

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
Кафедра дискретной математики и алгоритмики

КЛИМАШЕВСКИЙ  
Ефим Сергеевич

**ЛОКАЛЬНО-ГЛОБАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЦИКЛИЧЕСКОГО  
СТРОЕНИЯ ГРАФОВ**

Магистерская диссертация

специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель:  
Орлович Юрий Леонидович  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

Допущен к защите

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

Зав. кафедрой дискретной математики и алгоритмики

\_\_\_\_\_ В.М. Котов

доктор физико-математических наук, профессор

Минск, 2023

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	6
<b>ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ</b> .....	7
1.1 Остовное дерево треугольников .....	7
1.2 Граф треугольной решётки.....	11
1.3 Распознавание дерева треугольников.....	12
1.4 Циклические свойства графа .....	12
<b>ПОИСК ОСТОВНОГО ДЕРЕВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ГРАФАХ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ</b> .....	16
2.1 Поиск остовного дерева треугольников в графе треугольной решётки .	16
2.2 Поиск остовного дерева треугольников в 3-связных планарных графах	23
<b>НАЛИЧИЕ ОСТОВНОГО ДЕРЕВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ПОЛНАЯ ЦИКЛИЧЕСКАЯ РАСШИРЯЕМОСТЬ</b> .....	26
3.1 Отношение в общем случае.....	26
3.2 Поиск среди локально связных графов .....	28
3.3 Связные локально связные графы .....	30
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	33
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	34
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А</b> .....	35

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Магистерская диссертация, 35 страниц, 29 рисунков, 1 приложение, 12 источников.

## **Локально-глобальный анализ циклического строения графов**

**Ключевые слова:** ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, NP-ПОЛНОТА, ТЕОРИЯ ГРАФОВ, ЛОКАЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ, ПОЛНАЯ ЦИКЛИЧЕСКАЯ РАСШИРЯЕМОСТЬ, ПЛАНАРНОСТЬ, ГРАФ ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЁТКИ

**Объект исследования:** циклические свойства графов.

**Цели работы:** получение новых достаточных условий гамильтоновости графа, достаточных условий наличия в графе остовного дерева треугольников, дальнейшее уточнение границы между полиномиальными и NP-полными случаями задачи о гамильтоновом цикле и задачи о существовании остовного дерева треугольников для классов графов с полиномиально проверяемыми локальными ограничениями.

**Методы исследования:** исследование имеющихся литературных источников по данному исследовательскому направлению, анализ структуры графов определённого вида, анализ некоторых существующих алгоритмов, разработка и применение алгоритмов для исследования графов.

**Результаты работы:** найден алгоритм построения остовного дерева треугольников в определённом типе графов за линейное время, усилено условие NP-полноты задачи поиска остовного дерева треугольников в графе, исследована связь между наличием остовного дерева треугольников и полной циклической расширяемостью графов.

# АГУЛЬНАЯ ХАРАКТАРЫСТЫКА ПРАЦЫ

Магістарская дысертацыя, 35 старонак, 29 малюнкаў, 1 дадатак, 12 крыніц.

## Лакальна-глабальны аналіз цыклічнай структуры графаў

**Ключавыя словы:** ГАМІЛЬТАНАЎ ЦЫКЛ, NP-ПОЎНАСЦЬ, ТЭОРЫЯ ГРАФАЎ, ЛАКАЛЬНАЯ СВЯЗНАСЦЬ, ПОЎНАЯ ЦЫКЛІЧНАЯ ПАШЫРАЛЬНАСЦЬ, ПЛАНАРНАСЦЬ, ГРАФ ТРОХВУГОЛЬНАЙ РАШОТКІ

**Аб’ект даслядавання:** цыклічныя ўласцівасці графаў.

**Мэты працы:** атрыманне новых дастатковых умоваў гамільтонанасці графу, дастатковых умоваў наяўнасці ў графе касцяковага дэрава трохвугольнікаў, далейшае ўдакланенне граніцы паміж палінаміяльнымі і NP-поўнымі выпадкамі задачы пра гамільтанаў цыкл і задачы аб існаванні касцяковага дэрава трохвугольнікаў для класаў графаў з палінаміяльна правяральнымі лакальнымі абмежаваннямі.

**Метады даследвання:** даслядаванне наяўных літаратурных крыніц па напрамку даследвання, аналіз структуры графаў пэўнага выгляду, аналіз некаторых наяўных алгарытмаў, распрацоўка і ўжыванне алгарытмаў для даследвання графаў.

**Вынікі працы:** знойдзены алгарытм будавання касцяковага дэрава трохвугольнікаў у пэўным тыпе графаў за лінейны час, узмоцнена ўмова NP-поўнасці задачы пошуку касцяковага дэрава трохвугольнікаў у графе, даследавана сувязь паміж наяўнасцю касцяковага дэрава трохвугольнікаў у графе і поўнай цыклічнай пашыральнасцю графаў.

## ABSTRACT

Master's thesis, 35 pages, 29 figures, 1 appendix, 12 sources.

### **Locally-global analysis of cyclical structure of graphs**

**Keywords:** HAMILTONIAN CYCLE, NP-COMPLETENESS, GRAPH THEORY, LOCAL CONNECTIVITY, FULL CYCLIC EXTANDABILITY, PLANARITY, TRIANGLE NETWORK GRAPH

**Object of research:** cyclical structure of graphs.

**Objective:** obtaining of new sufficient conditions on existence of Hamiltonian cycle, sufficient conditions on existence of spanning triangle tree, further clarifications on the boundary between polynomial and NP-complete cases of the problem of Hamiltonian cycle and problem of search for spanning triangle tree on classes of graphs with polynomially verifiable local limitations.

**Research methods:** studying existing literature sources in research area, analysis of the structure of graphs of particular types, analysis of particular existing algorithms, development and application of algorithms for graph analysis.

**Results:** found an algorithm for spanning triangle tree construction in graphs of particular type in linear time, strengthened condition of NP-completeness of the spanning triangle tree problem in a graph, researched the connection between existence of a spanning triangle tree and full cyclic extendibility.

## ВВЕДЕНИЕ

С развитием информационных технологий повышается необходимость в изучении различных свойств и улучшении скорости работы алгоритмов на графах.

В частности, задача поиска гамильтонова цикла остаётся острым вопросом в теории графов и несмотря на то, что в общем случае его поиск является NP-полной задачей, для отдельных классов графов исследование возможности быстрого поиска гамильтонова цикла остаётся перспективной задачей.

Кроме того, к известным и активно исследуемым вопросам в теории графов относится также и задача поиска триангуляции графа. Различные её версии для некоторых классов графов активно исследуются и применяются в многих сферах компьютерных технологий.

Известно, что для всякого связного локально связного 5-регулярного графа возможно построить гамильтонов цикл присоединением треугольников к некому его треугольнику [1]. Широко исследованы циклические свойства в локально связных графах, в частности, была доказана полная циклическая расширяемость связных локально связных  $K_{1,4}$ -свободных графов [2].

Для некоторых классов локально связных графов найдены полиномиальные алгоритмы поиска гамильтонова цикла [3], в том числе последовательным присоединением треугольников [1][4].

В рамках данной работы были исследованы сложность задачи поиска гамильтонова цикла как совокупности множества треугольников в некоторых классах графов, исследована возможность нахождения данной структуры в некоторых классах графов за полиномиальное время, проведено исследование отношения наличия данной структуры к прочим циклическим свойствам графов.

В первой главе вводятся определения, которые будут использоваться в дальнейших главах, а также рассматриваются некоторые уже существующие результаты, которые будут использоваться далее.

Во второй главе описывается линейный алгоритм поиска остовного дерева треугольников в графе треугольной решётки и более сильное условие для NP-полноты задачи его поиска.

В третьей главе описывается исследование связи между наличием остовного дерева треугольников и свойством полной циклической расширяемости.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

### 1.1 Остовное дерево треугольников

Граф называется *локально связным*, если для каждой вершины  $v \in V(G)$  граф, порождённый  $N(v)$ , является связным. [5]

**Лемма 1.** Если у локально связного графа не менее 3 вершин, то каждое его ребро содержится в каком-нибудь треугольнике. (см. Лемму 1 в [1]).

**Присоединением треугольника**  $(a, b, c, a)$  к простому циклу  $C$  ( $(a, c) \in E(C)$ ,  $b \notin V(C)$ ) назовём операцию удаления из  $C$  ребра  $(a, c)$  и добавлением туда вершины  $b$  и рёбер  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ .

Нетрудно заметить, что после присоединения треугольника простой цикл  $C$  останется простым циклом, т.к. степени всех его вершин останутся равны 2, он останется связным и в нём не появится двойных рёбер.

**Деревом треугольников** назовём такое множество треугольников в графе  $G$ , что к какому-либо из них возможно последовательно присоединить все остальные.

Дерево треугольников назовём *остовным*, если каждая вершина графа  $G$  входит хотя бы в один из треугольников в данном дереве.

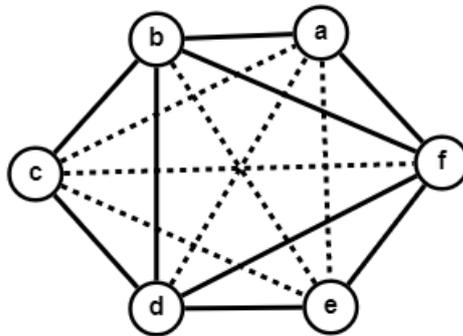


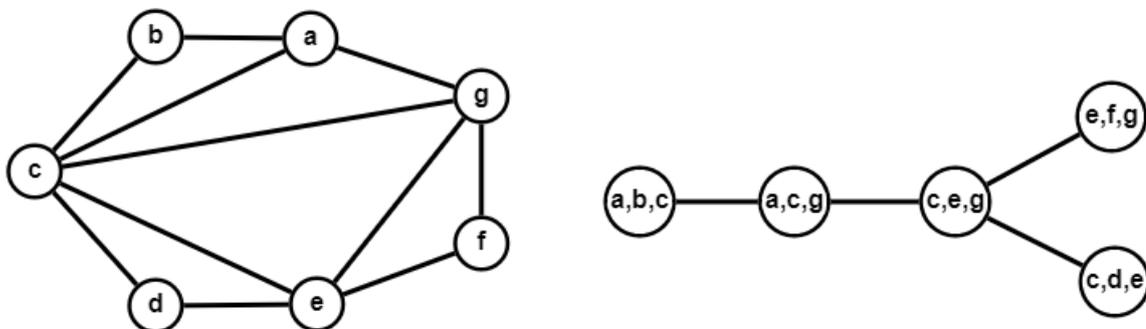
Рисунок 1.1 – Пример остовного дерева треугольников на графе  $K_6$  (пунктирные линии – не входящие в треугольники рёбра)

**Множеством вершин**  $V(T)$  дерева треугольников  $T$  в графе  $G$  назовём множество вершин из  $G$ , которые входят хотя бы в один треугольник из  $T$ .

Заметим, что если в дереве треугольников  $T$  содержится  $k$  треугольников, то  $|V(T)| = k + 2$ : при последовательном присоединении треугольников из этого дерева треугольников к некоторому из них, первый треугольник содержит 3 вершины, и каждый присоединённый добавляет одну новую.

