Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Real, complex and functional analysis

УДК 517.5

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ $|x|^{\alpha}$ С УЗЛАМИ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА ПЕРВОГО РОДА

В. Ю. МЕДВЕДЕВА[1)]***, Е. А. РОВБА***[1)]

[1)]*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь*

Рассмотрены приближения функции $|x|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, интерполяционными рациональными функциями Лагранжа на отрезке $[-1, 1]$. В качестве узлов интерполирования выбраны нули рациональной функции Чебышева – Маркова первого рода. Получены интегральное представление остатка интерполирования и оценка сверху рассматриваемых равномерных приближений. Подробно изучены полиномиальный и общий рациональный случаи. В полиномиальном случае найдена асимптотическая оценка равномерных приближений. При приближении интерполяционными рациональными функциями Лагранжа с узлами Чебышева – Маркова первого рода получены верхние и нижние оценки. Эти оценки близки к оценке наилучших равномерных рациональных приближений анализируемой функции на отрезке $[-1, 1]$.

Образец цитирования:
Медведева ВЮ, Ровба ЕА. Рациональная интерполяция функции $|x|^{\alpha}$ с узлами Чебышева – Маркова первого рода. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:6–19.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-6-19

For citation:
Medvedeva VYu, Rouba YA. Rational interpolation of a function $|x|^{\alpha}$ with Chebyshev – Markov nodes of the first kind. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:6–19. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-6-19

Авторы:
Виктория Юрьевна Медведева – аспирантка кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики. Научный руководитель – Е. А. Ровба.
Евгений Алексеевич Ровба – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Authors:
Victoria Yu. Medvedeva, postgraduate student at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
medvedeva_vj_97@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-2548-7540
Yauheni A. Rouba, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
rovba.e@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1265-1965

Ключевые слова: рациональная дробь Чебышева – Маркова; рациональная интерполяция; функция со степенной особенностью.

Благодарность. Авторы выражают признательность профессору А. А. Пекарскому за полезное обсуждение результатов работы.

RATIONAL INTERPOLATION OF A FUNCTION $|x|^{\alpha}$ WITH CHEBYSHEV – MARKOV NODES OF THE FIRST KIND

V. Yu. MEDVEDEVA [a], ***Y. A. ROUBA*** [a]

[a] *Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ažeška Street, Hrodna 230023, Belarus*
Corresponding author: V. Yu. Medvedeva (medvedeva_vj_97@mail.ru)

This paper considers the approximations of the function $|x|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, by interpolation rational Lagrange functions on the interval $[-1, 1]$. Zeros of the rational Chebyshev – Markov function of the first kind are chosen as interpolation nodes. An integral representation of the interpolation remainder and an upper estimation for the considered uniform approximations are obtained. The polynomial and general rational cases are studied in detail. In the polynomial case, an asymptotic estimate for uniform approximations is found. When approximating by interpolation rational Lagrange functions with Chebyshev – Markov nodes of the first kind, the upper and lower estimations are found. These estimations are close to that of the best uniform approximations of the function under consideration on the interval $[-1, 1]$.

Keywords: rational Chebyshev – Markov fraction; rational interpolation; function with power singularity.

Acknowledgements. The authors are grateful to professor A. A. Pekarsky for a useful discussion of the results of this work.

Введение

Многие результаты в теории аппроксимации восходят к приближениям простейших функций. Весьма важной в этом смысле является роль функций $|x|$, $|x|^{\alpha}$, e^x и т. п. Наилучшей полиномиальной аппроксимации функции $|x|^{\alpha}$ в различных метриках посвящены работы С. Н. Бернштейна [1], С. М. Никольского [2], Р. А. Райцина [3], А. Дж. Карпентера и Р. С. Варги [4] и др. Рациональная аппроксимация этой функции также вызывает интерес исследователей (см., например, [5, p. 106; 6–9]).

Некоторые математики обратились к полиномиальной аппроксимации функций со степенной особенностью конкретными методами приближений. Так, Р. А. Райцин [10] проанализировал приближения таких функций частичными суммами рядов Фурье – Чебышева. М. И. Ганзбург [11] исследовал полиномиальные аппроксимации функции $|x|^{\alpha}$ на отрезке $[-1, 1]$ по расширенным системам узлов Чебышева. М. Реверс [12] получил подобные результаты в случае нечетного числа узлов Чебышева первого рода.

В статье [13] рассматривалась аппроксимация функций со степенной особенностью по расширенной системе узлов Чебышева – Маркова.

В настоящей работе изучаются аппроксимационные свойства интерполяционных рациональных функций с узлами Чебышева – Маркова первого рода, построенных для функции $f(x) = |x|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \in [-1, 1]$.

Цель работы – исследование приближений функции $|x|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ интерполяционными рациональными функциями Лагранжа с узлами в нулях рациональных функций Чебышева – Маркова первого рода, а также получение интегрального представления остатка интерполирования, асимптотических и двусторонних оценок рассматриваемых равномерных приближений.

