

А.П. ХАПАЛЮК

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИОННОГО ТИПА
НА УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Как известно [1,2] в настоящее время большинство типичных задач в теории электромагнитных волн формулируются как краевые задачи на уравнения Максвелла, которые представляют собой довольно сложную и все еще недостаточно изученную систему дифференциальных уравнений в частных производных. Готовых решений для исследования многих проблем теории электромагнитных волн нет. Поэтому начнем с получения достаточно общих точных аналитических решений краевых задач на уравнения Максвелла. В стационарном (временной множитель $\exp(i\omega t)$ опускается) случае в безразмерных декартовых координатах ($kx \rightarrow x, ky \rightarrow y, kz \rightarrow z, k - \text{волновое число}$) они записываются

$$\operatorname{rot} E = -i\mu H, \quad \operatorname{rot} H = i\varepsilon E, \quad (1)$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

Математическую структуру уравнений (1) можно несколько упростить, если к ним применить операцию двукратного прямого преобразования Фурье, которое выполняется по формуле

$$\xi^m \eta^n \overset{\vee}{\Phi}(\xi, \eta, z) = i^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} \int \left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \overset{\wedge}{\Phi}(x, y, z) \right] e^{ix\xi + iy\eta} dx dy, \quad (2)$$

где $\Phi(x, y, z)$ – любая компонента векторов поля волны (1). Операция (2) взаимно однозначно переводит функцию $\Phi(x, y, z)$ координат x, y в новую функцию $\overset{\vee}{\Phi}(\xi, \eta, z)$ переменных ξ, η . Функцию координат x, y обычно называют оригиналом, а функцию переменных ξ, η (их обычно называют переменными пространственного спектра) – трансформантой Фурье. В дальнейшем оригиналы и трансформанты будут обозначаться одними и теми же буквами, но аргументы оригиналов будут обозначаться малыми латинскими, а трансформант – малыми греческими буквами и это будет считаться их отличительным признаком. Дополнительно к этому или взамен иногда будут использоваться надстрочные значки $\wedge$ для оригиналов и $\vee$ для трансформант.

Применяя операцию преобразований (2) к уравнениям (1), после простых дополнительных преобразований получим уравнения

$$\frac{\partial \overset{\vee}{E}_x}{\partial z} = -\frac{i}{\varepsilon} \left[\xi \eta \overset{\vee}{H}_x + (\varepsilon \mu - \xi^2) \overset{\vee}{H}_y \right], \quad \frac{\partial \overset{\vee}{E}_y}{\partial z} = \frac{i}{\varepsilon} \left[(\varepsilon \mu - \eta^2) \overset{\vee}{H}_x + \xi \eta \overset{\vee}{H}_y \right],$$

$$\frac{\partial \check{H}_x}{\partial z} = \frac{i}{\mu} \left[\xi \eta \check{E}_x + (\epsilon \mu - \xi^2) \check{E}_y \right], \quad \frac{\partial \check{H}_y}{\partial z} = -\frac{i}{\mu} \left[(\epsilon \mu - \eta^2) \check{E}_x + \xi \eta \check{E}_y \right]. \quad (3)$$

Нормальные компоненты векторов волны E_z и H_z не играют существенной роли, и без особой надобности выписываться не будут.

Система уравнений (3) принципиально равносильна исходным уравнениям Максвелла (1), но уравнения записаны в различных переменных. В математическом отношении система уравнений (3) проще, чем система (1), и поэтому будем сначала ее решать. Известно [1,2], что любая компонента векторов волны должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} + \epsilon \mu \hat{\Phi} = 0. \quad (4)$$

Применяя к этому уравнению операцию преобразования Фурье (2), перейдем от переменных x, y к переменным ξ, η . В результате уравнение (4) принимает вид $(\gamma^2 = \xi \mu - \xi^2 - \eta^2)$

$$\frac{\partial^2 \check{\Phi}}{\partial z^2} + \gamma^2 \check{\Phi} = 0. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5) находится довольно просто

$$\check{\Phi}(\xi, \eta, z) = \check{g}(\xi, \eta) \cos \gamma z + i \check{f}(\xi, \eta) \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \quad (6)$$

где $\check{g}(\xi, \eta)$ и $\check{f}(\xi, \eta)$ – произвольные функции переменных ξ и η .