**Множеством рёбер**  $E(T)$  дерева треугольников  $T$  в графе  $G$  назовём множество рёбер из  $G$ , которые входят хотя бы в один треугольник из  $T$ .

**Свойство 1.** Если для дерева треугольников  $T$  построить такой граф  $G_T$ , что каждому треугольнику в данном множестве взаимно однозначно соответствует вершина в  $G_T$ , и в  $G_T$  между соответствующими двум различным треугольникам вершинами есть ребро тогда и только тогда, когда эти треугольники имеют общее ребро, то граф  $G_T$  будет представлять собой дерево.



**Рисунок 1.2 – Пример остовного дерева треугольников  $T$  на некотором графе  $G$  (слева) и соответствующего графа  $G_T$  (справа)**

► Индуктивно докажем, что если множество треугольников  $T$  представляет собой дерево треугольников, то рёбра, входящие в него один раз, образуют собой полученный присоединением треугольников к некоему треугольнику из  $T$  цикл  $C$ , все остальные рёбра входят в него ровно два раза, и соответствующий ему построенный по вышеуказанному правилу граф  $G_T$  образует собой дерево.

Заметим, что, если в  $T$  входит только один треугольник, то все вышеуказанные свойства выполняются: каждое из рёбер в  $T$  входит только в один треугольник, они все образуют собой цикл  $C$  и  $G_T$  представляет собой одинокую вершину.

Пусть для  $k \geq 1$  для любого дерева треугольников  $T$  с не более  $k$  треугольниками выполняются вышеуказанные свойства. Покажем, что тогда они будут выполняться и для произвольного  $T^*$  с  $k + 1$  треугольником.

Так как в  $T^*$  содержится больше одного треугольника и к какому-то из треугольников в нём возможно последовательно присоединить все остальные, то множество треугольников  $T$  без последнего присоединённого треугольника также будет деревом треугольников, и будет содержать ровно  $k$  треугольников.

Обозначим последний присоединённый треугольник как  $(a, b, c, a)$ , где  $c$  не входит во множество вершин треугольников из  $T$ . Тогда  $(a, c)$  и  $(b, c)$  не могут принадлежать ни одному треугольнику из  $T$ , а  $(a, b)$  принадлежит ровно одному.

В таком случае, после присоединения  $(a, b, c, a)$  к  $T$ , ребро  $(a, b)$  будет принадлежать ровно двум треугольникам в  $T^*$ , но не будет входить в полученный присоединением треугольников цикл  $C_{T^*}$ , а  $(a, c)$  и  $(c, b)$  будут входить в  $C_{T^*}$  и будут входить ровно в один треугольник из  $T^*$ . Для всех остальных рёбер их

принадлежность  $S_T^*$  останется такой же, как и их принадлежность циклу, полученному присоединением треугольников из  $T$ , и число того, в каком числе треугольников они встречаются, не изменится.

Что же касается построенных по вышеуказанному правилу графов  $G_T$  и  $G_{T^*}$ , то, так как в  $T^*$  к  $T$  прибавляется один треугольник, смежный по ребру с одним из треугольников в  $T$ , то  $G_{T^*}$  получается из  $G_T$  добавлением новой вершины и соединением её ребром с одной из уже существующих, что сохраняет свойство того, что  $G_{T^*}$  будет являться деревом (граф останется связным и сохранится  $E(G_{T^*}) = V(G_{T^*}) - 1$ ). ◀

Таким образом, из данного доказательства мы получаем также следующие свойства:

**Свойство 2.** Никакое ребро в дереве треугольников не может входить в более, чем 2 различных треугольника.

**Свойство 3.** В цикл, полученный присоединением треугольников из дерева треугольников  $T$  к некоторому треугольнику из данного множества входят те и только те рёбра, которые встречаются ровно в одном треугольнике из  $T$ .

Докажем также свойство, обратное свойству 1.

**Свойство 4.** Если для множества треугольников  $T$  из графа  $G$  при построении такого графа  $G_T$ , что каждому треугольнику в данном множестве взаимно однозначно соответствует вершина в  $G_T$ , а если два треугольника имеют общее ребро, то в  $G_T$  между соответствующими им вершинами есть ребро, полученный граф  $G_T$  будет представлять собой дерево, а также множество рёбер, входящих ровно в один из треугольников из  $T$ , образует простой цикл  $S_T$ , то  $T$  представляет собой дерево треугольников.

► Заметим, что никакое ребро не может входить в более, чем 2 различных треугольника из  $T$ , т.к. иначе в  $G_T$  имелся бы цикл.

Докажем выполнение данного свойства индуктивно.

Если  $|T| = 1$ , то  $T$  очевидным образом представляет собой дерево треугольников.

Пусть  $|T| = k > 1$ , и данное свойство выполняется для  $\forall |T| < k$ . Рассмотрим множество  $T^*$ , полученное из  $T$  удалением треугольника  $(a, b, c, a)$ , соответствующего листу графа  $G_T$  (не ограничивая общности обозначим ребро, которое он имеет общим с некоторым треугольником из  $T^*$ , как  $(a, b)$ ). Граф  $G_{T^*}$  будет представлять собой дерево, т.к. он получен из  $G_T$  удалением листа.

Т.к. ребро  $(a, b)$  было общим для  $(a, b, c, a)$  и какого-то треугольника из  $T^*$ , то оно не могло входить в  $S_T$ . Следовательно,  $S_{T^*} = S_T \setminus \{(a, c), (b, c)\} \cup \{(a, b)\}$  также представляет собой простой цикл, и не содержит вершину  $c$ .

Тогда  $T^*$  представляет собой дерево треугольников. Так как в  $S_{T^*}$  не входит вершина  $c$ , но входит ребро  $(a, b)$ , то к  $S_{T^*}$  возможно присоединить треугольник  $(a, b, c, a)$ , из чего следует, что  $T$  также является деревом треугольников. ◀

**Свойство 5.** Для любого дерева треугольников возможно получить цикл, полученный их последовательным присоединением, начиная с любого из входящих в него треугольников.

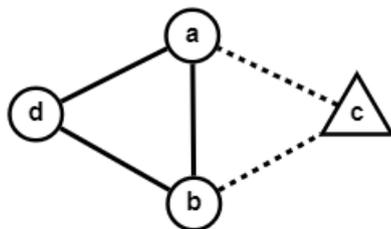
► Используем метод математической индукции.

Если дерево треугольников  $T$  содержит только один треугольник, то цикл, полученный последовательным присоединением всех остальных треугольников к нему, получается, начиная с него, так как к нему не нужно ничего присоединять.

Пусть для любого дерева треугольников  $T^*$  с не более, чем  $k \geq 1$  треугольников, цикл, полученный их последовательным присоединением, возможно получить, начиная с любого из них. Тогда рассмотрим произвольное дерево треугольников  $T$  с  $k + 1$  треугольником.

В  $T$  существует некоторая последовательность присоединения всех треугольников, начиная с одного из них, обозначим последний присоединённый треугольник как  $(a, b, c, a)$ , где  $c$  – вершина, которая не содержалась в цикле до его присоединения. Тогда  $T^* = T \setminus \{(a, b, c, a)\}$  также является деревом треугольников, так как их возможно присоединить к некоторому из них в том же порядке, что и треугольники из  $T$ .

Так как  $c$  не содержится ни в одном треугольнике из  $T^*$ , и каждое ребро, кроме тех, которые входят в полученный присоединением треугольников цикл, входит в ровно два треугольника из дерева треугольников, ребро  $(a, b)$  входит в ровно один треугольник из  $T^*$ . Обозначим его  $(a, b, d, a)$ .



**Рисунок 1.3 – Не входящие в  $T^*$  рёбра обозначены пунктирными линиями, а вершины треугольниками**

Так как в  $T^*$  содержится  $k$  треугольников, то их возможно присоединить, начиная с  $(a, b, d, a)$ .

Заметим, что если некоторый треугольник, не содержащий ребро  $(a, b)$  и вершину  $c$ , возможно присоединить к циклу  $C^*$ , содержащему ребро  $(a, b)$ , то данный треугольник возможно присоединить и к циклу  $C$ , отличающемуся от  $C^*$  наличием вершины  $c$  и рёбер  $(a, c)$ ,  $(b, c)$  вместо ребра  $(a, b)$ , и результат будет отличаться так же, как  $C$  отличалось от  $C^*$ .

Так как  $(a, b)$  принадлежит ровно двум треугольникам из  $T$ , то в  $T^*$  оно входит только в  $(a, b, d, a)$ . Кроме того, вершина  $c$  не содержится ни в одном треугольнике из  $T^*$ .

Таким образом, к циклу, полученному присоединением  $(a, b, d, a)$  к  $(a, b, c, a)$ , возможно присоединить остальные треугольники из  $T^*$  в том же порядке, что и в последовательном присоединении треугольников из  $T^*$ , начиная с  $(a, b, d, a)$ .

Следовательно, для произвольного дерева треугольников с  $k + 1$  вершинами возможно последовательно присоединить все остальные, начиная с любого треугольника.

Индукция доказана. ◀ [4]

**Свойство 6.** В остовном дереве треугольников каждой вершине инцидентны ровно 2 ребра, которые входят ровно в 1 треугольник.

► Тривиально следует из свойства 4. ◀

## 1.2 Граф треугольной решётки

Под *решёткой* обычно понимается плоский геометрический граф, соответствующий регулярному замощению плоскости конгруэнтными правильными многоугольниками [6].

*Графом решётки* называется конечный порождённый подграф решётки.

Обозначим через  $T^\infty$  бесконечный плоский граф, соответствующий регулярному замощению плоскости  $\mathbb{R}^2$  конгруэнтными правильными треугольниками. Вершинами графа  $T^\infty$  являются точки плоскости с декартовыми координатами  $(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ , где  $x$  и  $y$  – произвольные числа из  $\mathbb{Z}$ . Две вершины в  $T^\infty$  смежны тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 1.

Каждая вершина в  $T^\infty$  имеет ровно 6 смежных ей вершин. Обозначим их в соответствии с рис. 1.4.

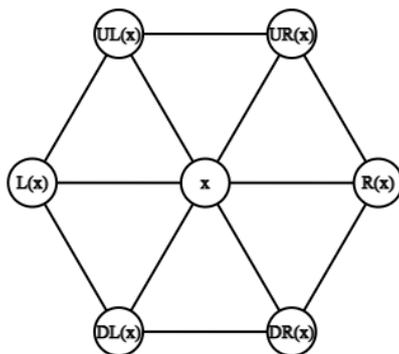


Рисунок 1.4 – Окружающие  $x$  вершины, по часовой стрелке:  $UR(x), R(x), DR(x), DL(x), L(x), UL(x)$

Произвольный конечный порождённый подграф графа  $T^\infty$  называется *графом треугольной решётки*.

### 1.3 Распознавание дерева треугольников

**Теорема 1.** Задача распознавания наличия остовного дерева треугольников в графе является NP-полной. [4]

Доказательство данного свойства производилось сведением задачи поиска гамильтоновой цепи в произвольном графе  $G$  к поиску остовного дерева треугольников в некотором графе  $H$ , построенному по  $G$ . Производится доказательство того, что по остовному дереву треугольников в графе  $H$  возможно построить гамильтонову цепь в графе  $G$ , и наоборот.

Данное утверждение относит задачу поиска остовного дерева треугольников в графе к широкому классу NP-полных задач, представляющих интерес для теории сложности.