Результаты и их обсуждение

Общий случай. Пусть a_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, – комплексные числа ($\operatorname{Re} a_k = 0$), удовлетворяющие следующим условиям:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0, \; r = 2\left[\frac{\alpha}{4}\right] + 4, \; n > r,$$
$$a_{n+k} = -a_k, \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $[\alpha]$ означает целую часть числа α.

Тогда рассмотрим функцию

$$\mu_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}$$

и введем рациональную косинус-дробь Чебышева – Маркова [14, с. 47]

$$m_{2n}(x) = \cos \mu_{2n}(x).$$

Рациональная функция $m_{2n}(x)$ имеет вид

$$m_{2n}(x) = \frac{p_{2n}(x)}{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + |a_k|^2 x^2\right)},$$

где $p_{2n}(x)$ – некоторый четный алгебраический полином порядка не выше $2n$. Обозначим через x_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, нули функции $m_{2n}(x)$. Они являются простыми, симметричными и принадлежат интервалу $(-1, 1)$:

$$\begin{gathered} -1 < x_{2n} < x_{2n-1} < \ldots < x_{n+1} < 0 < x_n < \ldots < x_2 < x_1 < 1, \\ x_{n+k} = -x_{n-k+1},\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2}$$

Построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа с узлами (2) для функции $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$:

$$L_{2n-2}(x, f) = \sum_{k=1}^{2n} |x_k|^\alpha l_k(x), \tag{3}$$

где $l_k(x) = \dfrac{m_{2n}(x)}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$.

Везде далее будем называть точки x_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, узлами Чебышева – Маркова первого рода.

Нетрудно видеть, что в случае, когда параметры a_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, удовлетворяют условиям (1), рациональная функция $L_{2n-2}(x, f)$ является четной и имеет порядок не выше $2n - 2$.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} \varepsilon_{2n-2}(x, a) = |x|^\alpha - L_{2n-2}(x, f),\ x \in [-1, 1], \\ \varepsilon_{2n-2}(a) = \left\| \varepsilon_{2n-2}(x, a) \right\|_{C[-1,1]}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$.

Аппроксимационные свойства величин (4) описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Для приближений функции $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ интерполяционными рациональными функциями Лагранжа (3) с узлами Чебышева – Маркова (2) справедливы соотношения*

$$\varepsilon_{2n-2}(x, a) = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2} m_{2n}(x) \int_0^1 \frac{u^{\alpha+1}}{\left(1 - u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{1}{x^2\left(1 - u^2\right) + u^2} \frac{du}{\psi_n(u) + \psi_n^{-1}(u)}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_{2n-2}(a) \le \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{\left(1 - u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{du}{|\psi_n(u)| + |\psi_n^{-1}(u)|}, \tag{6}$$

где

$$\psi_n(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k},\ \beta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + |a_k|^2}},\ k = 1, 2, \ldots, n,\ x \in [-1, 1],\ n > r.$$

Если полюсы рациональной функции $m_{2n}(x)$ имеют четную кратность, то оценка (6) является точной.

Доказательство. Обратившись к формуле (3), получим

$$L_{2n-2}(x,\, f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^{\alpha} l_k(x) + \sum_{k=n+1}^{2n} (-x_k)^{\alpha} l_k(x).$$

Будем полагать, что $x \in (0,\, 1]$, и исходя из тождества

$$\sum_{k=1}^{2n} l_k(x) \equiv 1$$

найдем

$$\varepsilon_{2n-2}(x,\, a) = m_{2n}(x)\big(S_1(x) + S_2(x)\big), \tag{7}$$

где

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{\alpha} - x_k^{\alpha}}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)},\ S_2(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^{\alpha} - (-x_k)^{\alpha}}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)}.$$

Выберем однозначную ветвь функции $f(z) = z^{\alpha}$ в плоскости с разрезом по промежутку $\{z : z = iy,\ -\infty < y < 0\}$ так, что $f(1) = 1$. Тогда для функций $S_1(x)$ и $S_2(x)$ легко получить интегральные представления:

$$S_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \frac{x^{\alpha} - z^{\alpha}}{(x - z) m_{2n}(z)}\, dz,\ S_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_\delta} \frac{x^{\alpha} - (-z)^{\alpha}}{(x - z) m_{2n}(z)}\, dz, \tag{8}$$

где контур $\Gamma_\delta = \Gamma^-_{1,\delta} \cup \Gamma^-_{2,\delta} \cup \Gamma^-_{3,\delta}$,

$$\Gamma^+_{1,\delta} = \{z : z = iy,\ \delta < y < +\infty\},$$

$$\Gamma^+_{2,\delta} = \left\{z : |z| = \delta,\ -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\Gamma^+_{3,\delta} = \{z : z = iy,\ -\infty < y < -\delta\},$$

а контур $\Gamma'_\delta = \Gamma^+_{3,\delta} \cup \Gamma^-_{4,\delta} \cup \Gamma^+_{1,\delta}$,

$$\Gamma^+_{4,\delta} = \left\{z : |z| = \delta,\ \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{3\pi}{2}\right\},$$

δ, $0 < \delta < x_n$, – достаточно малое положительное число.

