразмерный параметр D (дисперсия случайной функции $\frac{dh}{dx}$ эффективной поверхности, описывающей неровность поверхности) и параметр материала ν (коэффициент Пуассона).

3. Исследовано влияние свойств материала и геометрии поверхности на вид решения уравнения Рэлея, что выражается в появлении двух ненулевых корней обобщенного уравнения Рэлея, удовлетворяющих физическим требованиям. Больший корень соответствует скорости быстрой волны за счет неровности свободной поверхности, а меньший корень в случае материалов с коэффициентом Пуассона $0 \le \nu \le 0{,}5$ и границы с дисперсией $0{,}01 \le D \le 0{,}09$ определяет скорость медленной волны, которая отличается на порядок. При росте D до 0,09 корни (скорости) сближаются. Меньший корень трансформируется из нулевого корня уравнения Рэлея.

4. Получено решение задачи о собственных колебаниях упругого полупространства с неровной свободной границей методом последовательных приближений.

Библиографические ссылки

1. Oliner AA, editor. *Acoustic surface waves*. Berlin: Springer-Verlag; 1978. XI, 334 p. (Topics in applied physics; volume 24). DOI: 10.1007/3-540-08575-0.

2. Дьелесан Э, Руайе Д. *Упругие волны в твердых телах: применение для обработки сигналов.* Леманов ВВ, редактор. Москва: Наука; 1982. 424 с.

3. Викторов ИА. *Звуковые поверхностные волны в твердых телах.* Красильников ВА, редактор. Москва: Наука; 1981. 287 с.

4. Красильников ВА, Крылов ВВ. *Введение в физическую акустику.* Москва: Наука; 1984. 400 с.

5. Huang X, Maradudin AA. Propagation of surface acoustic waves across random gratings. *Physical Review B.* 1987;36(15): 7827–7839. DOI: 10.1103/physrevb.36.7827.

6. Бреховских ЛМ. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы. *Акустический журнал.* 1967;13(4):541–555.

7. Чигарев АВ. Распространение волн в стохастически неоднородной упругой среде. *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела.* 1970;4:87–92.

8. Бестужева НП, Чигарев АВ. Распространение поверхностных волн в стохастически неоднородной упругой среде (марковское приближение). *Прикладная математика и механика.* 1979;43(4):746–752.

9. Бабич ВМ, Кирпичникова НЯ. *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Ленинград: Издательство Ленинградского университета; 1974. 124 с.

10. Бабич ВМ, Молотков ИА. Применение асимптотических методов в теории поверхностных волн. В: *Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн; 13–17 июля 1970 г.; Ленинград, СССР.* Ленинград: Наука; 1971. с. 4–13.

11. Косачёв ВВ, Гандурин ЮН, Барсуков КВ. Дисперсия и затухание сдвиговых поверхностных акустических волн горизонтальной поляризации на свободной статистически шероховатой поверхности гексагонального кристалла. *Физика твердого тела.* 2004;46(10):1886–1892.

12. Толипов ХБ. Точное решение задачи взаимодействия неоднородных волн с плоской границей. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Физика. Химия.* 2006;7:144–149.

13. Бабич ВМ. О распространении волн Рэлея вдоль поверхности однородного упругого тела произвольной формы. *Доклады Академии наук СССР.* 1961;137(6):1263–1266.

14. Babich VM, Rusakova NYa. The propagation of Rayleigh waves over the surface of a non-homogeneous elastic body with an arbitrary form. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1963;2(4):719–735. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90536-6.

15. Krylov VV. Effect of surface phenomena in solids on surface acoustic waves. *Progress in Surface Science*. 1989;32(1):39–110. DOI: 10.1016/0079-6816(89)90019-1.

16. Крылов ВВ, Смирнова ЗА. Экспериментальное исследование дисперсии рэлеевской волны на шероховатой поверхности. *Акустический журнал.* 1990;36(6):1044–1048.

17. Mikhasev GI, Botogova MG, Eremeyev VA. On the influence of a surface roughness on propagation of anti-plane short-length localized waves in a medium with surface coating. *International Journal of Engineering Science*. 2021;158:103428. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103428.

18. Bass FG, Fuks IM. *Wave scattering from statistically rough surfaces*. Oxford: Pergamon Press; 1979. XI, 527 p. (International series in natural philosophy; volume 93).

19. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media*. *Volume 2. Multiple scattering, turbulence, rough surfaces, and remote sensing*. New York: Academic Press; 1978. [339 p.].

20. Лысанов ЮП. Об одном приближенном решении задачи о рассеянии звуковых волн на неровной поверхности. *Акустический журнал.* 1956;2(2):182–187.

21. Исакович МА. О рассеянии и излучении волн статистически неоднородными и статистически колеблющимися поверхностями. *Акустический журнал.* 1956;2(2):146–149.

22. Хусу АП, Витенберг ЮР, Пальмов ВА. *Шероховатость поверхностей: теоретико-вероятностный подход.* Первозванский АА, редактор. Москва: Наука; 1975. 343 с. (Физико-математическая библиотека инженера).