В рамках данной работы были проведены дополнительные исследования в данной области, и глава 2.2 содержит доказательство усиленной формы этого утверждения. Кроме того, построение дающее данный результат и доказательство являются более простыми чем те, что использовались для данной теоремы.

### 1.4 Циклические свойства графа

*Гамильтоновым путём* называется простой путь, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. [7]

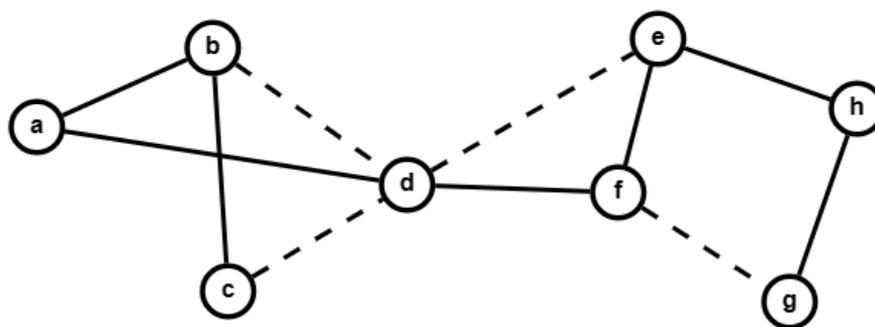


Рисунок 1.5 – Пример полугамильтонова, но не гамильтонова графа (имеется точка сочленения)

Граф называется *полугамильтоновым*, если он содержит гамильтонов путь. [7]

**Гамильтоновым циклом** называется простой цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. [7]

Граф называется **гамильтоновым**, если он содержит гамильтонов цикл. [7]

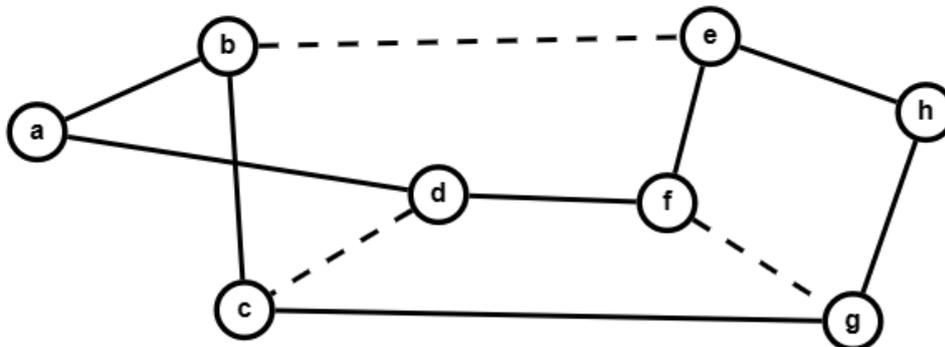


Рисунок 1.6 – Пример гамильтонова, но не панциклического графа (он не содержит треугольников)

Граф называется **панциклическим**, если он содержит циклы всех возможных длин от 3 до число вершин графа. [8]

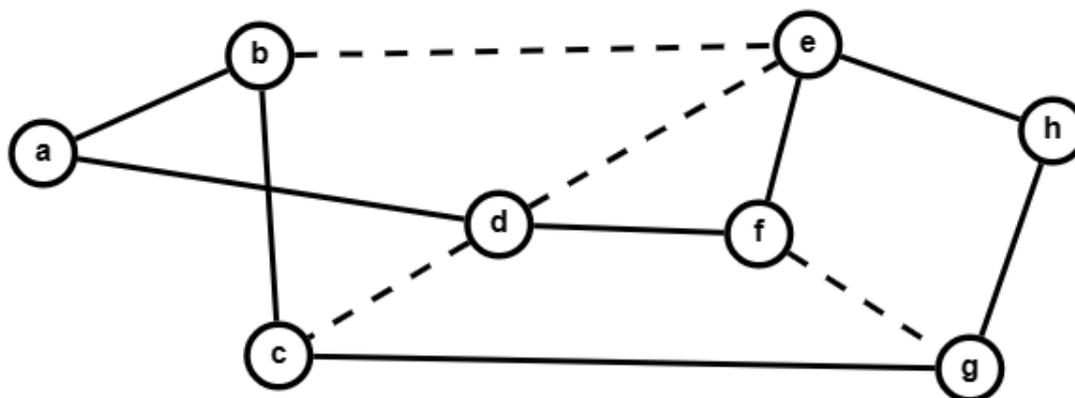


Рисунок 1.7 – Пример панциклического  $((d, f, e, d), (e, f, g, h, e), (d, f, g, h, e, d), (d, f, e, h, g, c, d), (a, d, f, g, h, e, b, a))$ , но не вершинно панциклического графа (не все вершины входят в треугольники)

Граф  $G$  называется **вершинно панциклическим**, если  $\forall v \in V(G)$  и  $\forall k \in [3, |V(G)|]$  он содержит простой цикл длины  $k$ , проходящий через вершину  $v$ . [9]

В графе  $G$  простой цикл  $C$  называется **расширяемым**, если в  $G$  существует простой цикл  $C'$ , для которого  $V(C) \subset V(C')$ , и  $|V(C')| = |V(C)| + 1$ . Связный граф, в котором каждая вершина лежит в треугольнике, и каждый простой негамильтонов цикл расширяемый, называется **вполне циклически расширяемым**. [2]

Нетрудно заметить следующие отношения между данными свойствами:

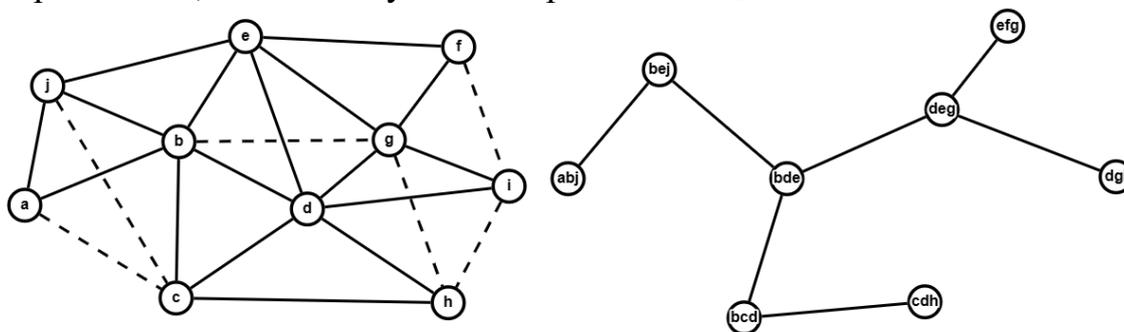
- Любой гамильтонов граф является полугамильтоновым.

- Любой панциклический граф является гамильтоновым.
- Любой вершинно панциклический граф является панциклическим.
- Любой вполне циклически расширяемый граф является вершинно панциклическим.

**Свойство 7.** Если граф  $G$  содержит остовное дерево треугольников, то он является вершинно панциклическим.

► Рассмотрим соответствующий остовному дереву в  $G$  граф дерева  $G_T$ . Обозначим  $n = |V(G)|$ . Каждая вершина  $G_T$  соответствует некоторому треугольнику в графе  $G$ .

Кроме того, заметим, что множество рёбер, входящих ровно в один треугольник из тех что соответствуют вершинам из  $G_T$ , образует гамильтонов цикл. Из этого следует, что для каждой вершины  $v$  в  $G$ , существует некоторый треугольник содержащий  $v$ , соответствующий вершине из  $G_T$ .



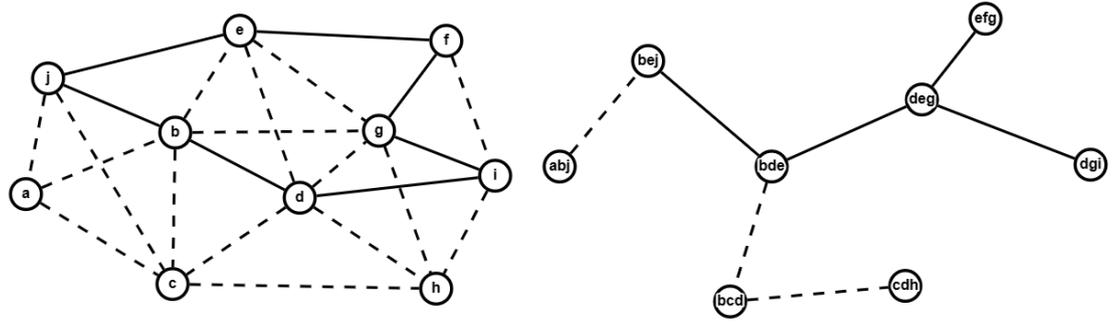
**Рисунок 1.8 – Пример графа  $G$ , остовного дерева треугольников на нём и графа  $G_T$**

Далее заметим, что любой связный подграф  $G_T$  на  $k$  вершинах соответствует некоторому дереву треугольников в  $G$ , которое возможно получить присоединением треугольников в соответствии с рёбрами  $G_T$ . Множество рёбер, входящих ровно в один из треугольников, образует некоторый простой цикл длины  $k + 2$ , проходящий через все вершины в этих треугольниках.

Поскольку граф  $G_T$  является деревом на  $n - 2$  вершинах, то для любой вершины  $v_T \in V(G_T)$  и  $\forall k \in [1, n - 2]$  в  $G_T$  содержится связный подграф, содержащий  $v_T$  и имеющий  $k$  вершин.

Следовательно, для каждой вершины  $v \in V(G)$  возможно рассмотреть любой треугольник в остовном дереве треугольников содержащий  $v$ , и соответствующую ему  $v_T \in V(G_T)$ . Затем, постепенно присоединяя вершины в  $G_T$ , возможно получать деревья на любом числе вершин  $k$  от 1 до  $n - 2$ . Каждое из них соответствует простому циклу в  $G$  на  $k + 2$  вершинах, содержащих вершину  $v$ .

Таким образом, для каждой вершины в  $G$  возможно выбрать некоторый треугольник содержащий её, и, последовательно присоединяя треугольники, получить гамильтонов цикл.



**Рисунок 1.9 – Пример связного подграфа в  $G$  и соответствующего ему цикла в  $G$**

Следовательно, любой содержащий остовное дерево треугольников граф  $G$  является вершинно панцикличным. ◀

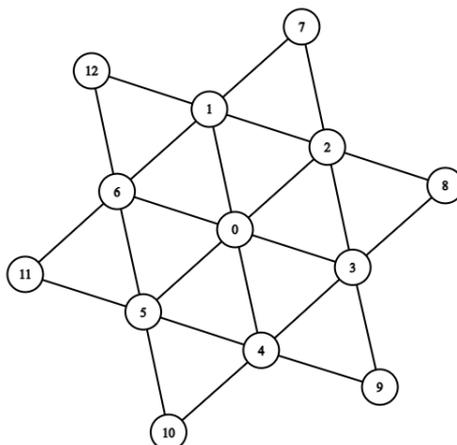
## ГЛАВА 2

# ПОИСК ОСТОВНОГО ДЕРЕВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ГРАФАХ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ

### 2.1 Поиск остовного дерева треугольников в графе треугольной решётки

Для графа треугольной решётки задача распознавания гамильтоновости в общем случае является NP-полной. Однако для связного локально связного графа треугольной решётки существует линейный алгоритм нахождения гамильтонова цикла [3].