Так как $x \in (0,\, 1]$, $\alpha > 0$ и $|m_{2n}(0)| = 1$, то нетрудно проверить, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\Gamma^+_{2,\delta}} \frac{x^{\alpha} - z^{\alpha}}{(x - z) m_{2n}(z)}\, dz = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\Gamma^+_{4,\delta}} \frac{x^{\alpha} - (-z)^{\alpha}}{(x - z) m_{2n}(z)}\, dz = 0.$$

Следовательно, из равенств (8) имеем

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{x^{\alpha} - z^{\alpha}}{(x - z) m_{2n}(z)}\, dz, \tag{9}$$

$$S_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{x^{\alpha} - (-z)^{\alpha}}{(x - z) m_{2n}(z)}\, dz. \tag{10}$$

Займемся интегралом (9). Разобьем его на два интеграла по промежуткам $(-i\infty,\, 0]$ и $[0,\, +i\infty)$ и в первом интеграле сделаем замену $z = it$, а во втором интеграле – замену $z = -it$. Получим

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{(x-it)m_{2n}(it)}dt + \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{(x+it)m_{2n}(it)}dt \right).$$

Здесь также воспользовались четностью функции $m_{2n}(t)$.

Таким образом,

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{x-it} + \frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{x+it} \right)\frac{dt}{m_{2n}(it)}.$$

Аналогично из интеграла (10) можно получить

$$S_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{x-it} + \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{x+it} \right)\frac{dt}{m_{2n}(it)}.$$

Из найденных интегральных представлений для функций $S_1(x)$ и $S_2(x)$ имеем

$$H_n(x) = S_1(x) + S_2(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{x-it} + \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{x+it} - \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{x-it} - \frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{x+it} \right)\frac{dt}{m_{2n}(it)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{it^{\alpha+1}\left(i^\alpha - (-i)^\alpha\right)}{x^2+t^2}\frac{dt}{m_{2n}(it)}.$$

Заметим, что

$$i^\alpha - (-i)^\alpha = 2i\sin\frac{\pi\alpha}{2},$$

отсюда получим

$$H_n(x) = -\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{x^2+t^2}\frac{dt}{m_{2n}(it)}$$

и, следовательно (см. формулу (7)),

$$\varepsilon_{2n-2}(x, a) = -\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}m_{2n}(x)\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{x^2+t^2}\frac{dt}{m_{2n}(it)},\ x\in[-1, 1]. \tag{11}$$

Обозначим через $J_n(x)$ интеграл в правой части равенства (11):

$$J_n(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{x^2+t^2}\frac{dt}{m_{2n}(it)}.$$

Сделаем в нем замену $t = -i\dfrac{1+z^2}{1-z^2},\ dt = -\dfrac{4iz}{\left(1-z^2\right)^2}dz.$

Тогда

$$J_n(x) = -4i\int_\Gamma\left(-i\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^{\alpha+1}\frac{z}{\left(1+z^2\right)^2 - x^2\left(1-z^2\right)^2}\frac{dz}{M_{2n}(iz)}, \tag{12}$$

где $M_{2n}(y)$ – рациональная косинус-дробь Бернштейна [14, с. 49] с полюсами в точках z_k и $\overline{z}_k$,

$$z_k = i\frac{1+a_k}{\sqrt{1+|a_k|^2}},\ k = 1, 2, \ldots, 2n;$$

$$\Gamma = \left\{ z : z = e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Заметим, что

$$M_{2n}(y)=\frac{1}{2}\left(\chi_{2n}(y)+\chi_{2n}^{-1}(y)\right),\ \chi_{2n}(y)=\prod_{k=1}^{2n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z}_k}.$$

В интеграле (12) сделаем еще одну замену:

$$z=u+i\sqrt{1-u^2},\ u=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ dz=i\frac{u+i\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

Получим

$$J_n(x)=\int_0^1\frac{u^{\alpha+1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\frac{1}{x^2\left(1-u^2\right)+u^2}\frac{du}{M_{2n}\left(iu-\sqrt{1-u^2}\right)}. \tag{13}$$

Преобразовывая выражение для $M_{2n}\left(iu-\sqrt{1-u^2}\right)$, приходим к следующей формуле:

$$M_{2n}\left(iu-\sqrt{1-u^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\psi_n(u)+\psi_n^{-1}(u)\right),$$

где $\psi_n(u)=\prod_{k=1}^{n}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}$, $\beta_k=\frac{1}{\sqrt{1+|a_k|^2}}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Тогда из представления (13) имеем

$$J_n(x)=-2\int_0^1\frac{u^{\alpha+1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\frac{1}{x^2\left(1-u^2\right)+u^2}\frac{du}{\psi_n(u)+\psi_n^{-1}(u)}.$$

Подставив данное выражение в равенство (11), получим формулу (5).

Теперь рассмотрим функцию

$$\varphi_u(x)=\frac{u^2}{x^2\left(1-u^2\right)+u^2},\ x\in[0, 1].$$

Очевидно, что функция $\varphi_u(x)$ является убывающей на отрезке $[0, 1]$ и $\varphi_u(0)=1$ при каждом фиксированном u, $u\in(0, 1)$.