Отсюда ясно, что все компоненты векторов поля искомой волны должны быть функциями типа (6). Поэтому общее решение системы уравнений (3) следует искать в виде

$$\begin{aligned} \check{E}_x &= \check{g}_1 \cos \gamma z + i \check{f}_1 \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, & \check{E}_y &= \check{g}_2 \cos \gamma z + i \check{f}_2 \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\ \check{H}_x &= \check{g}_3 \cos \gamma z + i \check{f}_3 \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, & \check{H}_y &= \check{g}_4 \cos \gamma z + i \check{f}_4 \frac{\sin \gamma z}{\gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения (7) по отдельности будут удовлетворять уравнению Гельмгольца (5) при любых g_j и f_j ($j=1,2,3,4$), но они еще дополнительно должны удовлетворять уравнениям Максвелла (3), что накладывает некоторые условия на функции g_j и f_j . Эти дополнительные усло-

вия можно найти, если выражения (7) подставить в уравнения (3) и потребовать их выполнения. В результате получим

$$\begin{aligned} 1) \varepsilon \check{f}_1 &= -\xi \eta \check{g}_3 - (\varepsilon \mu - \xi^2) \check{g}_4, & 2) \varepsilon \check{f}_2 &= -\xi \eta \check{g}_4 + (\varepsilon \mu - \eta^2) \check{g}_3, \\ 3) \mu \check{f}_3 &= -\xi \eta \check{g}_1 + (\varepsilon \mu - \xi^2) \check{g}_2, & 4) \mu \check{f}_4 &= -\xi \eta \check{g}_2 - (\varepsilon \mu - \eta^2) \check{g}_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Окончательно получаем четыре алгебраических уравнения относительно восьми функций g_j и f_j . Если теперь подставить f_j из уравнений (8), получаем точное аналитическое решение системы уравнений (3), содержащее четыре произвольных функции переменных ξ, η , это равносильно определению четырех линейно независимых частных решений исходных уравнений Максвелла (1). Получилось довольно общее решение, и его можно использовать для исследования разнообразных конкретных проблем теории электромагнитных волн.

Исключив из уравнений (3) функции f_j , которые определяются уравнениями (8), получим решение уравнений Максвелла (3)

$$\begin{aligned} \check{E}_x(\xi, \eta, z) &= \check{g}_1(\xi, \eta) \cos \gamma z - \frac{i}{\varepsilon} \left[\xi \eta \check{g}_3(\xi, \eta) + (\varepsilon \mu - \xi^2) \check{g}_4(\xi, \eta) \right] \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\ \check{E}_y(\xi, \eta, z) &= \check{g}_2(\xi, \eta) \cos \gamma z + \frac{i}{\varepsilon} \left[\xi \eta \check{g}_4(\xi, \eta) + (\varepsilon \mu - \eta^2) \check{g}_3(\xi, \eta) \right] \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\ \check{E}_z(\xi, \eta, z) &= -\frac{1}{\varepsilon} \left[\xi \check{g}_4(\xi, \eta) - \eta \check{g}_3(\xi, \eta) \right] \cos \gamma z + i \left[\xi \check{g}_1(\xi, \eta) + \eta \check{g}_2(\xi, \eta) \right] \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\ \check{H}_x(\xi, \eta, z) &= \check{g}_3(\xi, \eta) \cos \gamma z + \frac{i}{\mu} \left[\xi \eta \check{g}_1(\xi, \eta) + (\varepsilon \mu - \xi^2) \check{g}_2(\xi, \eta) \right] \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\ \check{H}_y(\xi, \eta, z) &= \check{g}_4(\xi, \eta) \cos \gamma z - \frac{i}{\mu} \left[\xi \eta \check{g}_2(\xi, \eta) + (\varepsilon \mu - \eta^2) \check{g}_1(\xi, \eta) \right] \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\ \check{H}_z(\xi, \eta, z) &= \frac{1}{\mu} \left[\xi \check{g}_2(\xi, \eta) - \eta \check{g}_1(\xi, \eta) \right] \cos \gamma z + i \left[\xi \check{g}_3(\xi, \eta) + \eta \check{g}_4(\xi, \eta) \right] \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \end{aligned} \quad (9)$$

Формулы (9) можно рассматривать как четыре линейно независимых алгебраических уравнения относительно восьми функций E_x, E_y, H_x, H_y, g_j . Четыре из них или соответствующие им четыре линейные комбинации нужно задать, после чего остальные четыре находятся из уравнений (9). Те функции, которые здесь могут быть произвольно заданными, и являются теми краевыми условиями, которые обеспечивают одно-

значность решения уравнений Максвелла. Они задаются при постановке задачи и в каждом конкретном случае могут быть различными.