Единственными связными локально связными графами треугольной решётки, не содержащими гамильтонов цикл, являются изоморфные следующему графу  $D$ :



**Рисунок 2.1 – Граф  $D$ , не содержащий гамильтонов цикл**

Данный граф не содержит гамильтонов цикл по той причине, что имеет независимое множество из 7 вершин (все вершины степени 2 и центральная вершина), при том что  $|V(D)| = 13$ .

Так как граф треугольной решётки является плоским, то для произвольного цикла  $C$  будем обозначать  $Int_G(C)$  подмножество всех вершин  $G$ , лежащих строго внутри той части плоскости, что ограничена  $C$ .

Покажем, что, используя вышеуказанный алгоритм, с помощью полученного гамильтонова цикла возможно построить остовное дерево треугольников.

**Лемма 2.** Для любого связного локально связного графа треугольной решётки  $G$  не изоморфного графу  $D$ , гамильтонов цикл  $C$ , получаемый в результате линейного алгоритма поиска [3], имеет  $Int_{T^\infty}(C) = \emptyset$ .

► Изучим данный алгоритм.

Сначала рассматривается граница  $\delta G = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ , где  $C_0$  – внешняя граница треугольной решётки, а  $C_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) – внешние границы.

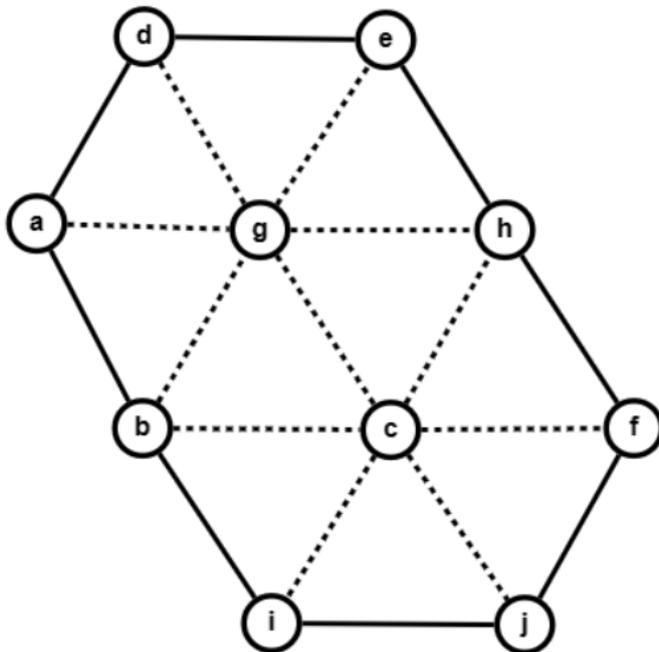


Рисунок 2.2 – Пример  $Int_{T^\infty}(C)$ . Цикл  $C$  представляет собой  $(d, e, h, f, j, i, d, a, d)$ . Вершины  $c, g$  в него не входят, но находятся внутри ограниченной им области, поэтому  $Int_{T^\infty}(C) = \{c, g\}$

Далее рассматривается цикл  $C_0$ , и к нему итеративно добавляются новые вершины следующим образом:

Рассматривается некоторая вершина  $v \in V(G) \setminus V(C)$ , такая что  $UL(v), L(v), DL(v)$  лежат на цикле  $C$  (такая вершина существует, если  $C$  не является гамильтоновым). Обозначим  $UL(v) = d, L(v) = a, UL(d) = b, UR(d) = c, L(v) = e$ . Далее возможны 2 случая:

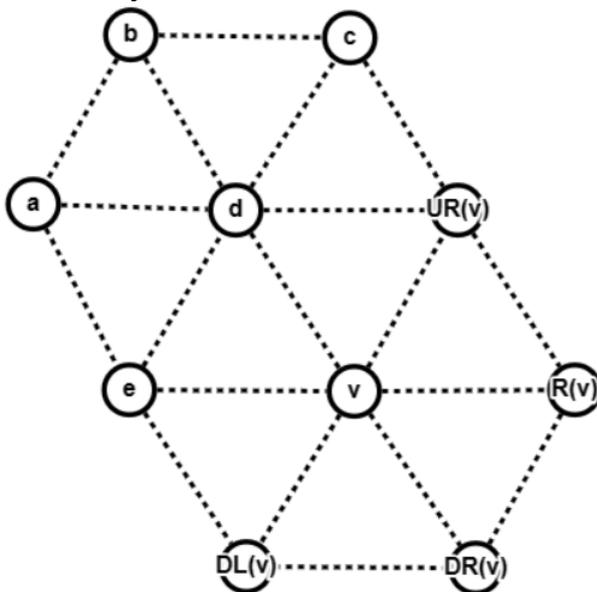


Рисунок 2.3 – Вершина  $v$  и другие вершины рядом с ней. Вершины  $d, e, DL(v)$  гарантированно лежат на цикле  $C$

1.  $\exists i$ , такое что  $v \in C_i$ . В этом случае  $UR(v), R(v), DR(v) \in C_i$ . Если  $(d, e) \subset C$ , то возможно удалить из  $C$  данное ребро и добавить  $(e, v)$ ,  $(e, UR(v))$  и остальную часть  $C_i$ .

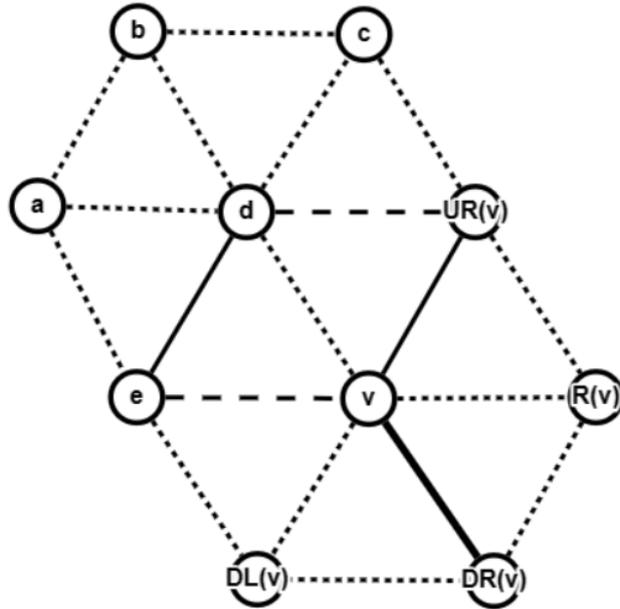


Рисунок 2.4 – Рёбра  $(a, d)$ ,  $(v, UR(v))$  удаляются, вместо них добавляются  $(e, v)$  и  $(d, UR(v))$

Иначе, в силу симметрии возможно считать что  $(a, e) \subset C$ . Если  $(d, c) \subset C$ , то цикл возможно расширить аналогично. В противном случае,  $(e, a, d, b) \subset C$ . Тогда возможно удалить из  $C$  эти 3 ребра и добавить  $(b, a, d, UR(v))$ ,  $(e, v)$  и остальной цикл  $C_i$ .

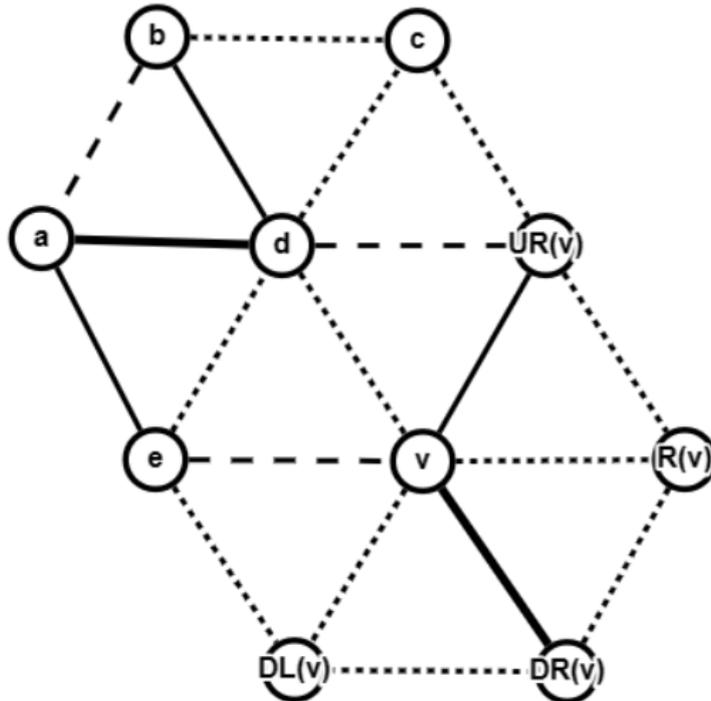


Рисунок 2.5 – Рёбра  $(a, e)$ ,  $(b, d)$ ,  $(v, UR(v))$  удаляются, рёбра  $(a, b)$ ,  $(d, UR(v))$ ,  $(e, v)$  добавляются

2.  $\nexists i$ , такое что  $v \in C_i$ . Если  $(d, e) \in C$  или  $(d, UR(v)) \in C$ , то добавить  $v$  в  $C$  тривиально. Тогда есть 3 варианта того, как через  $d$  проходит  $C$ : это  $(c, d, b)$ ,  $(b, d, a)$  или  $(c, d, a)$ .

Если это  $(c, d, b)$ , то возможно удалить из  $C$   $(c, d, b)$ ,  $(a, e)$  и добавить  $(c, b)$ ,  $(a, d, v, e)$ .

Если это  $(b, d, a)$ , то возможно удалить из  $C$   $(b, d, a, e)$  и добавить  $(b, a, d, v, e)$ .

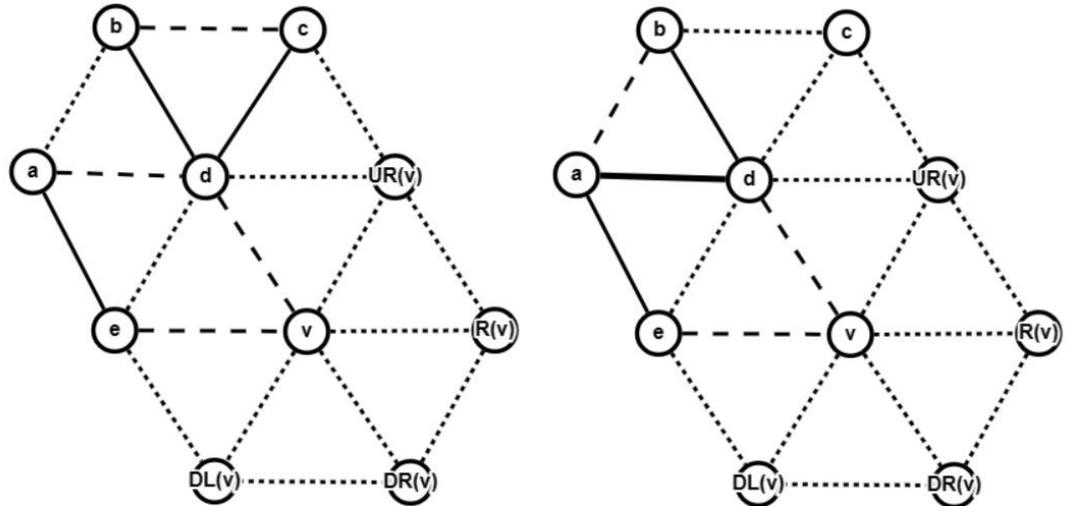


Рисунок 2.6 – Случаи  $(c, d, b)$  (слева) и  $(b, d, a)$  (справа). В случае  $(c, d, b)$  удаляются рёбра  $(c, d)$ ,  $(d, b)$ ,  $(a, e)$  и добавляются  $(b, c)$ ,  $(a, d)$ ,  $(d, v)$ ,  $(v, e)$ . В случае  $(b, d, a)$  удаляются рёбра  $(b, d)$ ,  $(a, e)$  и добавляются рёбра  $(b, a)$ ,  $(d, v)$ ,  $(e, v)$

Если же это  $(c, d, a)$ , то поворачиваем граф относительно  $v$  (так, что  $UL(v)$  переходит в  $L(v)$ ). Если новая  $UL(v) \notin C$ , то тривиально добавить её (через  $(c, d)$ ). Иначе повторяем этот процесс. Если после полного поворота  $v$  окружает полный цикл, то изначальным графом является  $D$ .