Если учесть, что и $|m_{2n}(0)|=1$, то из равенства (5) следует неравенство (6), причем знак равенства имеет место в случае, когда функция $\psi_n(x)$ не меняет знак на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 1 доказана.

Полиномиальный случай. Если положить все a_k, $k=1, 2, \ldots, n$, равными 0, то $m_{2n}(x)=\cos 2n\arccos x$, т. е. является полиномом Чебышева, а узлы x_k, $k=1, 2, \ldots, 2n$, есть узлы Чебышева.

В этом случае введем обозначение (см. формулу (4))

$$\varepsilon_{2n-2}(0)=\varepsilon_{2n-2, 0}.$$

Теорема 2. *Для приближений функции* $f(x)=|x|^{\alpha}$, $\alpha>0$, *на отрезке* $[-1, 1]$ *интерполяционными полиномами Лагранжа с узлами Чебышева первого рода справедливо асимптотическое равенство*

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^{\alpha}\varepsilon_{2n-2, 0}=\frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right|\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t+e^{-t}}dt. \tag{14}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2}\Gamma(\alpha)\le\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t+e^{-t}}dt\le\Gamma(\alpha),$$

т. е.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t + e^{-t}}\,dt = \theta\Gamma(\alpha),$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера; $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Доказательство. Рассмотрим следующее равенство, полученное из оценки (6):

$$\varepsilon_{2n-2}(0) = \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{du}{\psi_n(u) + \psi_n^{-1}(u)}, \quad \psi_n(u) = \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n. \tag{15}$$

Найдем асимптотическое выражение интеграла в правой части равенства (15). С этой целью рассмотрим интеграл

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}du}{\psi_n(u) + \psi_n^{-1}(u)}. \tag{16}$$

Введем обозначение

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt[3]{(2n)^2}}.$$

Разобьем интеграл (16) на два интеграла:

$$I_n = \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1}du}{\psi_n(u) + \psi_n^{-1}(u)} + \int_{\delta_n}^1 \frac{u^{\alpha-1}du}{\psi_n(u) + \psi_n^{-1}(u)} = I_n^{(1)} + I_n^{(2)}. \tag{17}$$

Вначале оценим второй интеграл:

$$I_n^{(2)} = \int_{\delta_n}^1 \frac{u^{\alpha-1}\psi_n(u)}{1 + \psi_n^2(u)}\,du.$$

Воспользовавшись неравенством

$$\frac{1-u}{1+u} \le e^{-2u}, \; u \in [0, 1], \tag{18}$$

найдем

$$I_n^{(2)} \le \int_{\delta_n}^1 \frac{u^{\alpha-1}e^{-2nu}}{1 + e^{-4nu}}\,du.$$

Сделаем в этом интеграле замену $\upsilon = 2nu$ и получим

$$I_n^{(2)} \le \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_{2n\delta_n}^{2n} \frac{\upsilon^{\alpha-1}e^{-\upsilon}}{1 + e^{-2\upsilon}}\,d\upsilon.$$

Заметим, что $\delta_n n \to \infty$, $n \to \infty$, отсюда

$$I_n^{(2)} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \; n \to \infty. \tag{19}$$

Теперь займемся интегралом $I_n^{(1)}$ в формуле (17). Нетрудно проверить, что справедливо следующее неравенство:

$$\frac{1-u}{1+u} \ge e^{-2u\left(1+\frac{u}{2}\right)}, \; u \in [0, \delta_n].$$

Для этого достаточно показать, что функция $\varphi(u)=(1-u)e^{2u}-(1+u)e^{-u^2}$ является возрастающей на отрезке $[0,\,\delta_n]$, и учесть равенство $\varphi(0)=0$.

Следовательно,

$$\psi_n(u)\geq e^{-2nu\left(1+\frac{u}{2}\right)}>e^{-2nu}e^{\frac{-\sqrt{\delta_n}}{2}}>\left(1-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right)e^{-2nu},\ u\in[0,\,\delta_n].$$

Тогда, учитывая эти неравенства и формулу (18), находим

$$\left(1-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right)e^{-2nu}+e^{2nu}\leq\psi_n(u)+\psi_n^{-1}(u)\leq e^{-2nu}+\left(1+\sqrt{\delta_n}\right)e^{2nu},\ u\in[0,\,\delta_n].$$

Таким образом, получаем

$$\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}du}{e^{-2nu}+\left(1+\sqrt{\delta_n}\right)e^{2nu}}\leq I_n^{(1)}\leq\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}du}{\left(1-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right)e^{-2nu}+e^{2nu}}.$$