Полагая в (9) $z = 0$, видим, что функции g_j определяют тангенциальные составляющие векторов поля волны на плоскости $z = 0$, и можно считать их заданными, что обеспечивает однозначность решения уравнений Максвелла. Решение (9) получено для однородной среды с произвольными значениями ε и μ . Часто приходится продлевать это решение через границу раздела из одной среды в другую среду с иными значениями ε и μ . Для этого используются известные из общей теории электромагнитных волн граничные условия [1], которые утверждают, что при переходе через границу из одной в другую среду тангенциальные составляющие векторов волны не изменяются. Это означает, что решения Максвелла для обеих сред нужно искать для одних и тех же краевых условий g_j . Поэтому решение для среды с другими ε и μ определяется тоже формулами (9), где нужно сделать замену $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1$, $\mu \rightarrow \mu_1$. В частности, $\gamma = \sqrt{\varepsilon\mu - \xi^2 - \eta^2} \rightarrow \gamma_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \xi^2 - \eta^2}$. Отсюда получается равенство $\varepsilon\mu - \gamma^2 = \varepsilon_1\mu_1 - \gamma_1^2$, которое можно рассматривать как обобщение закона преломления на границе раздела различных сред (закон Снелла [1]).

Специфическая особенность полученных выше общих решений (9) состоит в том, что у них нет связи между электрическим и магнитным векторами. Произвольное задание краевых функций g_j равносильно произвольным значениям при постоянном z электрического и магнитного векторов волны. Это признак решений, у которых присутствуют стоячие волны. Часто задачи теории электромагнитных волн формулируются и решаются на языке бегущих волн. Поэтому дополнительно целесообразно из общих решений (9) выделить частные решения, представляющие собой бегущие волны. Для бегущих волн характерна строго определенная связь между амплитудами электрического и магнитного векторов волны, что записывается в виде $\varepsilon|E|^2 = \mu|H|^2$.

Для упрощения выкладок дальнейшее исследование целесообразно провести для одной поляризации. Рассмотрим сначала поляризацию, которая определена дополнительным условием $g_1 \neq g_4 \neq 0, g_2 = g_3 = 0$. Решение для этой поляризации получается как частный случай общего решения (9) и может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
\check{E}_{1x}(\xi, \eta, z) &= \check{g}_1(\xi, \eta) \cos \gamma z - \frac{i}{\varepsilon} (\varepsilon \mu - \xi^2) \check{g}_4(\xi, \eta) \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\
\check{E}_{1y}(\xi, \eta, z) &= \frac{i}{\varepsilon} \xi \eta \check{g}_4(\xi, \eta) \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\
\check{E}_{1z}(\xi, \eta, z) &= -\frac{1}{\varepsilon} \xi \check{g}_4(\xi, \eta) \cos \gamma z + i \xi \check{g}_1(\xi, \eta) \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\
\check{H}_{1x}(\xi, \eta, z) &= \frac{i}{\mu} \xi \eta \check{g}_1(\xi, \eta) \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\
\check{H}_{1y}(\xi, \eta, z) &= \check{g}_4(\xi, \eta) \cos \gamma z - \frac{i}{\mu} (\varepsilon \mu - \eta^2) \check{g}_1(\xi, \eta) \frac{\sin \gamma z}{\gamma}, \\
\check{H}_{1z}(\xi, \eta, z) &= -\frac{1}{\mu} \eta \check{g}_1(\xi, \eta) \cos \gamma z + i \eta \check{g}_4(\xi, \eta) \frac{\sin \gamma z}{\gamma}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Значение поля для волны этой поляризации на плоскости $z = 0$ равно

$$\begin{aligned}
\check{E}_x(\xi, \eta, 0) &= \check{g}_1(\xi, \eta), \quad \check{E}_y(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \check{E}_z(\xi, \eta, 0) = -\frac{1}{\varepsilon} \xi \check{g}_4(\xi, \eta), \\
\check{H}_x(\xi, \eta, 0) &= 0, \quad \check{H}_y(\xi, \eta, 0) = \check{g}_4(\xi, \eta), \quad \check{H}_z(\xi, \eta, 0) = -\frac{1}{\mu} \eta \check{g}_1(\xi, \eta).
\end{aligned} \tag{11}$$