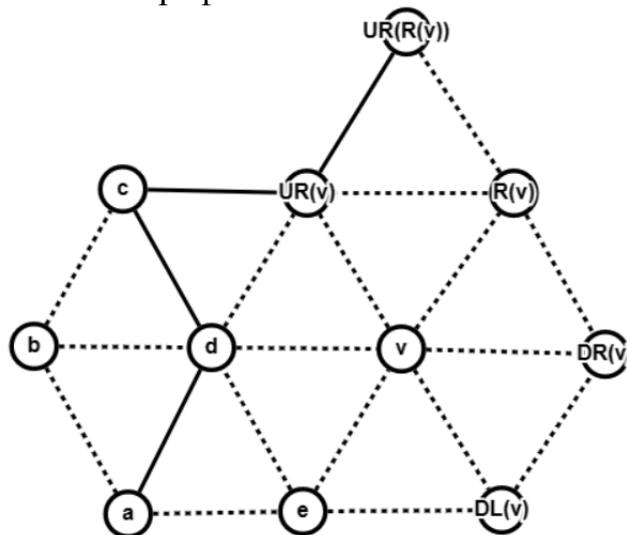
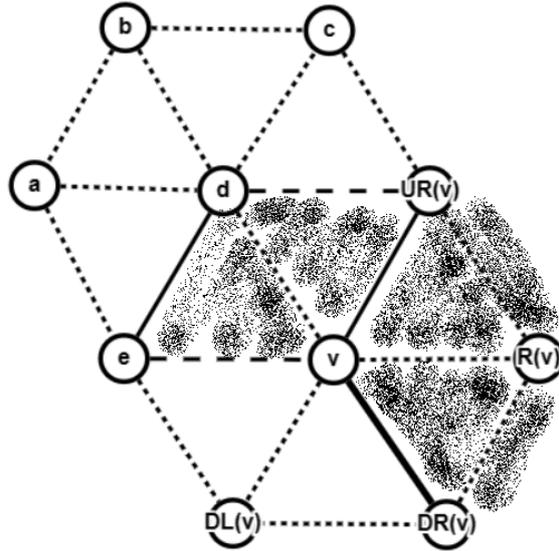


Рисунок 2.7 – Граф  $G$  после поворота относительно  $v$ . Заметим, что добавить  $v$  в цикл  $C$  невозможно только если цепь  $(c, UR(v), UR(R(v)))$  входит в  $C$ . Если добавить  $v$  в цикл после 5 поворотов невозможно, значит  $C$  является внешней границей графа решётки  $D$

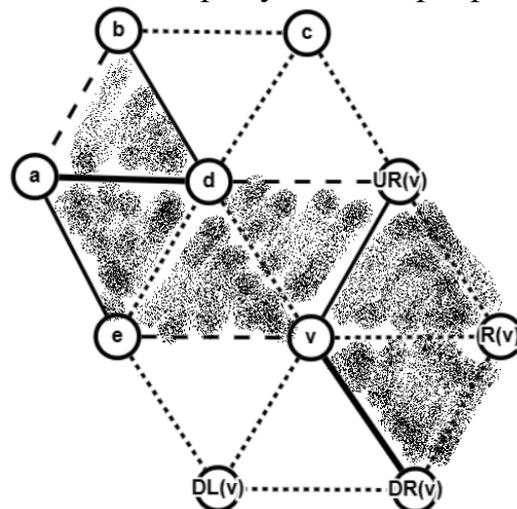
Заметим, что  $Int_{T^\infty}(C_0) = (V(G) \setminus V(C_0)) \cup \cup_i Int_{T^\infty}(C_i)$ . Покажем, что из данного множества  $Int_{T^\infty}(C_i)$  удаляется тогда и только тогда, когда к  $C$  присоединяется соответствующий цикл.

1. Пусть цикл  $C_i \in Int_{T^\infty}(C)$ . Если удаляется одно ребро  $(d, e)$  и добавляется  $(e, v, \dots UR(v), d)$ , то заметим, что после данной операции  $Int_{T^\infty}(C_i) \notin Int_{T^\infty}(C)$ . Для остальных же вершин кроме данного множества и  $C_i$  принадлежность не меняется. Аналогично при удалении  $(d, c)$ .



**Рисунок 2.8** – Рёбра  $(a, d)$ ,  $(v, UR(v))$  удаляются, вместо них добавляются  $(e, v)$  и  $(d, UR(v))$ . Выделена часть плоскости, для которой меняется принадлежность внутренней части  $C$

Если же из  $C$  удаляется  $(e, a, d, b)$  и добавляется  $(b, a, d, UR(v))$ ,  $(e, v)$ , то это идентично тому, что  $(e, a, d, b)$  заменяется на  $(e, d, a, b)$  (что меняет принадлежность внутренней части цикла только для треугольников  $(b, d, a, b)$  и  $(d, a, e, d)$ ), и затем проводится присоединение через удаление ребра  $(d, e)$ .



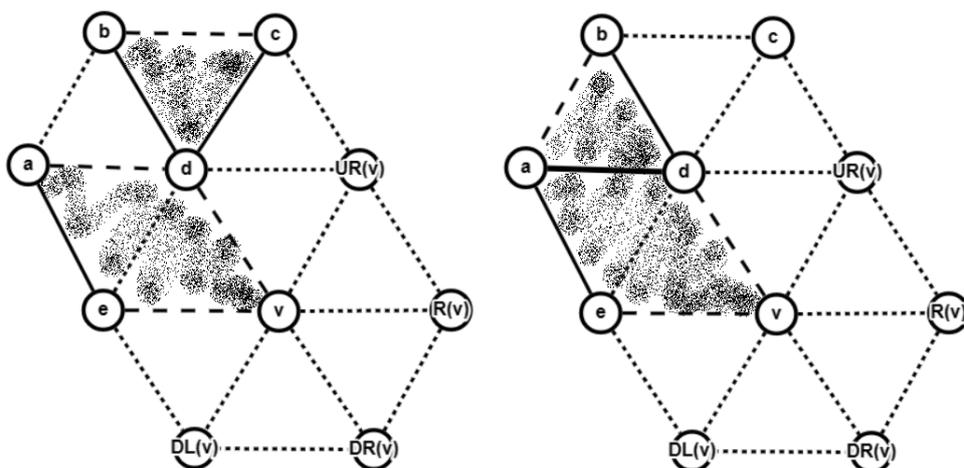
**Рисунок 2.9** – Рёбра  $(a, e)$ ,  $(b, d)$ ,  $(v, UR(v))$  удаляются, рёбра  $(a, b)$ ,  $(d, UR(v))$ ,  $(e, v)$  добавляются. Выделена часть плоскости, для которой меняется принадлежность внутренней части  $C$

2. Если  $(d, e)$  заменяется на  $(d, v, e)$ , то принадлежность к внутренней части  $C$  меняется только у треугольника  $(d, v, e, d)$ . Аналогично со всеми другими операциями, удаляющими одно ребро чтобы добавить 2.

Если  $(c, d, b), (a, e)$  заменяется на  $(c, b), (a, d, v, e)$ , то это аналогично тому, что  $(b, d, c), (a, e)$  заменяется на  $(b, d), (a, d, e)$  и производится присоединение через одно ребро  $(d, e)$ .

Если  $(b, d, a, e)$  заменяется на  $(b, a, d, v, e)$ , то это аналогично тому, что  $(b, d, a, e)$  заменяется на  $(b, a, d, e)$  и производится присоединение через одно ребро  $(d, e)$ .

Все операции при поворотах относительно  $v$  также сводятся к этим трём случаям.



**Рисунок 2.10** – Случаи  $(c, d, b)$  (слева) и  $(b, d, a)$  (справа). В случае  $(c, d, b)$  удаляются рёбра  $(c, d), (d, b), (a, e)$  и добавляются  $(b, c), (a, d), (d, v), (v, e)$ . В случае  $(b, d, a)$  удаляются рёбра  $(b, d), (a, e)$  и добавляются рёбра  $(b, a), (d, v), (e, v)$ . Выделена часть плоскости, для которой меняется принадлежность внутренней части  $C$

Таким образом, после построения гамильтонова цикла  $C, \forall i: Int_{T^\infty}(C) \cap Int_{T^\infty}(C_i) = \emptyset$ . Кроме того, так как этот цикл является гамильтоновым, ни одна вершина из  $V(G)$  также не входит в  $Int_{T^\infty}(C)$ . Следовательно,  $Int_{T^\infty}(C) = \emptyset$ . ◀

**Лемма 3.** Если в графе треугольной решётки цикл  $C$  содержит  $n > 3$  вершин и  $Int_{T^\infty}(C) = \emptyset$ , то  $\exists C_1, C_2$  – такие циклы, что они обладают ровно одним общим ребром, и  $C$  возможно получить их объединением при удалении данного ребра.

► Рассмотрим все вершины, входящие в  $C$ . Для каждой из них, ровно два инцидентных ей ребра графа  $T^\infty$  входят в  $C$ . Рассмотрим произвольную вершину  $v \in V(C)$ , и обозначим смежные ей вершины как  $a, b$ .

Если угол, образованный цепью  $(a, v, b)$ , равен  $60^\circ$ , то  $a$  и  $b$  смежны и возможно разделить  $C$  на  $C_1$  и  $C_2$  по ребру  $(a, b)$ . (см. рисунок 2.11)

Если же угол, образованный цепью  $(a, v, b)$ , равен  $120^\circ$  или  $180^\circ$ , то существует вершина  $d$ , такая что  $(a, d), (v, d) \in E(T^\infty)$  и  $d \in V(C)$ . (см. рисунок 2.12). Если такой вершины нет, то одна из смежных  $a$  и  $v$  вершин входила бы в  $Int_{T^\infty}(C)$ . Тогда  $C$  возможно разделить на  $C_1, C_2$  по ребру  $(v, d)$ . ◀

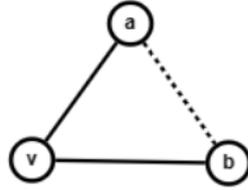


Рисунок 2.11 – Если  $(a, v, b)$  образует угол  $60^\circ$ , и цикл не является треугольником, возможно отделить от него треугольник ребром  $(a, b)$

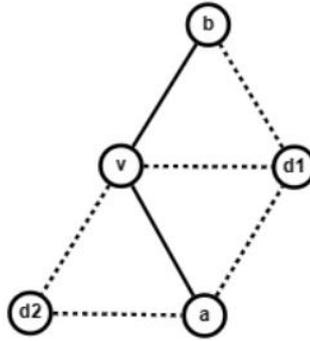


Рисунок 2.12 – Если  $(a, v, b)$  образует угол  $120^\circ$  или  $180^\circ$ , то один из треугольников  $(a, v, d_1, a)$ ,  $(a, v, d_2, a)$  находится внутри  $C$ . Тогда, если соответствующая вершина из  $d_1, d_2$  не входит в  $C$ , она входила бы в  $Int_{T^\infty}(C)$

**Теорема 2.** В любом связном локально связном графе треугольной решётки  $G$ , не изоморфном графу  $D$ , существует остовное дерево треугольников.