Теперь рассмотрим следующую разность:

$$\Lambda_n=\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}du}{\left(1-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right)e^{-2nu}+e^{2nu}}-\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}du}{e^{-2nu}+\left(1+\sqrt{\delta_n}\right)e^{2nu}}=$$

$$=\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}\left(e^{-2nu}+\left(1+\sqrt{\delta_n}\right)e^{2nu}\right)-u^{\alpha-1}\left(\left(1-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right)e^{-2nu}+e^{2nu}\right)}{\left(\left(1-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right)e^{-2nu}+e^{2nu}\right)\left(e^{-2nu}+\left(1+\sqrt{\delta_n}\right)e^{2nu}\right)}du=$$

$$=\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}\sqrt{\delta_n}\left(2^{-1}e^{-2nu}+e^{2nu}\right)du}{\left(\left(1-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right)e^{-2nu}+e^{2nu}\right)\left(e^{-2nu}+\left(1+\sqrt{\delta_n}\right)e^{2nu}\right)}\leq$$

$$\leq\sqrt{\delta_n}\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}du}{\left(e^{-2nu}+\left(1+\sqrt{\delta_n}\right)e^{2nu}\right)}=\sqrt{\delta_n}\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}du}{e^{2nu}\left(1+\sqrt{\delta_n}+e^{-4nu}\right)}\leq$$

$$\leq\sqrt{\delta_n}\int_0^{\delta_n}u^{\alpha-1}e^{-2nu}du.$$

В последнем интеграле произведем замену $2nu=\upsilon$ и получим

$$\Lambda_n\leq\frac{\sqrt{\delta_n}}{(2n)^\alpha}\int_0^{2n\delta_n}\upsilon^{\alpha-1}e^{-\upsilon}d\upsilon=o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\ n\to\infty.\qquad(20)$$

С учетом соотношения (20) имеем

$$I_n^{(1)}=\int_0^{\delta_n}\frac{u^{\alpha-1}du}{\left(1-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right)e^{-2nu}+e^{2nu}}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\ n\to\infty.$$

В полученном интеграле сделаем уже известную замену $2nu = \upsilon$:

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}} \frac{\upsilon^{\alpha-1} d\upsilon}{\left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-\upsilon} + e^{\upsilon}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}} \frac{\upsilon^{\alpha-1} d\upsilon}{e^{\upsilon} + e^{-\upsilon}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \; n \to \infty.$$

Осталось заметить, что

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}}^{+\infty} \frac{\upsilon^{\alpha-1} d\upsilon}{e^{\upsilon} + e^{-\upsilon}} = o(1), \; n \to \infty, \; \alpha > 0,$$

и в итоге получим

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\upsilon^{\alpha-1} d\upsilon}{e^{\upsilon} + e^{-\upsilon}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \; n \to \infty.$$

Если теперь учесть соотношение (19), то из формулы (17) имеем (см. интеграл (16))

$$I_n = \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\upsilon^{\alpha-1} d\upsilon}{e^{\upsilon} + e^{-\upsilon}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \; n \to \infty. \tag{21}$$

Обратимся к интегралу в равенстве (15):

$$J_n = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{\left(1 - u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{du}{\psi_n(u) + \psi_n^{-1}(u)}.$$

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$J_n \le \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} du}{\psi_{n-r}(u) + \psi_{n-r}^{-1}(u)} = I_{n-r},$$

с одной стороны (см. интеграл (16)),

$$J_n \ge \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} du}{\psi_{n+r}(u) + \psi_{n+r}^{-1}(u)} = I_{n+r},$$

с другой стороны.

Тогда на основании равенства (21) имеем

$$J_n = \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\upsilon^{\alpha-1} d\upsilon}{e^{\upsilon} + e^{-\upsilon}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \; n \to \infty.$$

В итоге приходим к равенству (14). Теорема 2 доказана.

В точности такой же результат получен М. И. Ганзбургом [11], но только для случая, когда интерполирование ведется по расширенной системе узлов Чебышева первого рода, т. е. к узлам Чебышева $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ добавляется точка $x_0 = 0$. Таким образом, добавление одного узла интерполирования не влияет на точность приближений.

Рациональный случай. Введем обозначение

$$\varepsilon_{2n-2} = \inf_{\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}} \varepsilon_{2n-2}(a).$$

Параметры $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ здесь удовлетворяют условиям (1).

Теорема 3. *Для равномерных приближений функции $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, интерполяционными рациональными функциями Лагранжа (3) с узлами Чебышева – Маркова (2) справедливы неравенства*

$$C(\alpha)\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right|\exp\left(-\pi\sqrt{2n\alpha}\right)\le\varepsilon_{2n-2}\le C_0(\alpha)\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right|\sqrt{n}\exp\left(-\pi\sqrt{2n\alpha}\right),\ n>r,$$

где $C(\alpha)$, $C_0(\alpha)$ *– некоторые положительные постоянные, зависящие только от параметра* α.