References

1. Oliner AA, editor. *Acoustic surface waves*. Berlin: Springer-Verlag; 1978. XI, 334 p. (Topics in applied physics; volume 24). DOI: 10.1007/3-540-08575-0.

2. Dieulesaint E, Royer D. *Ondes élastiques dans les solides: applications au traitement du signal.* Paris: Masson et Cie; 1974. XVI, 407 p.

Russian edition: Dieulesaint E, Royer D. *Uprugie volny v tverdykh telakh: primenenie dlya obrabotki signalov.* Lemanov VV, editor. Moscow: Nauka; 1982. 424 p.

3. Viktorov IA. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh* [Sound surface waves in solids]. Krasil’nikov VA, editor. Moscow: Nauka; 1981. 287 p. Russian.

4. Krasil’nikov VA, Krylov VV. *Vvedenie v fizicheskuyu akustiku* [Introduction to physical acoustics]. Moscow: Nauka; 1984. 400 p. Russian.

5. Huang X, Maradudin AA. Propagation of surface acoustic waves across random gratings. *Physical Review B*. 1987;36(15):7827–7839. DOI: 10.1103/physrevb.36.7827.

6. Brekhovskikh LM. [About surface waves in a solid held by the curvature of the boundary]. *Akusticheskii zhurnal*. 1967;13(4):541–555. Russian.

7. Chigarev AV. [Wave propagation in a stochastically inhomogeneous elastic medium]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 1970;4:87–92. Russian.

8. Bestuzheva NP, Chigarev AV. [Propagation of surface waves through a stochastic inhomogeneous elastic medium (the Markovian approximation)]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1979;43(4):746–752. Russian.

9. Babich VM, Kirpichnikova NYa. *Metod pogranichnogo sloya v zadachakh difraktsii* [The boundary-layer method in diffraction problems]. Leningrad: Izdatel’stvo Leningradskogo universiteta; 1974. 124 p. Russian.

10. Babich VM, Molotkov IA. [Asymptotic methods application in the theory of surface waves]. In: *Trudy V Vsesoyuznogo simpoziuma po difraktsii i rasprostraneniyu voln; 13–17 iyulya 1970 g.; Leningrad, SSSR* [Proceedings of the 5th All-Union symposium on diffraction and wave propagation; 1970 July 13–17; Leningrad, USSR]. Leningrad: Nauka; 1971. p. 4–13. Russian.

11. Kosachev VV, Gandurin YuN, Barsukov KV. [Dispersion and attenuation of surface shear acoustic waves of horizontal polarisation on the free statistically rough surface of the hexagonal crystal]. *Fizika tverdogo tela.* 2004;46(10):1886–1892. Russian.

12. Tolipov KhB. [Exact solution of the problem of inhomogeneous waves interaction with a flat boundary]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Physics. Chemistry*. 2006;7:144–149. Russian.

13. Babich VM. [On the propagation of Rayleigh waves along the surface of a homogeneous elastic body of arbitrary shape]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1961;137(6):1263–1266. Russian.

14. Babich VM, Rusakova NYa. The propagation of Rayleigh waves over the surface of a non-homogeneous elastic body with an arbitrary form. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1963;2(4):719–735. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90536-6.

15. Krylov VV. Effect of surface phenomena in solids on surface acoustic waves. *Progress in Surface Science*. 1989;32(1):39–110. DOI: 10.1016/0079-6816(89)90019-1.

16. Krylov VV, Smirnova ZA. Experimental investigation of Rayleigh wave dispersion on a rough surface. *Akusticheskii zhurnal*. 1990;36(6):1044–1048. Russian.

17. Mikhasev GI, Botogova MG, Eremeyev VA. On the influence of a surface roughness on propagation of anti-plane short-length localized waves in a medium with surface coating. *International Journal of Engineering Science*. 2021;158:103428. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103428.

18. Bass FG, Fuks IM. *Wave scattering from statistically rough surfaces*. Oxford: Pergamon Press; 1979. XI, 527 p. (International series in natural philosophy; volume 93).

19. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media. Volume 2. Multiple scattering, turbulence, rough surfaces, and remote sensing.* New York: Academic Press; 1978. [339 p.].

20. Lysanov YuP. [One approximate solution for the problem of the scattering of acoustic waves by an uneven surface]. *Akusticheskii zhurnal*. 1956;2(2):182–187. Russian.

21. Isakovich MA. [On scattering and radiation of waves by statistically inhomogeneous and statistically vibrating surfaces]. *Akusticheskii zhurnal*. 1956;2(2):146–149. Russian.

22. Khusu AP, Vitenberg YuR, Pal'mov VA. *Sherokhovatost' poverkhnostei: teoretiko-veroyatnostnyi podkhod* [Surface roughness: a probabilistic approach]. Pervozvanskii AA, editor. Moscow: Nauka; 1975. 343 p. (Fiziko-matematicheskaya biblioteka inzhenera). Russian.

Получена 02.02.2022 / исправлена 23.05.2022 / принята 17.01.2023.
Received 02.02.2022 / revised 23.05.2022 / accepted 17.01.2023.