► Согласно лемме 2, в данном графе существует гамильтонов цикл  $C$ , для которого  $Int_{T^\infty}(C) = \emptyset$ . Также заметим, что циклы  $C_1, C_2$  получаемые вследствие леммы 3, также имеют  $Int_{T^\infty}(C_1) = Int_{T^\infty}(C_2) = \emptyset$ .

Таким образом, в данном графе  $G$  существует некоторый гамильтонов цикл  $C$  такой, что его возможно представить в виде некоторого множества треугольников, объединяемых по общим рёбрам.

Следовательно,  $G$  содержит остовное дерево треугольников. ◀

**Утверждение 1.** В связном локально связном графе треугольной решётки возможно найти остовное дерево треугольников за линейное время.

► Лемма 2 показывает, что алгоритм поиска остовного дерева треугольников за линейное время строит гамильтонов цикл с  $Int_{T^\infty}(C) = \emptyset$ .

Затем Лемма 3 показывает, что по этому циклу возможно построить остовное дерево треугольников. Интерес представляет асимптотическая сложность данного построения.

Опишем, как именно возможно рекурсивно разделить полученный гамильтонов цикл на треугольники за линейное время:

Заметим, что любое ребро графа  $T^\infty$  входит ровно в два треугольника. Кроме того, если оно принадлежит некоторому циклу  $C$  на  $T^\infty$ , то ровно один из них лежит внутри части плоскости, ограниченной данным циклом.

Из вершины  $v$  доступ к любой смежной с ней вершине возможно обеспечить за константное время, так как степени всех вершин ограничены числом 6.

Для некоторого ребра возможно запомнить, какой из содержащих его треугольников лежит внутри части плоскости, ограниченной гамильтоновым циклом. Это возможно сделать, например, выбрав произвольную из тех вершин графа, соответствующая которой точка на плоскости имеет минимальную координату  $x$ . Хотя бы одно из инцидентных ей рёбер в цикле  $C$  будет являться  $(v, UR(v))$  или  $(v, DR(v))$ , и лежащий внутри  $C$  треугольник с данным ребром очевиден.

Далее пусть имеется некоторый цикл с  $Int_{T^\infty}(C) = \emptyset$ , в котором для некоторого ребра  $(u, v)$  известно, какой из треугольников с ним лежит внутри части плоскости, ограниченной этим циклом.

Поскольку мы знаем, какой из треугольников с этим ребром лежит внутри цикла, и  $Int_{T^\infty}(C) = \emptyset$ , то нам известна его третья вершина  $w$ . Если рёбра  $(u, w)$ ,  $(v, w)$  входят в цикл, то он является треугольником. В противном случае, одно из них (не ограничивая общности, пусть это будет  $(v, w)$ ) в цикл не входит.

Тогда по данному ребру возможно разделить его на два меньших цикла с  $Int_{T^\infty}(C) = \emptyset$ , и рекурсивно произвести данную операцию для них. Заметим, что для каждого из них мы знаем что в него входит ребро  $(v, w)$  и то, какой из треугольников с этим ребром находится внутри цикла.

Таким образом, возможно получить верхнюю оценку на время работы данного алгоритма на цикле длины  $n + 2$ :

$$f(n) = C_1 + \max_{k \in [1, n-1]} (f(k) + f(n - k)) \quad (1)$$

А также  $f(1) = C_2$ .

По индукции возможно доказать, что это описывает функцию  $f(n) = (n - 1)C_1 + nC_2$ : для  $n = 1$  это тривиально, а для  $n > 1$  это получается из того, что  $f(k) + f(n - k) = (n - 2)C_1 + nC_2$  при  $k \in [1, n - 1]$ .

Следовательно, полученный алгоритм является линейным. ◀

## 2.2 Поиск остовного дерева треугольников в 3-связных планарных графах

**Теорема 3.** Поиск остовного дерева треугольников в 3-связном планарном локально связном графе, степени вершин которого принадлежат множеству  $\{3, 6\}$  является NP-полной задачей.

► Задача поиска гамильтоновой цепи в 3-связном планарном кубическом графе является NP-полной. [10]

Покажем, как данную задачу возможно свести к поиску остовного дерева треугольников в 3-связном планарном локально связном графе со степенями вершин из множества  $\{3, 6\}$ :

Пусть граф  $G$  является 3-связным, планарным и кубическим. Построим граф  $H$  следующим образом:

Для каждой вершины  $v \in V(G)$ , Поставим ей в соответствие 4 вершины  $a, b, c, d$  в графе  $H$ , причём  $(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (c, d), (d, b) \in E(H)$  (см. рисунок 2.13).

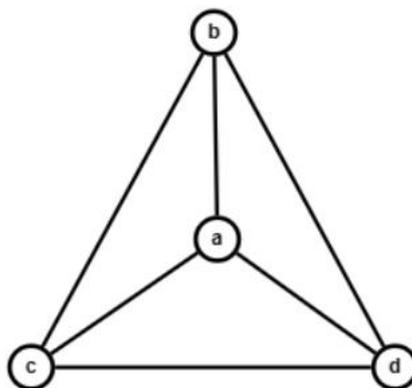


Рисунок 2.13 – Преобразование вершины  $v$

Каждому ребру  $(u, v)$  в соответствие ставится 3 ребра: одно из  $(b_u, c_u), (d_u, c_u), (b_u, d_u)$  соединяется с одним из  $(b_v, c_v), (d_v, c_v), (b_v, d_v)$ , так чтобы 2 рёбрами соединить соответствующие вершины (причём таким образом, чтобы в плоском представлении графа эти два ребра не пересекались). Также добавляется одно дополнительное ребро, причём каждая из  $b_v, c_v, d_v$  инцидентна ровно одному из дополнительных рёбер (см. рисунок 2.14).

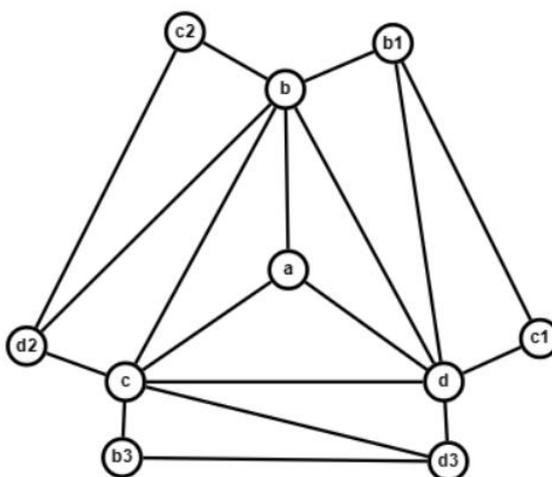


Рисунок 2.14 – Преобразование рёбер, инцидентных вершине  $v$

Каждая вершина из графа  $G$  преобразуется в  $K_4$  в графе  $H$ , поэтому каждый подграф из вершин, соответствующих одной в  $G$ , является 3-связным.

Если удаление множества из двух или менее вершин в  $H$  разделяет два треугольника, то это эквивалентно удалению одного ребра в  $G$ , что оставляет  $H$  связным.

Следовательно, граф  $H$  является 3-связным.

Граф  $H$  является планарным, так как после преобразования одной вершины в  $K_4$  новые вершины возможно разместить сколь угодно близко, и преобразованные рёбра также могут не пересекаться если они представлены прямыми отрезками (пару основных рёбер при преобразовании одного ребра в  $H$  всегда можно выбрать так, чтобы они не пересекались).

Он локально связан, так как окрестность вершины  $a$  является треугольником, а окрестность любой другой вершины содержит  $P_6$ .

А также степени вершин графа  $H$  принадлежат множеству  $\{3, 6\}$ .

Теперь покажем, что граф  $H$  содержит остовное дерево треугольников тогда и только тогда, когда граф  $G$  содержит гамильтонову цепь.

Если  $G$  содержит гамильтонову цепь, то для каждой вершины цепи в остовное дерево треугольников графа  $H$  будут входить 2 из треугольников  $(a, b, c, a)$ ,  $(a, d, b, a)$ ,  $(a, c, d, a)$ . Для каждого же ребра цепи в остовное дерево треугольников будет входить два треугольника, ему соответствующие.

Таким образом, если  $G$  содержит гамильтонову цепь, то  $H$  содержит остовное дерево треугольников.

Теперь, пусть  $H$  содержит остовное дерево треугольников. Покажем, что по нему возможно построить гамильтонову цепь для графа  $G$ :

Заметим, что из треугольников  $(a, b, c, a)$ ,  $(a, b, d, a)$ ,  $(a, c, d, a)$  не более двух могут входить в остовное дерево треугольников, т.к. иначе вершина  $a$  не может входить в порождаемый им гамильтонов цикл. Но при этом, хотя бы один из них должен ему принадлежать, так как иначе вершина  $a$  не будет входить ни в один треугольник. Следовательно, одновременно 3 треугольника соответствующие различным рёбрам вершины  $v$  не могут входить в остовное дерево треугольников.

Из этого мы получаем, что треугольники в остовном дереве будут образовывать некоторую цепь, которая посетит каждый из соответствующих вершинам  $K_4$  них ровно по одному разу (кроме, возможно, начала и конца цепи).

Таким образом, остовное дерево треугольников в  $H$  порождает гамильтонову цепь в графе  $G$ . ◀

Таким образом, свойство NP-полноты поиска остовного дерева треугольников в таком классе графов и в общем случае, даёт NP-полноту и для промежуточных классов графов, таких как локально связные, планарные и 3-связные.

Данный результат является значительным усилением результата об NP-полноте задачи поиска остовного дерева треугольников в графе в общем случае, полученного в рамках дипломной работы. [4]

### ГЛАВА 3

## НАЛИЧИЕ ОСТОВНОГО ДЕРЕВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ПОЛНАЯ ЦИКЛИЧЕСКАЯ РАСШИРЯЕМОСТЬ

### 3.1 Отношение в общем случае

Согласно свойству 7, был получен результат о том, что из наличия остовного дерева треугольников в графе следует вершинная панцикличность. Кроме того, очевидно также что любой вполне циклически расширяемый граф является вершинно панцикличным.

Представляет некоторый интерес отношение между наличием в графе остовного дерева треугольников и полной циклической расширяемостью.