В этом случае обратимся к равенству (5). Введем обозначение для интеграла, стоящего в правой части:

$$J_n(x)=\int_0^1\frac{u^{\alpha+1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\frac{1}{x^2\left(1-u^2\right)+u^2}\frac{du}{\psi_n(u)+\psi_n^{-1}(u)}. \tag{22}$$

Так как функция $\varphi_x(u)=\dfrac{u^2}{x^2\left(1-u^2\right)+u^2}$ переменной u является возрастающей на отрезке $[0,1]$ и $\varphi_x(1)=1$ при каждом фиксированном x, $x\in(0,1]$, то по формуле Бонне [15, с. 119]

$$J_n(x)=\int_\xi^1\frac{u^{\alpha-1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\frac{du}{\psi_n(u)+\psi_n^{-1}(u)},\ \xi\in[0,1).$$

Отсюда следует, что

$$J_n(x)=\int_\xi^1\frac{u^{\alpha-1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\frac{\psi_n(u)}{1+\psi_n^2(u)}du=J_n^{(1)}-J_n^{(2)}, \tag{23}$$

где

$$J_n^{(1)}=\int_\xi^1\frac{u^{\alpha-1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\psi_n(u)du,$$

$$J_n^{(2)}=\int_\xi^1\frac{u^{\alpha-1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\frac{\psi_n^3(u)}{1+\psi_n^2(u)}du.$$

Исследуем первый интеграл. Так как параметры a_k, $k=1, 2, \ldots, 2n$, удовлетворяют условиям (1), рассматриваемый интеграл можно представить в виде

$$J_n^{(1)}=\int_\xi^1 a(u)u^{\alpha-1}\prod_{k=1}^{n_1}\frac{u-\beta_{r+k}}{u+\beta_{r+k}}du,$$

где

$$a(u)=\frac{1}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^r,\ r=2\left[\frac{\alpha}{4}\right]+4,\ n=n_1+r,\ n>r.$$

Пусть

$$\prod_{k=1}^{n_1}\frac{u-\beta_{r+k}}{u+\beta_{r+k}}=\varphi_n(u),$$

тогда

$$J_n^{(1)}=\int_\xi^1 a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n(u)du. \tag{24}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi\left(\beta_{r+1},\beta_{r+2},\ldots,\beta_n\right)=\int_\xi^1 a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n^2(u)du$$

переменных $\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \ldots, \beta_n$.

Эта функция является непрерывной на $(n-r)$-мерном кубе $[0, 1]^{n-r}$, и нетрудно показать, что в некоторой точке $\left(\beta_{r+1}^*, \beta_{r+2}^*, \ldots, \beta_n^*\right) \in (0, 1)^{n-r}$ она достигает минимума, причем числа $\beta_{r+1}^*, \beta_{r+2}^*, \ldots, \beta_n^*$ попарно различны [16]. Заметим также, что в дальнейших рассуждениях мы следуем методу, предложенному в работе [16].

Значит, в указанной точке

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_m} = 0,\ m = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n.$$

Так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_m} = \int_\xi^1 2a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n(u) \prod_{\substack{k=r+1,\\ k\neq m}}^{n} \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k} \frac{-2u}{(u+\beta_m)^2}\,du =$$

$$= 2\int_\xi^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^2(u)\frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{u+\beta_m} - \frac{1}{u-\beta_m}\right)du,$$

то

$$\int_\xi^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^{*2}(u)\frac{du}{u+\beta_m^*} = \int_\xi^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^{*2}(u)\frac{du}{u-\beta_m^*}, \tag{25}$$

где

$$\varphi_n^*(u) = \prod_{k=r+1}^{n} \frac{u-\beta_k^*}{u+\beta_k^*},\ m = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n.$$

Имеет место следующее равенство:

$$\frac{\varphi_n^*(u) - \varphi_n^*(0)}{u} = \sum_{m=r+1}^{n} \frac{A_m}{u+\beta_m^*}, \tag{26}$$

где A_m, $m = r+1, r+2, \ldots, n$, – некоторые числа.

Отсюда получим, что

$$\frac{\varphi_n^*(-u) - \varphi_n^*(0)}{-u} = \sum_{m=r+1}^{n} \frac{A_m}{-u+\beta_m^*},$$

и так как

$$\varphi_n^*(-u) = \left(\varphi_n^*(u)\right)^{-1},$$

то

$$\frac{1-\varphi_n^*(u)\varphi_n^*(0)}{u\varphi_n^*(u)} = \sum_{m=r+1}^{n} \frac{A_m}{u-\beta_m^*}. \tag{27}$$

На основании равенств (26), (27) и формулы (25) заключаем, что

$$\int_\xi^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^{*2}(u)\frac{\varphi_n^*(u)-\varphi_n^*(0)}{u}du = \int_\xi^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^{*2}(u)\frac{1-\varphi_n^*(u)\varphi_n^*(0)}{u\varphi_n^*(u)}du.$$

После несложных преобразований получаем

$$\int_\xi^1 a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n^*(u)du = \int_\xi^1 a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n^{*3}(u)du.$$

Следовательно, при значениях $\beta_{r+1}^*, \beta_{r+2}^*, \ldots, \beta_n^*$ для интеграла $J_n^{(1)}$ (см. формулы (23) и (24)) справедливы соотношения

$$\left|J_n^{(1)}\right| \le \int_\xi^1 a(u)u^{\alpha-1}\left|\varphi_n^*(u)\right|^3 du \le \int_\xi^1 a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n^{*2}(u)du.$$

Заметим, что $0 \le |a(u)| \le 1$, $u \in [0, 1]$,

$$\left|J_n^{(1)}\right| \le \int_{\xi}^{1} u^{\alpha-1} \varphi_n^{*2}(u)\, du. \tag{28}$$