Для бегущих волн векторы (11) должны определяться

$$\check{g}_1 = \sqrt{\mu} \sqrt{\varepsilon \mu - \xi^2} \check{U}(\xi, \eta), \quad \check{g}_4 = \pm \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon \mu - \eta^2} \check{U}(\xi, \eta), \tag{12}$$

где $U(\xi, \eta)$ – новая произвольная функция переменных ξ, η , она зависит от знака в (12). Подставляя значения (12) в (10), получим два частных решения типа бегущих волн с противоположными направлениями распространения вдоль оси z .

В результате получим два точных аналитических решения типа бегущих волн в средах с произвольными значениями функций $U(\xi, \eta)$, которые определяются тангенциальными составляющими векторов волны на координатной плоскости $z = 0$. Эти решения уже можно использовать для исследования различных, конкретных задач. В качестве примера рассмотрим две такого типа задачи: 1) отражение и преломление на плоской границе раздела двух различных сред при произвольной пространственной структуре падающей волны, 2) дифракция волны с произвольной пространственной структурой поля на плоском экране с произвольными электродинамическими свойствами. Эти задачи имеют много общего и решаются по одной и той же схеме. В обоих случаях имеются три волны:

с одной стороны плоскости (в области $z < 0$) имеются две волны с противоположными направлениями распространения (падающая или дифрагирующая и отраженная волны), с другой стороны – ($z > 0$) – преломленная волна. Обе задачи решаются с помощью формул (9), но с различным значением краевых условий.

Разобраться в складывающейся здесь ситуации, по-видимому, проще всего, если выписать значения тангенциальных компонент векторов соответствующих волн на плоскости $z = 0$. Падающая (дифрагирующая) волна представляется в виде

$$\begin{aligned} E_x(\xi, \eta, 0) &= \sqrt{\mu} \sqrt{\epsilon\mu - \xi^2} R(\xi, \eta), & H_y(\xi, \eta, 0) &= \sqrt{\epsilon} \sqrt{\epsilon\mu - \eta^2} A(\xi, \eta), \\ E_y &= H_x = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Значение этих компонент для отраженной волны запишется

$$\begin{aligned} E_x(\xi, \eta, 0) &= \sqrt{\mu} \sqrt{\epsilon\mu - \xi^2} R(\xi, \eta), & H_y(\xi, \eta, 0) &= -\sqrt{\epsilon} \sqrt{\epsilon\mu - \eta^2} R(\xi, \eta), \\ E_y &= H_x = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Значение этих же компонент для прошедшей волны запишется аналогично

$$\begin{aligned} E_x(\xi, \eta, 0) &= \sqrt{\mu_1} \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \xi^2} A_1(\xi, \eta), \\ H_y(\xi, \eta, 0) &= \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \eta^2} A_1(\xi, \eta), & E_y &= H_x = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь следует учесть, что в реальном решении тангенциальные составляющие поля по разным сторонам плоскости $z = 0$ не изменяются (граничные условия). Это накладывает дополнительные условия

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} \sqrt{\epsilon\mu - \xi^2} (A + R) &= \sqrt{\mu_1} \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \xi^2} A_1, \\ \sqrt{\epsilon} \sqrt{\epsilon\mu - \eta^2} (A - R) &= \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \eta^2} A_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Если задать функцию $A(\xi, \eta)$, которая определяет структуру падающей волны, то отсюда находятся функции $R(\xi, \eta)$, $A_1(\xi, \eta)$, которые определяют структуру отраженной и преломленной волн. Заметим, что в частном случае плосковолнового приближения из (16) получаются известные в оптике формулы Френеля [1].