Если не накладывать на  $G$  никаких ограничений, то возможно найти следующие графы, показывающие отсутствие следствия между данными множествами:

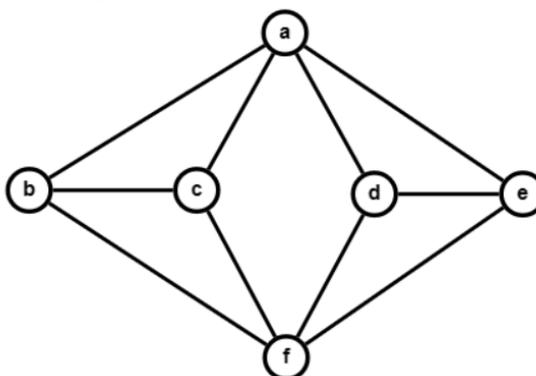


Рисунок 3.1 – Граф  $H_1$ , являющийся вполне циклически расширяемым, но не содержащий остовное дерево треугольников

**Утверждение 2.** Граф  $H_1$  является вполне циклически расширяемым, но не содержит остовное дерево треугольников.

► Сначала покажем, что  $H_1$  является вполне циклически расширяемым:

Во-первых, все вершины входят в хотя бы один из треугольников  $(a, b, c, a)$ ,  $(d, e, f, d)$ .

Поскольку данный граф симметричен, не будем многократно рассматривать циклы симметричные друг другу.

Из циклов длины 3, в данный граф входят  $(a, d, e, a)$  и симметричные ему, и они могут быть расширены до  $(a, d, f, e, a)$  и симметричных.

Из циклов длины 4, в данный граф входят  $(a, d, f, e, a)$  и симметричные,  $(a, d, f, c, a)$  и симметричные. Все они могут быть расширены до  $(a, d, e, f, c, a)$  и симметричных ему.

Для каждого множества из 5 вершин, включающего  $a$  и  $f$ , существует цикл длины 5:  $(a, d, e, f, c, a)$  и аналогичные, и все они могут быть расширены до гамильтонова цикла  $(a, d, e, f, b, c, a)$ .

Следовательно, граф  $H_1$  является вполне циклически расширяемым.

Далее докажем, что он не содержит остовное дерево треугольников:

Согласно свойству 6, в остовном дереве треугольников каждой вершине графа инцидентны ровно 2 ребра, входящие ровно в 1 треугольник.

Всего в  $H_1$  четыре треугольника:  $(a, b, c, a)$ ,  $(a, d, e, a)$ ,  $(f, b, c, f)$ ,  $(f, d, e, f)$ .

Вершина  $a$  входит в 2 из них, и они не имеют ни одного общего ребра. Следовательно, если они оба входят в остовное дерево треугольников, то свойство 6 остовного дерева треугольников бы нарушилось. Значит, из треугольников  $(a, b, c, a)$  и  $(a, d, e, a)$  ровно 1 входит в остовное дерево.

Рассматривая вершину  $f$ , аналогично получим, что из треугольников  $(f, b, c, f)$  и  $(f, d, e, f)$  в остовное дерево треугольников входит ровно 1.

Таким образом, остовное дерево треугольников может состоять только из 2 треугольников. Но в графе на  $n$  вершинах, чтобы покрыть их все, остовное дерево треугольников должно состоять из  $n - 2$  треугольников, а граф  $H_1$  содержит 6 вершин.

Следовательно,  $H_1$  не содержит остовное дерево треугольников. ◀

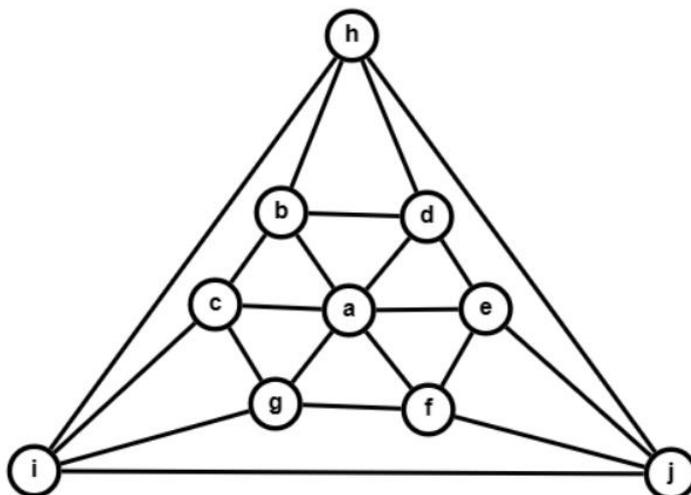


Рисунок 3.2 – Граф  $H_2$ , не являющийся вполне циклически расширяемым, но содержащий остовное дерево треугольников

**Утверждение 3.** Граф  $H_2$  не является вполне циклически расширяемым, но содержит остовное дерево треугольников

► Сначала докажем, что данный граф не является вполне циклически расширяемым:

Рассмотрим треугольник  $(h, i, j, h)$ . Его невозможно расширить, поскольку при удалении рёбер  $(h, i)$ ,  $(h, j)$ ,  $(i, j)$  попарное расстояние между вершинами  $h$ ,  $i$ ,  $j$  становится равно 2.

Далее покажем остовное дерево треугольников в данном графе:

Оно состоит из треугольников  $(i, c, g, i)$ ,  $(c, a, g, c)$ ,  $(c, b, a, c)$ ,  $(b, d, a, b)$ ,  $(b, h, d, b)$ ,  $(a, d, e, a)$ ,  $(a, f, e, a)$ ,  $(e, f, j, e)$ , и порождает гамильтонов цикл  $(i, c, b, h, d, e, j, f, a, g, i)$ . ◀

Данные графы показывают, что в общем случае ни одно из этих свойств не следует из другого.

### 3.2 Поиск среди локально связных графов

Некоторый интерес также представляло исследование данных свойств в контексте локально связных графов.

**Битовая маска** (или же просто *маска*) это некоторая конечная последовательность из 0 и 1, используемая для хранения данных в сжатом виде. [11]

Над масками одинаковой длины также возможно производить логические операции, такие как, например, конъюнкция, дизъюнкция и строгое ИЛИ. Данные операции производятся попарно над всеми лежащими на одинаковых позициях битами.

Далее, маски будут использоваться для описывания циклов и цепей в графе, где бит равен 1 при наличии соответствующей ему вершины в маршруте.

Поиск был произведён с помощью компьютера. Были имплементированы алгоритмы проверки графа на полную циклическую расширяемость и на наличие остовного дерева треугольников.

Сначала производится проверка графа на связность и локальную связность.

Полная циклическая расширяемость проверялось следующим образом:

Запускается поиск в глубину из некоторой вершины дерева. Для каждой пройденной вершины запоминается маска из всех вершин, лежащих на рассматриваемом пути от корня до неё.

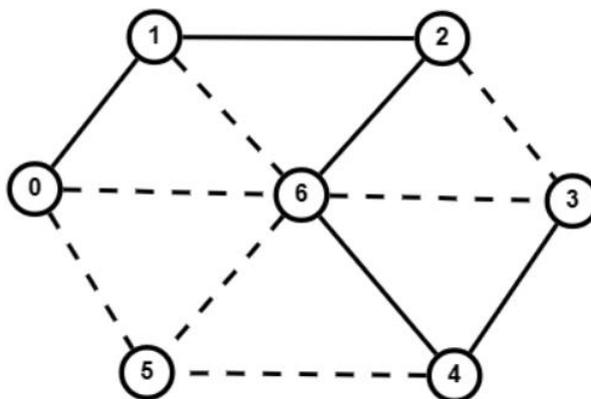


Рисунок 3.3 – Пример поиска в глубину. В данный момент рассматривается цепь (0, 1, 2, 6, 4, 3). Вершинам 2 и 6 соответствуют маски 1100000 и 1110000, и при попытке пойти в них маски 0011101 ( $= 1100000 \oplus 1111101$ ) и 0001101 ( $= 1110000 \oplus 1111101$ ) будут найдены и добавлены в список масок, соответствующих циклам

Если посещается вершина, находящаяся в данной цепи, то берётся строгое побитовое ИЛИ двух масок, и оно представляет собой маску некоторого цикла. Так как граф связан, для каждого цикла в графе таким образом будет найдена маска.

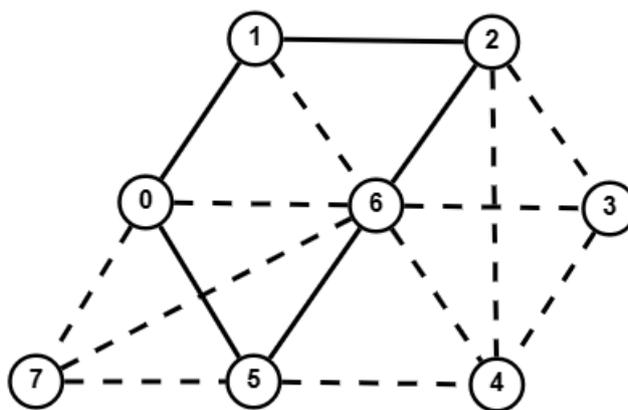
Далее маски распределяются по числу единиц в них (числу вершин в цикле). Проверяется что каждая вершина входит в некоторый треугольник, и что для каждой маски (кроме той, что соответствует гамильтонову циклу) имеется маска, в которой на одну единицу больше и которая отличается от этой ровно на одну единицу.

Наличие остовного дерева треугольников (в графе с  $n$  вершинами) проверялось следующим образом:

Сначала, полным перебором находились все треугольники в графе. Затем выбиралась вершина  $v$ , входящая в наименьшее число треугольников, и начиная с каждого треугольника в который она входила рекурсивно запускался следующий процесс:

Пусть в данный момент в дереве треугольников  $k$  треугольников, известно какие вершины в него входят и для каждой из них известны две соседние вершины в цикле. Если  $k = n$  Тогда поочерёдно рассматриваются все треугольники в графе.

Если в некотором треугольнике  $(a, b, c, a)$  вершины  $a, b$  входят в нынешнее дерево треугольников и являются соседними в цикле, а вершина  $c$  в него не входит. Тогда возможно попробовать присоединить данный треугольник, и тогда для  $a$  и  $b$  вместо друг друга, они будут соседними с  $c$ . Запускается следующая рекурсивная итерация.



**Рисунок 3.4 – Пример поиска остовного дерева треугольников. Вершина 1 входит только в два треугольника, поэтому поиск начат с неё. В данный момент дерево треугольников состоит из треугольников  $(1, 2, 6, 1)$ ,  $(0, 1, 6, 1)$  и  $(0, 5, 6, 0)$ . Возможными кандидатами на присоединение являются  $(0, 7, 5, 0)$ ,  $(5, 4, 6, 5)$ ,  $(2, 4, 6, 2)$  и  $(2, 3, 6, 2)$**

Если же рекурсивный поиск через данный треугольник оказывается безуспешным, то его дальнейшее присоединение в рекурсии запрещается, и производится попытка присоединения следующего треугольника.

Если ни один треугольник не даёт успешный результат, то все введённые на этом шаге запреты отменяются, и рекурсия переходит на шаг назад.

Если попытка поиска, начинавшаяся с некоторого треугольника  $(u, v, w, u)$  была безуспешной, то его присоединение также запрещается для всех последующих попыток рекурсивного поиска.

Данный поиск является полным перебором всех возможных способов построения остовного дерева треугольников начиная с некоторой вершины, но никогда не рассматривает одну и ту же конфигурацию дважды.

Несмотря на то, что оба эти алгоритма являются переборными, небольшое число вершин в рассматриваемых графах позволяет им работать очень быстро.