Теперь обратимся к одному из результатов работы [17], в соответствии с которым при любых $\gamma > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существуют числа β_k, $k = r+1, r+2, \ldots, n$, $n > r$, такие, что

$$u^{\gamma} \left| \prod_{k=1}^{n} \frac{u - \beta_{r+k}}{u + \beta_{r+k}} \right| \le C(\gamma) e^{-\pi\sqrt{n\gamma}},\ u \in [0, 1],$$

где $C(\gamma)$ – некоторая положительная постоянная, зависящая лишь от параметра γ. Тогда при таких β_k, $k = r+1, r+2, \ldots, r+n_1$, из неравенства (28) имеем

$$J_n^{(1)} \le \int_{\xi}^{1} u^{\alpha-1} \varphi_n^{*2}(u)\, du \le \int_{\xi}^{1} u^{-1+\frac{1}{\sqrt{n_1}}} \left| u^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n_1}}} \prod_{k=1}^{n_1} \frac{u - \beta_{r+k}}{u + \beta_{r+k}} \right|^2 du \le$$

$$\le C\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n_1}}\right) \exp\left(-\pi\sqrt{2n_1\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{n_1}}\right)}\right) \int_{\xi}^{1} u^{-1+\frac{1}{\sqrt{n_1}}}\, du.$$

Нетрудно заметить, что

$$\sqrt{n_1\alpha - \sqrt{n_1}} > \sqrt{n_1\alpha} - \frac{1}{\alpha},\ n_1 > \frac{1}{\alpha^2}.$$

Если проследить вывод указанного выше результата в работе [17], то можно увидеть, что постоянная $C(\gamma)$ непрерывно зависит от параметра γ, следовательно,

$$C\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n_1}}\right) \le C_1(\alpha),\ n \in \mathbb{N}.$$

Здесь и далее через $C_k(\alpha)$ будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие лишь от параметра α.

В итоге получим, что

$$J_n^{(1)} \le C_2(\alpha)\sqrt{n_1} \exp\left(-\pi\sqrt{2n_1\alpha}\right) \le C_3(\alpha)\sqrt{n} \exp\left(-\pi\sqrt{2n\alpha}\right).$$

В последнем неравенстве учтено, что $n = n_1 + r$, $r = 2\left[\frac{\alpha}{4}\right] + 4$.

Легко видеть, что и для интеграла $J_n^{(2)}$ (см. формулу (23)) справедлива такая же оценка:

$$\left|J_n^{(2)}\right| = \left| \int_{\xi}^{1} \frac{u^{\alpha-1}}{\left(1-u^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{\left(\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^r \varphi_n^*(u)\right)^3}{1 + \left(\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^r \varphi_n^*(u)\right)^2} du \right| \le C_3(\alpha)\sqrt{n} \exp\left(-\pi\sqrt{2n\alpha}\right),\ n > r.$$

Из последних двух соотношений и формулы (23) следует, что при некоторых значениях параметров a_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$,

$$|J_n(x)| \le C_4(\alpha)\sqrt{n} \exp\left(-\pi\sqrt{2n\alpha}\right),\ n > r,\ x \in [0, 1].$$

Тогда из соотношений (5) и (22) получим верхнюю оценку в теореме 3.

Нижняя оценка следует, например, из результата Г. Шталя [7].

Теорема 3 доказана.

Заключение

В работе исследованы приближения функции $|x|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, интерполяционными рациональными функциями Лагранжа с узлами Чебышева – Маркова первого рода. Получены интегральное представление остатка интерполирования и оценка сверху соответствующих равномерных рациональных приближений, которая при определенных условиях является точной. В полиномиальном случае найдена асимптотическая оценка равномерных приближений. В случае приближений рациональными функциями оценка сверху отличается от известной наилучшей оценки лишь множителем $\sqrt{n}$.

Библиографические ссылки

1. Бернштейн СН. О наилучшем приближении $|x|^{\rho}$ при помощи многочленов весьма высокой степени = Sur la meilleure approximation de $|x|^{\rho}$ par des polynômes de degrés très élevés. *Известия Академии наук СССР. Отделение математических и естественных наук.* 1938;2(2):169–190.

2. Никольский СМ. О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $|a – x|^{s}$. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая.* 1947;11(2):139–180.

3. Райцин РА. О наилучшем среднеквадратическом приближении многочленами и целыми функциями конечной степени функций, имеющих алгебраическую особую точку. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1969;4:59–61.

4. Carpenter AJ, Varga RS. Some numerical results on best uniform polynomial approximation of x^{α} on [0, 1]. In: Gonchar AA, Saff EB, editors. *Methods of approximation theory in complex analysis and mathematical physics; 1991 May 13–24; Leningrad, Russia*. Berlin: Springer-Verlag; 1993. p. 192–222 (Lecture notes in mathematics; volume 1550). DOI: 10.1007/BFb0117488.

5. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions*. Cambridge: Cambridge University Press; 1987. X, 371 p. (Encyclopedia of mathematics and its applications; volume 28).