В дифракционной задаче уравнения (16) интерпретируются несколько по-другому. В этом случае обычно $\epsilon_1 = \epsilon$ и $\mu_1 = \mu$. Дополнительно следует учесть, что функция $R(\xi, \eta)$ определяется с точностью до знака, и поэтому оба равенства (16) оказываются равносильными и, следовательно, нужно решить только одно из них. Получается одно уравнение отно-

сительно трех функций. Две из них нужно задавать, третья определяется однозначно. Обычно задают $A(\xi, \eta)$, которая в этом случае определяет дифрагирующую волну, и одну из функций $R(\xi, \eta)$ или $A_1(\xi, \eta)$, которые определяют свойства экрана и, следовательно, не могут быть найдены из уравнений Максвелла. Одна из них должна задаваться при постановке дифракционной задачи. При этом уравнение (16) представляет собой утверждение, которое определяет известный в оптике принцип Бабинне [1].

Аналогичное решение для волн второй поляризации получается из решения (9) при дополнительном условии $q_1 = q_4 = 0$ и

$$\overset{\vee}{q}_2 = \sqrt{\mu} \sqrt{\varepsilon \eta^2} \overset{\vee}{U}(\xi, \eta), \quad \overset{\vee}{q}_3 = \mp \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon \mu - \xi^2} \overset{\vee}{U}(\xi, \eta). \quad (17)$$

Решение для волн этой поляризации выше поставленных задач проводится совершенно аналогичным образом, без каких либо дополнительных проблем.

Следует заметить, что решение в математическом отношении оказалось довольно простым. Однако видимая простота решения связана с выбором переменных, в которых оно записано. Обычно требуется получить решение не в переменных пространственного спектра ξ и η , а в переменных декартовых координатах x и y . Для того, чтобы перейти от переменных ξ и η к переменным x и y , следует использовать операцию обратного преобразования Фурье, которая выполняется по формуле

$$i^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \hat{\Phi}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \xi^m \eta^n \overset{\vee}{\Phi}(\xi, \eta, z) e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta. \quad (18)$$

Примененный здесь метод решения использует операции преобразования Фурье. Как известно [3], возможности применения методов обычного преобразования Фурье довольно ограничены. Широко используемые в теории электромагнитных волн плосковолновые и им подобные приближения часто этим условиям не удовлетворяют.

Вообще говоря, интегралы Фурье, которые приходится здесь вычислять, можно свести к двум следующим типам

$$\begin{aligned} \hat{J}_1(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \overset{\vee}{q}(\xi, \eta) \cos \gamma z e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta, \\ \hat{J}_2(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \overset{\vee}{q}(\xi, \eta) \frac{\sin \gamma z}{\gamma} e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (19)$$

Это довольно сложные не табличные интегралы и они, на наш взгляд, заслуживают специального, самостоятельного исследования. Сложность их вычисления в первую очередь связана с наличием под знаком интеграла быстропеременных тригонометрических функций.

Область применения предложенного метода существенно расширяется, если интегралы (2) и (18) понимать в смысле обобщенного преобразования Фурье [4]. Заметим, что в теории электромагнитных волн с использованием более общих, чем обычно, решений уравнений Максвелла не следует ограничиваться рамками классического (обычного) математического анализа. Часто с самого начала целесообразно использовать современные методы теории обобщенных функций, где многие операции математического анализа (дифференцирование, интегрирование, суммируемость рядов и другие) решаются по иному.

В частности, обобщенное однократное преобразование Фурье выполняется по схеме

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\vee}{\Phi}(\xi, z) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^0 \overset{\vee}{\Phi}(\xi, z) e^{-i\xi(x+iy)} d\xi + \int_0^{\infty} \overset{\vee}{\Phi}(\xi, z) e^{-i\xi(x-iy)} d\xi \right]\end{aligned}\quad (20)$$

По этой схеме можно вычислить интегралы для тех функций $\overset{\vee}{\Phi}(\xi, z)$, для которых обычные интегралы Фурье расходятся.

Обычно считается, что теория дифракции волн является наиболее сложным разделом всей теории электромагнитных волн. В данном конкретном случае это проявляется в сложности вычисления и исследования интегралов типа (19).

Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
2. Хенл Х, Мауэ А., Вестпфаль М. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
3. Титчмарш Э. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: ИЛ, 1948. 480 с.
4. Хапалюк А.П. Обобщенное преобразование Фурье // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1995. № 3. С. 95-101.