Поиск графов с необходимыми свойствами производился следующим образом:

Перебиралось число вершин по возрастанию (начиная с 3). Среди графов с одинаковым числом вершин, графы рассматривались по возрастанию числа рёбер. При  $n$  вершинах и  $m$  рёбер, перебирались все маски на  $\frac{n(n-1)}{2}$  битах с ровно  $m$  единицами. Каждому биту в маске соответствовало некоторое ребро.

Кроме того, чтобы уменьшить число проверок данных свойств на изоморфных графах, были введены две дополнительные оптимизации.

Во-первых, в построенном графе проверялось, что вершины должны быть пронумерованы по убыванию степени, так как в противном случае гарантированно существует некоторый изоморфный данному графу.

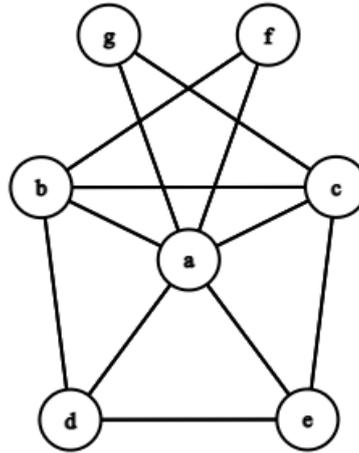
Во-вторых, в построенном графе проверялось, что списки смежности вершин одинаковой степени лексикографически не возрастают, так как иначе существует некоторая лексикографически не возрастающая их перестановка.

Данные алгоритмы были имплементированы на языке программирования C++. Перебор и проверка свойств графов заняли несколько часов, среди которых лишь менее десяти секунд пришлось на проверку полной циклической расширяемости и наличия остовного дерева треугольников в графах.

Всё это позволило найти некоторые графы, которые являются связными и локально связными, но имеют ровно одно из искомым свойств.

### 3.3 Связные локально связные графы

С помощью компьютера были найдены некоторые графы, показывающие, что даже среди связных локально связных графов ни одно из свойств полной циклической расширяемости и наличия остовного дерева треугольников не является следствием другого:



**Рисунок 3.5 – Граф  $H_3$ , локально связный, не являющийся вполне циклически расширяемым, но содержащий остовное дерево треугольников**

**Утверждение 4.** Граф  $H_3$  не является вполне циклически расширяемым, но содержит остовное дерево треугольников.

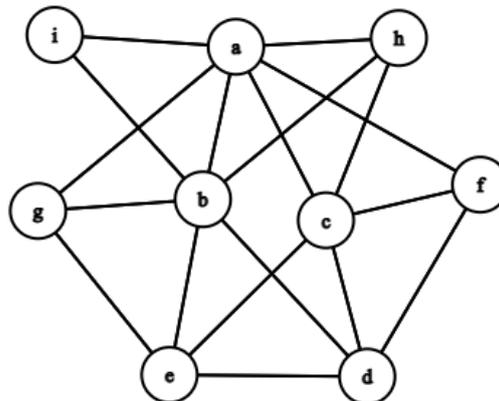
► Сначала докажем, что он не является вполне циклически расширяемым:

Рассмотрим цикл  $(b, f, a, g, c, b)$ . Не существует цикла на множестве вершин  $\{a, b, c, d, f, g\}$ , так как в порождённом им подграфе вершины  $b, f$  имеют степень 2 и должен был бы содержать рёбра  $(a, d), (d, b), (b, f), (f, a)$ .

Аналогично с  $\{a, b, c, e, f, g\}$ . Следовательно, данный граф не является вполне циклически расширяемым.

Остовное дерево треугольников на данном графе очевидно и содержит треугольники  $(a, b, f, a), (a, b, d, a), (a, d, e, a), (a, c, e, a), (a, c, g, a)$ . ◀

Данный граф содержит 7 вершин и 12 рёбер, что указывает на то, что среди всех графов с меньшим числом вершин или же таким же числом вершин и меньшим числом рёбер, все локально связные графы содержат остовное дерево треугольников тогда и только тогда, когда он вполне циклически расширяем.



**Рисунок 3.6 – Граф  $H_4$ , локально связный, являющийся вполне циклически расширяемым, но не содержащий остовное дерево треугольников**

**Утверждение 5.** Граф  $H_4$  не содержит остовное дерево треугольников.

► Предположим, что граф  $H_4$  содержит остовное дерево треугольников. Найдём противоречие.

Вершина  $i$  входит только в треугольник  $(a, b, i, a)$ , следовательно он обязан входить в остовное дерево треугольников. Кроме того, так как это единственный треугольник, в который входят рёбра  $(a, i)$ ,  $(b, i)$ , ребро  $(a, b)$  обязано входить ещё в какой-то из треугольников в дереве.

Ребро  $(a, b)$  входит только в треугольники  $(a, b, i, a)$ ,  $(a, b, h, a)$  и  $(a, b, g, a)$ . Если треугольник  $(a, b, h, a)$  входит в остовное дерево треугольников, то его невозможно расширить дальше, следовательно, в него входит  $(a, b, g, a)$ .

Вершина  $h$  входит только в треугольники  $(a, b, h, a)$  и  $(a, c, h, a)$ , следовательно треугольник  $(a, c, h, a)$  также входит в остовное дерево треугольников.

Теперь рассмотрим вершину  $a$ . Рёбра  $(a, g)$ ,  $(a, h)$ ,  $(a, i)$  каждое входит хотя бы в один треугольник в остовном дереве треугольников, но ни одно из них не может входить более чем в один треугольник.

Это противоречит тому, что каждой вершине в графе должно быть инцидентно ровно два ребра, которые входят ровно в один треугольник из остовного дерева треугольников. Следовательно, данный граф не может содержать остовное дерево треугольников. ◀

Вследствие большого числа циклов в данном графе, доказательство вручную того, что он является вполне циклически расширяемым, представляет некоторые трудности. Полный список всех масок, соответствующих его циклам, предоставлен в приложении А.

Граф  $H_4$  обладает 9 вершинами и 18 рёбрами, что указывает на то, что среди локально связных графов с менее чем 9 вершинами (или 9 вершинами и менее чем 18 рёбрами), из полной циклической расширяемости следует наличие остовного дерева треугольников.

Стоит также отметить, что в перебираемых графах также проводилась проверка на то, что они являются  $K_{1,3}$ -свободными. Это представляет некоторый интерес потому, что данные графы содержат гамильтонов цикл. [12]

В процессе данного поиска не было обнаружено ни одного связного локально связного графа, который бы являлся  $K_{1,3}$ -свободным, но при этом не содержал бы остовное дерево треугольников.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была исследована возможность поиска остовного дерева треугольников в локально связных графах треугольной решётки. С помощью известного алгоритма построения гамильтонова цикла в данных графах за линейное время был найден способ построения остовного дерева треугольников в таких графах за линейное время.

Было найдено более сильное условие NP-полноты задачи проверки наличия остовного дерева треугольников в графе. С его помощью возможно утверждать, например, что на классах планарных, 3-связных и локально связных графов задача поиска остовного дерева треугольников является NP-полной. Данный результат является значительным усилением ранее полученного свойства об NP-полноте поиска остовного треугольника в графе в общем случае.

Исследовано отношение между различными циклическими свойствами. Было показано, что даже в случае локально связных графов ни одно из свойств наличия остовного дерева треугольников и полной циклической расширяемости не следует из другого. Были найдены минимальные локально связные графы, удовлетворяющие ровно одному из свойств полной циклической расширяемости и наличия остовного дерева треугольников.

Интерес также представляет исследование наличия остовного дерева треугольников в  $K_{1,3}$ -свободных локально связных графах. Перебор графов, произведённый в процессе исследования свойств цикличности графов, также показал, что среди графов с менее чем 9 вершинами (а также 9 вершинами и менее чем 18 рёбрами), все связные локально связные  $K_{1,3}$ -свободные графы также содержат остовное дерево треугольников. Это служит некоторым аргументом в пользу того, что данные свойства могут быть связаны, и представляет собой возможное направление для дальнейших исследований.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Kikust, P.V. The existence of the Hamiltonian circuit in a regular graph of degree 5 / P.V. Kikust – Latv. Mat. Ezheg., 16 (1975), pp. 33 – 38.
2. Иржавский П. А., Орлович Ю. Л. Полная циклическая расширяемость локально связных  $K_{1,4}$ -ограниченных графов / П. А. Иржавский, Ю. Л. Орлович – Тр. Ин-та матем., 2012, том 20, номер 2, с. 36-50
3. Пронин, Ф.В. Линейный алгоритм построения гамильтонова цикла в локально связном графе треугольной решетки / Ф. В. Пронин – Вестник БГУ, сер. 1, №1, (2011)
4. Климашевский, Е. С. Графы с ограниченной локальной структурой и их циклические свойства: дип. работа / Е. С. Климашевский – Минск, 2021
5. Chartrand G., Pippert R. Locally connected graphs / G. Chartrand, R. Pippert – Časopis Pěst. Mat., 99 (1974), pp. 158 – 163.
6. Grünbaum, V. Convex Polytopes / V. Grünbaum Springer (2003)
7. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика (2001), с. 41
8. Bondy, J. A. Pancyclic graphs I / J. A. Bondy – Journal of Combinatorial Theory, Series B (1971), T. 11, pp. 80-84
9. Randerath B., Schiermeyer I., Tewes M., Volkmann L. Vertex Pancyclic graphs / B. Randerath, I. Schiermeyer, M. Tewes, L. Volkmann – Discrete Applied Mathematics (2002), T. 120, pp 219-237
10. Garey, M. R., Johnson D. S., Tarjan R.E. The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete / M. R. Garey, D. S. Johnson, R. E. Tarjan – Siam J Comput, Vol 5, No 4 (1976)
11. C++, Utilities library, std::bitset [Electronic resource] // Cppreference.com – Mode of access: <https://en.cppreference.com/w/cpp/utility/bitset> – Date of access: 10.04.2023
12. Oberly D. J., Sumner D.P. Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is Hamiltonian / D. J. Oberly, D. P. Sumner – J. Graph Theory, 3 (1979), pp. 351-356

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Маски вершин циклов графа  $H_4$  (порядок вершин  $ihgfedcba$ ):

3(9):

000011010 000011100 000100101 000101100 001000011 001010010 010000011  
010000101 100000011

4(16):

000001111 000010111 000011110 000101011 000101101 000111100 001010011  
001010101 001011010 010000111 010001110 010010110 010100101 011000011  
101000011 110000011

5(30):

000011111 000101111 000110111 000111011 000111101 000111110 001001111  
001010111 001011011 001011101 001011110 001101011 001110101 001111001  
010001111 010010111 010011110 010100111 010101011 010101101 010101110  
011000111 011010011 011010101 011010110 100001111 100010111 100101011  
101010011 110000111

6(28):

000111111 001011111 001101111 001110111 001111011 001111101 001111110  
010011111 010101111 010110111 010111011 010111101 010111110 011001111  
011010111 011011011 011011101 011011110 011100111 100011111 100101111  
100110111 100111011 101010111 101011011 110001111 110010111 110100111

7(15):

001111111 010111111 011011111 011101111 011110111 011111011 011111101  
011111110 100111111 101011111 101110111 101111011 110011111 110101111  
111010111

8(4):

011111111 101111111 110111111 111011111

9(1):

111111111