6. Шталь Г. Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на [–1, 1]. *Математический сборник.* 1992;183(8): 85–118.

7. Stahl H. Best uniform rational approximation of x^{α} on [0, 1]. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1993;28(1):116–122. DOI: 10.1090/S0273-0979-1993-00351-3.

8. Andersson J-E. Rational approximation to functions like x^{α} in integral norms. *Analysis Mathematica*. 1988;14(1):11–25. DOI: 10.1007/BF02350637.

9. Пекарский АА. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова. *Алгебра и анализ.* 1995;7(2): 121–132.

10. Райцин РА. Асимптотические свойства равномерных приближений функций с алгебраическими особенностями частичными суммами ряда Фурье – Чебышева. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 1980;3:45–49.

11. Ganzburg MI. The Bernstein constant and polynomial interpolation at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory*. 2002;119(2):193–213. DOI: 10.1006/jath.2002.3729.

12. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to $|x|^{\alpha}$ at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory*. 2013;165:70–82. DOI: 10.1016/j.jat.2012.09.005.

13. Ровба ЕА, Медведева ВЮ. О рациональной интерполяции функции $|x|^{\alpha}$ по расширенной системе узлов Чебышева – Маркова. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2019;55(4):391–405. DOI: 0.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405.

14. Русак ВН. *Рациональные функции как аппарат приближения.* Минск: Издательство БГУ; 1979. 176 с.

15. Фихтенгольц ГМ. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2.* Санкт-Петербург: Лань; 1997. 800 с.

16. Пекарский АА, Ровба ЕА. Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций. *Математические заметки.* 1999;65(3):362–368.

17. Ковалевская ЕВ, Пекарский АА. Построение экстремальных произведений Бляшке. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2017;7(1):6–14.

References

1. Bernstein SN. Sur la meilleure approximation de $|x|^{\rho}$ par des polynômes de degrés très élevés. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.* 1938;2(2):169–190. Russian, French.

2. Nikolsky SM. On the best approximation in the mean to the function $|a – x|^{s}$ by polynomials. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Série Mathématique.* 1947;11(2):139–180. Russian.

3. Raitsin RA. [On the best approximation in the mean by polynomials and entire functions of finite degree of functions having an algebraic singularity]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 1969;4:59–61. Russian.

4. Carpenter AJ, Varga RS. Some numerical results on best uniform polynomial approximation of x^{α} on [0, 1]. In: Gonchar AA, Saff EB, editors. *Methods of approximation theory in complex analysis and mathematical physics; 1991 May 13–24; Leningrad, Russia*. Berlin: Springer-Verlag; 1993. p. 192–222 (Lecture notes in mathematics; volume 1550). DOI: 10.1007/BFb0117488.

5. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions*. Cambridge: Cambridge University Press; 1987. X, 371 p. (Encyclopedia of mathematics and its applications; volume 28).

6. Stahl H. [Best uniform rational approximation of $|x|$ on [–1, 1]]. *Matematicheskii sbornik.* 1992;183(8):85–118. Russian.

7. Stahl H. Best uniform rational approximation of x^{α} on [0, 1]. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1993;28(1):116–122. DOI: 10.1090/S0273-0979-1993-00351-3.

8. Andersson J-E. Rational approximation to functions like x^{α} in integral norms. *Analysis Mathematica*. 1988;14(1):11–25. DOI: 10.1007/BF02350637.

9. Pekarsky AA. [The best uniform rational approximations of Markov functions]. *Algebra i analiz*. 1995;7(2):121–132. Russian.

10. Raitsin RA. [Asymptotic properties of uniform approximations of functions with algebraic singularities by partial sums of the Fourier – Chebyshev series]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 1980;3:45–49. Russian.

11. Ganzburg MI. The Bernstein constant and polynomial interpolation at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory*. 2002;119(2):193–213. DOI: 10.1006/jath.2002.3729.

12. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to $|x|^{\alpha}$ at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory*. 2013;165:70–82. DOI: 10.1016/j.jat.2012.09.005.

13. Rouba YA, Medvedeva VYu. Rational interpolation of the function $|x|^{\alpha}$ by an extended system of Chebyshev – Markov nodes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2019;55(4):391–405. Russian. DOI: 0.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405.

14. Rusak VN. *Ratsional'nye funktsii kak apparat priblizheniya* [Rational functions as an approximation apparatus]. Minsk: Publishing House of the Belarusian State University; 1979. 176 p. Russian.

15. Fikhtengol'ts GM. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 2* [Course of differential and integral calculus. Volume 2]. Saint Petersburg: Lan'; 1997. 800 p. Russian.

16. Pekarsky AA, Rouba YA. [Uniform approximations of Stieltjes functions via orthoprojection onto the set of rational functions]. *Matematicheskie zametki*. 1999;65(3):362–368. Russian.

17. Kovalevskaya EV, Pekarsky AA. Construction of extreme Blaschke products. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2, Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*. 2017;7(1):6–14. Russian.

Получена 10.10.2022 / исправлена 24.01.2023 / принята 24.01.2023.
Received 10.10.2022 / revised 24.01.2023 / accepted 24.01.2023.